

Meccanica del Punto Materiale

Corsi di Laurea in: Fisica e Astrofisica,
Tecnologie Fisiche Innovative
Anno Accademico 2007-2008

Lezioni (docente: Savrié Mauro)

lunedì : 11:00-13:00 aula G2

martedì: 11:00-13:30 aula G2

Esercitazioni (docente: Zavattini Guido)

giovedì: 11:00-13:00 aula G2

Le copie delle presenti trasparenze saranno disponibili in rete all' indirizzo:

www.fe.infn.it/~savrie

.....cercare...ma occhio agli errori!

Inizio lezioni: 07 gennaio 2007

Fine lezioni: 15 marzo 2008

Esami:

- **prova scritta**: **esito positivo**: $p > 18/30$

valida solo per

l' Anno Accademico **sconsigliato**: $15/30 < p < 18/30$

non ammesso: $p < 15/30$

- **prova orale** : **esito positivo**: $p > 18/30$

CALENDARIO ESAMI ANNO ACCADEMICO 2006-2007

CORSO DI LAUREA IN *FISICA ED ASTROFISICA* _ *Riforma (trimestri)*

MATERIA DI INSEGNAMENTO: meccanica del punto materiale

PRIMA SESSIONE <i>Dal 4 dicembre 2006 al 5 gennaio 2007</i>			
<i>Scritto</i>		<i>Orale</i>	
<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>	<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>
03 Dicembre	9:00 cattedrale 4	07 Dicembre	9:00 aula C330
		20 Dicembre	9:00 aula C330
SECONDA SESSIONE <i>Dal 20 marzo 2006 al 31 marzo 2007</i>			
<i>Scritto</i>		<i>Orale</i>	
<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>	<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>
17 marzo	9:00 cattedrale 4	21 marzo	9:00 aula C330
28 marzo	9:00 cattedrale 4	28 marzo	9:00 aula C330
TERZA SESSIONE <i>Dal 16 giugno 2006 al 29 luglio 2007</i>			
<i>Scritto</i>		<i>Orale</i>	
<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>	<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>
16 giugno	9:00 cattedrale 4	21 giugno	9:00 aula C330
01 luglio	9:00 cattedrale 4	03 luglio	9:00 aula C330
QUARTA SESSIONE <i>Dal 1 settembre 2007 a inizio lezioni a.a. 2007/08</i>			
<i>Scritto</i>		<i>Orale</i>	
<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>	<i>Giorno</i>	<i>Ora</i>
12 settembre	9:00 cattedrale 4	19 settembre	9:00 aula C330

COMMISSIONE GIUDICATRICE

Professore ufficiale della materia: Prof. Savrié Mauro

Secondo membro: Dr. Guido Zavattini

SUPPLENTI: Dr. Michelle Thompson Stancari Prof. Luppi Eleonora, Dr. Baldini Wander, Dr. Barbara Ricci

IL PRESIDENTE DELLA COMMISSIONE D'ESAME

Savrié Mauro

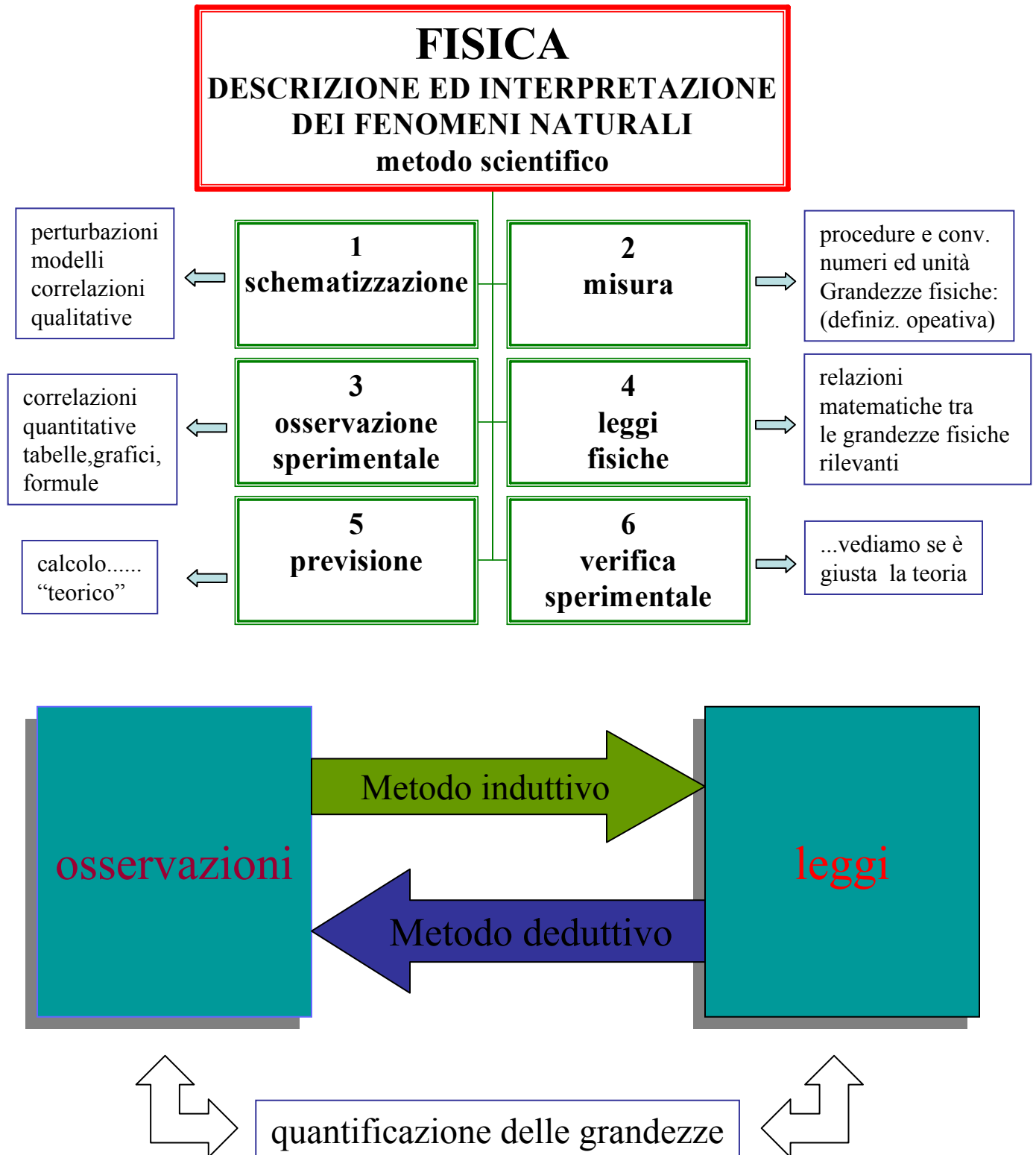
Principali Argomenti Trattati

- I vettori
- Cinematica del punto materiale;
- Dinamica del punto ed equazioni del moto;
- Lavoro, energia e sistemi conservativi;
- Dinamica dei sistemi
- Urti e reazioni;
- Dinamica rotazionale
- La gravità e le forze centrali

Testi consigliati:

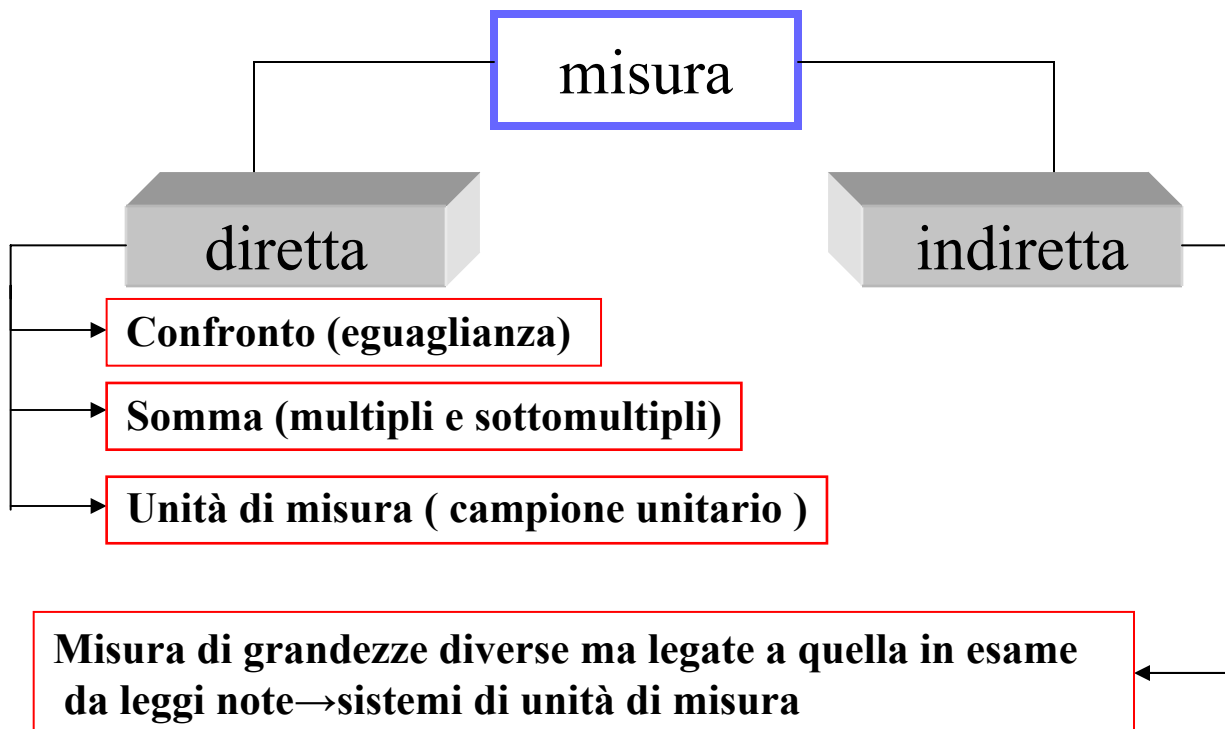
- 1) Mazzoldi, Nigro, Voci:
FISICA (1° vol.) ed. EdiSES Napoli
- 2) Mencuccini, Silvestrini:
Fisica I Meccanica Termodinamica ed. Liguori
- 3) H.C. Ohanian:
FISICA (1° vol.) ed. Zanichelli Bologna
- 4) B. Borgia, M. Grilli
Fisica Meccanica-Termodinamica Ed. CISU

Introduzione



Grandezze fisiche:

Una grandezza fisica è definita se si è indicato un modo operativo per misurarla e la misura è riproducibile



1. Criterio di confronto
tra coppie grandezze omogenee A e B permette di stabilire se $A \geq B$
2. Definire un criterio di somma
permette di definire i multipli ed i sottomultipli di grandezze fisiche : $A \cdot n$, $A : n$
3. Definizione delle grandezze campione
sistemi di unità di misura

Possiamo definire operativamente le Grandezze Fisiche

Grandezza fisica:

tutto ciò che, essendo suscettibile di variare quantitativamente, può essere sottoposto ad un processo di misura definito e ripetibile

Esempi:

- lunghezze, aree

Scelta iniziale dell' unità di misura:

ARBITRARIA :unità fondamentali

poi, per le leggi generali in cui compare:

LEGGI SEMPLICI

La ripetibilità della misura comporta:

1. Esistenza di errori (casuali)
2. Necessità di un sistema di unità di misura

Sistemi di unità di misura

.....prendiamo un caso interessante:

L' AREA

Una volta scelta l'unità di misura (ad es. di forma rettangolare), se applichiamo il “criterio del confronto”, ogni altra area sarà caratterizzata dalla misura “A”.

Se misuriamo più superfici rettangolari, vediamo che:

$$A = K \cdot a \cdot b \quad K: \text{Costante che dipende dalle unità di misura delle lunghezze e aree}$$

N.B.

L'area di qualunque figura piana è proporzionale al prodotto di 2 lunghezze. In pratica: in modo che le leggi siano le più semplici, si sceglie come area unitaria l' area del rettangolo di lati $a=b=1$. In questo modo si ha che:

$$A = a \cdot b \quad K=1$$

ma in generale, scelto il m^2 come U.d.M. per ogni altra figura piana:

$$A = f \cdot a \cdot b \quad f: \text{Fattore di forma}$$

$$f \neq 1$$

Triangolo: $f=1/2$

Cerchio: $f=\pi$

N.B.

La scelta dell' unità di misura è, in principio, arbitraria!

Se scegliessimo come unità di misura il cerchio di raggio unitario:

$$\text{Area rettangolo} = a \cdot b / \pi$$

In ogni caso dobbiamo constatare che :

L'area di qualunque figura piana, a meno del **fattore di forma** (numero puro), risulta essere sempre proporzionale al prodotto di 2 lunghezze:

$$[A] = [L] \cdot [L] = [L^2]$$

Tale relazione è detta:

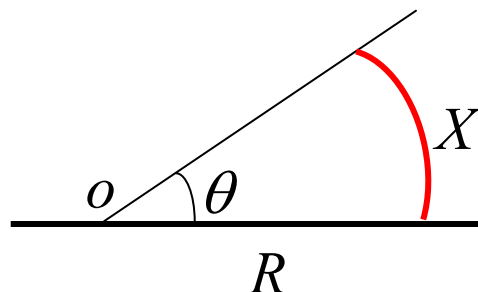
EQUAZIONE DIMENSIONALE

**Altri esempi di grandezze derivate
dalla lunghezza**

• **angolo** (gradi, radianti)

$$\vartheta = X/R \quad \underline{\text{adimensionale}}$$

$$\frac{\vartheta_{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{\vartheta_{\text{gradi}}}{360^\circ}$$



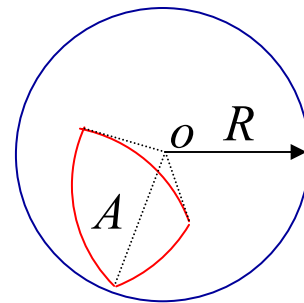
θ (GRADI)	θ (RAD)
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
90°	$\pi/2$
180°	π

• **angolo solido (steradiani)**

Area normale al raggio:

$$\Omega = A / r^2 \quad \text{adimensionale}$$

$$\text{Ang.Solido}_{\text{tot}} = (4 \cdot \pi \cdot r^2) / r^2$$

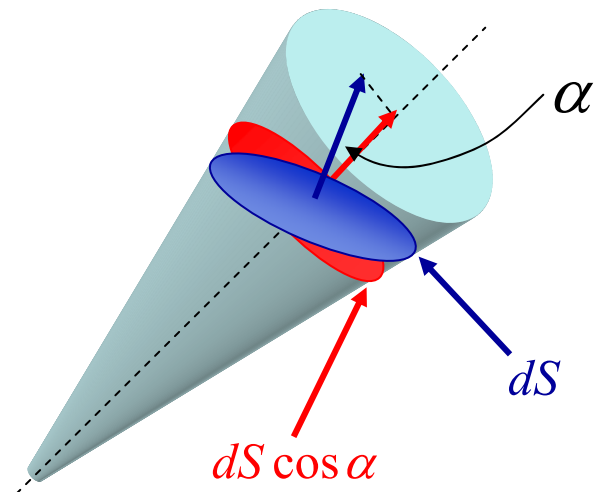


Area non normale al raggio:

$$\Omega = A \cdot \cos \alpha / r^2$$

Angolo solido infinitesimo:

$$d\Omega = dA / r^2$$



Dimensioni



Omogeneità dimensionale delle equazioni della Fisica

Leggi fisiche



Grandezze



Sistemi fondamentali

Sistemi di unità di misura

A) IL SISTEMA INTERNAZIONALE

Unità usate:

Metro: **m** Chilogrammo: **Kg** secondo: **s**

1) Metro:

- campione di Sèvres (Pt/Ir): circonferenza polare della Terra= $4 \cdot 10^7$ m
- λ_{Kr} (arancio) : $1\text{m}=1650763.73 \lambda_{\text{Kr}}$
- dal 1983 :
 $1\text{m} = \text{distanza percorsa dalla luce in}$
 $\Delta t=(299792458)^{-1}\text{s}$

2) Secondo:

- giorno solare medio: $1\text{s}=(86400)^{-1}$ g.s.m.
- frequenza di oscillazione dell'atomo di cesio
 $1\text{s} \longrightarrow 9192631770$ oscillazioni (coincide con il secondo solare medio dell' anno 1900)

3) Chilogrammo:

- campione di Sèvres
- Campione atomico: $1 \text{ u.m.a.}=1.66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

B) IL SISTEMA C.G.S.

- centimetro: **cm**
- grammo: **g**
- secondo: **s**

Ancora sulle dimensioni

Una volta definito un insieme di grandezze ogni altra può essere definita in maniera indiretta. Le grandezze dell'insieme (arbitrarie) si dicono fondamentali.

Le operazioni algebriche che definiscono una grandezza derivata D in base alle fondamentali F_i implicano relazioni specifiche tra le dimensioni note come: **equazioni dimensionali**. Per ogni relazione del tipo:

$$D = C \prod_i F_i^{\alpha_i} \quad \text{vale:} \quad [D] = \prod_i [F_i]^{\alpha_i}$$

Le dimensioni “fondamentali” del S.I sono L,M,t. Per cui:

$$\text{superficie: } [S] = [L]^2 [t]^0 [M]^0$$

$$\text{volume: } [V] = [L]^3 [t]^0 [M]^0$$

$$\text{velocità: } [v] = [L]^1 [t]^{-1} [M]^0$$

$$\text{accelerazione: } [a] = [L]^1 [t]^{-2} [M]^0$$

$$\text{densità: } [\rho] = [L]^{-3} [t]^0 [M]^1$$

- ❑ Le dimensioni non definiscono una grandezza fisica (g.f.)
- ❑ le dimensioni di una g.f. sono sempre esprimibili come prodotto dimensionale delle g.f. fondamentali del sistema di unità di misura (s.u.m.) usato, elevate a potenza con esponente reale ($\pm$)
- ❑ è possibile sommare solo g.f. omogenee
- ❑ g.f. diverse possono essere combinate solo con operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza con esponente adimensionale
- ❑ g.f. o loro funzioni possono essere legate da uguaglianze in una legge fisica solo se i due termini hanno le stesse dimensioni. Il segno di eguaglianza non è vero solo da un punto di vista matematico $\longrightarrow$ introduzione di coefficienti e costanti “dimensionali” il cui valore dipende dal s.u.m. scelto.
- ❑ Per essere usate come argomenti di funzioni, le grandezze fisiche devono essere combinate in modo adimensionale. Infatti qualsiasi funzione può essere sviluppata in serie di potenze:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

Per cui x deve essere adimensionale!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

ESEMPIO pratico di uso di eq. dimensionali:

Un pendolo è costituito da una pallina di piombo di massa **m** appesa ad un filo di lunghezza **l**. Usando un cronometro si è misurato il periodo **T**.

NOTIAMO CHE:

- pendolo fisicamente caratterizzato solo da: **m, l**
- moto del pendolo caratterizzato solo da: **g**

IPOSTESI:

$$T = \overset{\text{costante adimensionale}}{\boxed{K}} l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$$

$$[T] = [L^{\alpha}] [M^{\beta}] [(LT^{-2})^{\gamma}]$$

DA CUI:

$$\beta=0 \quad \gamma=-1/2 \quad \alpha=-\gamma=1/2$$

 $\boxed{T = K \sqrt{l / g}}$

$\textcircled{K}$ = costante da determinare..... **sperimentalmente!!**

ALCUNI NUMERI UTILI

Tempi tipici (circa):

Età dell' Universo	$4 \cdot 10^{17} \text{s}$
Età del nostro Sistema Solare	$1.4 \cdot 10^{17} \text{s}$
Età delle scritture più antiche	$1.6 \cdot 10^{11} \text{s}$
Durata media della vita dell' uomo	$2.2 \cdot 10^9 \text{s}$
Tempo luce da Terra a prima stella	$1.4 \cdot 10^8 \text{s}$
Rivoluzione della Terra	$3.15 \cdot 10^7 \text{s}$
Rotazione terrestre	$8.6 \cdot 10^4 \text{s}$
Vita media di un neutrone libero	$9.2 \cdot 10^2 \text{s}$
Tempo luce dal Sole alla Terra	$5 \cdot 10^2 \text{s}$
Tempo luce dalla Luna alla Terra	1.3s
Periodo onda sonora (do_3 , 261.6Hz)	$3.8 \cdot 10^{-3} \text{s}$
Vita media del π^+	$2.6 \cdot 10^{-8} \text{s}$
Periodo di un' onda luminosa	$\sim 2 \cdot 10^{-15} \text{s}$
Periodo raggi X	$\sim 3 \cdot 10^{-19} \text{s}$
Vita della particella più instabile	$\sim 10^{-24} \text{s}$

DISTANZE:

Distanza Universo osservabile	$\sim 10^{26}\text{m}$
Distanza galassia di Andromeda	$2.1 \cdot 10^{22}\text{m}$
Diametro della Galassia	$7.6 \cdot 10^{20}\text{m}$
Distanza Proxima Centauri	$4.0 \cdot 10^{16}\text{m}$
Distanza Terra-Sole	$1.5 \cdot 10^{11}\text{m}$
Diametro Terra	$6.4 \cdot 10^6\text{m}$
Lunghezza di una radio-onda (AM)	$\sim 3 \cdot 10^2\text{m}$
Lunghezza d' onda della luce	$\sim 5 \cdot 10^{-7}\text{m}$
Diametro di un virus piccolo	$\sim 2 \cdot 10^{-8}\text{m}$
Diametro di un atomo	$\sim 1 \cdot 10^{-10}\text{m}$
Diametro di un nucleo di ferro	$8 \cdot 10^{-15}\text{m}$
Diametro del protone	$2 \cdot 10^{-15}\text{m}$

MASSE:

Universo osservabile	10^{55}Kg
Galassia	$4 \cdot 10^{41}\text{Kg}$
Sole	$2 \cdot 10^{30}\text{Kg}$
Terra	$6 \cdot 10^{24}\text{Kg}$
Automobile	$\sim 1.5 \cdot 10^3\text{Kg}$
Goccia di pioggia	$2 \cdot 10^{-6}\text{Kg}$
Virus più piccolo	$4 \cdot 10^{-21}\text{Kg}$
Atomo di ferro	$9.5 \cdot 10^{-26}\text{Kg}$
Protone	$1.7 \cdot 10^{-27}\text{Kg}$
Elettrone	$9.1 \cdot 10^{-31}\text{Kg}$

Sistemi di unità di misura

IL SISTEMA INTERNAZIONALE (completo)

Grandezza fisica	Unità di misura	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	Kg
tempo	secondo	s
Corrente	ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Intensità luminosa	candela	Cd
Quantità di sostanza	mole	mol

prefisso	abbr.	fattore	prefisso	abbr.	fattore
deca	da	10^1	deci	d	10^{-1}
etto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	K	10^3	milli	m	10^{-3}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}

Cambiamento dell' unità di misura

Data un grandezza q con misura $\{q\}$, dimensione Q ed unità di misura $[Q]$, per convertirla in una nuova unità di misura $[Q]^*$ si scrive:

$$q = \{q\}[Q] = \{q\}^*[Q]^* \quad \text{da cui:}$$

$$\{q\}^* = \{q\} \frac{[Q]}{[Q]^*} = \{q\} c$$

C =rapporto tra due unità con la stessa dimensione.

$$\text{esempio: } A = 7 \text{ ft}^2 \cdot \frac{144 \text{ in}^2}{1 \text{ ft}^2} = 1008 \text{ in}^2$$

N.B.

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

In pratica è esattamente come moltiplicare per una quantità unitaria che “cancelli” la vecchia unità:

Cambiamento di unità di misura

Esempio:

L' acqua ha densità : $\rho = 1.00 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$. La si esprima in grammi al centimetro cubo:

$$\begin{aligned} 1.00 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} &= 1.00 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{(10^2 \text{ cm})^3} = 1.00 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} \\ &= 1.00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

E analogamente:

$$\begin{aligned} 1.00 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} &= 1.00 \cdot 10^3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{0.454}\right) \text{ lb}}{\left[\left(\frac{1}{0.305}\right) \text{ ft}\right]^3} = 1.00 \cdot 10^3 \cdot \frac{(0.305)^3 \text{ lb}}{0.454 \text{ ft}^3} \\ &= 62.5 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} \end{aligned}$$

Oppure si moltiplica per “**rapporti unitari**”:

$$\begin{aligned} 1.00 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} &= 1.00 \cdot 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ Kg}} \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}}\right)^3 = \\ 1.00 \cdot 10^3 \cdot \frac{10^3}{10^6} \cdot \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{g}}{\text{Kg}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{cm}^3}\right) &= 1.00 \cdot \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Le grandezze fisiche sono in generale: **variabili**

Le relazioni tra grandezze fisiche (**le variabili**) sono stabilite da **funzioni** :

- ✓ **Univoche**: se ad ogni x corrisponde un y
- ✓ **Biunivoche**: se sono univoche e ad ogni y corrisponde un solo x (ad un sol valore)

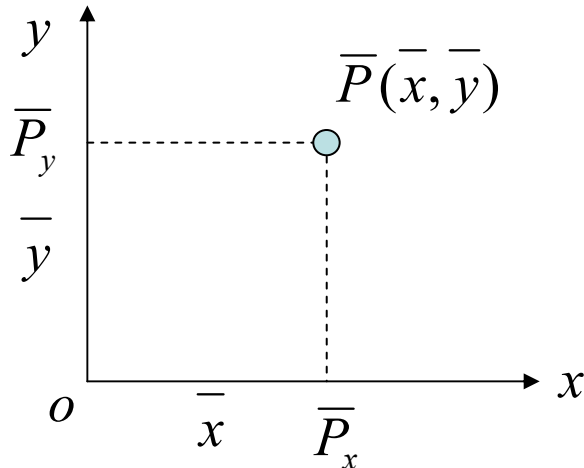
Le funzioni si rappresentano mediante:

➤ **tabelle:**

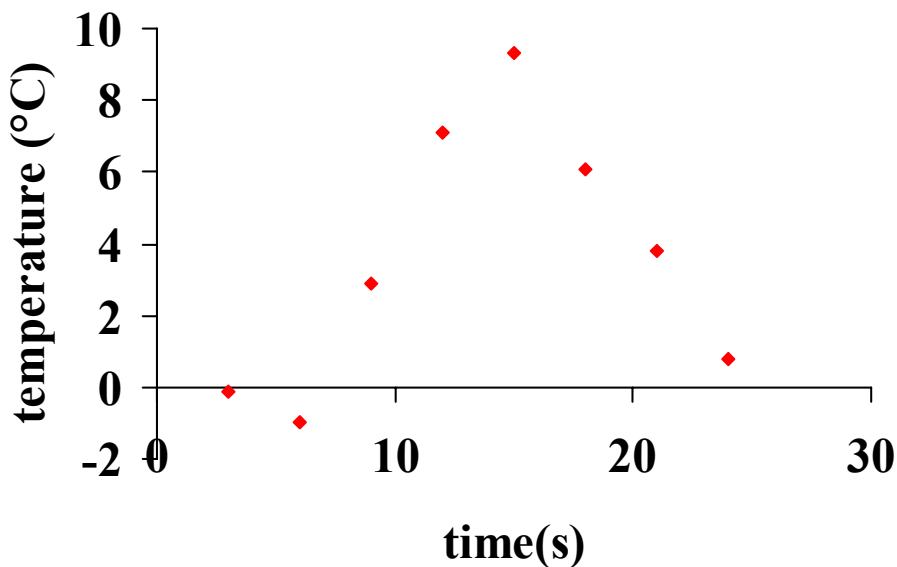
Tempo (data e ora)	temperatura
1/1 3:00	-0,1 °C
1/1 6:00	-1,0 °C
1/1 9:00	+2,9 °C
1/1 12:00	+7,1 °C
1/1 15:00	+9,3 °C
1/1 18:00	+6,1 °C
1/1 21:00	+3,8 °C
1/1 14:00	+0,8 °C

➤ grafici:

- si definisce un sistema di assi coordinati
- si definisce un origine ed un orientamento
- si definisce una unità di misura per ogni asse

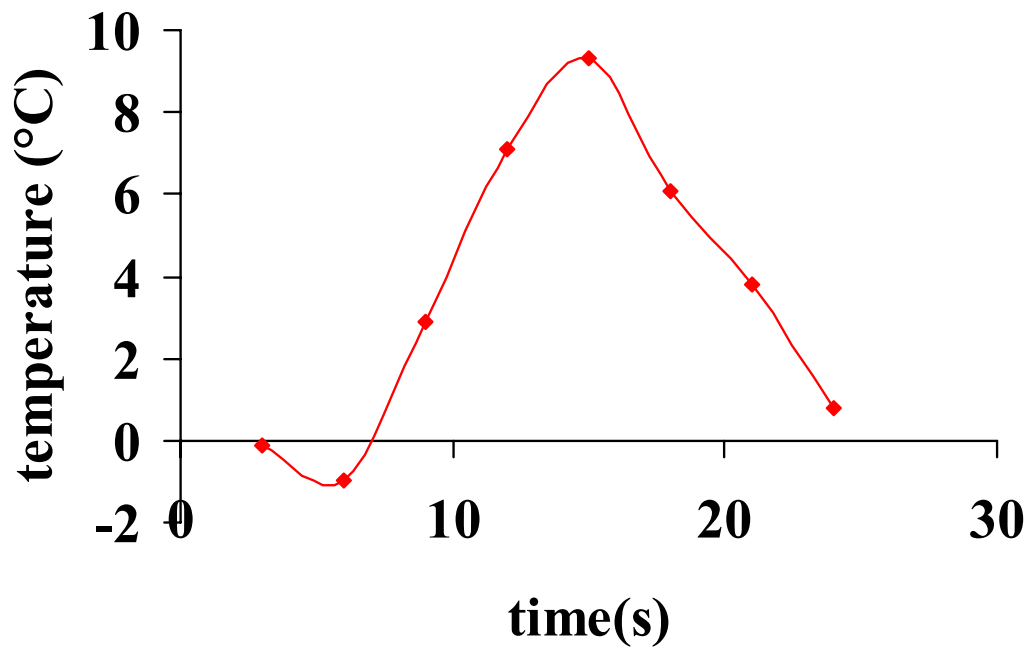


Dall' esempio di prima:



Ma non si hanno informazioni nei
“**punti intermedi**”

Si ricorre alla “**interpolazione dei dati**”



La curva interpolante si sceglie in base a:

- criteri fisici
- criteri statistici

Classificazione delle grandezze fisiche

SCALARI:

identificate da numero e unità di misura

VETTORIALI:

identificate da:

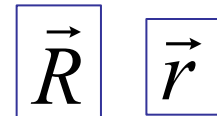
- numero (**modulo**) e u.d.m.
- direzione
- verso
- punto di applicazione? (eventualmente)

Simboli usati:

• vettore: $\vec{V}$ V

• modulo del vettore: $|\vec{V}|$, V

VETTORE TIPICO: spostamento



Da cui deriva la definizione:

ogni grandezza caratterizzata da modulo,
direzione e verso è un vettore se gode delle
stesse proprietà del vettore spostamento (che vedremo poi)

Rappresentazione:

mediante segmenti orientati la cui lunghezza,
secondo una certa unità, è proporzionale al
modulo e la cui direzione è la direzione del
vettore.

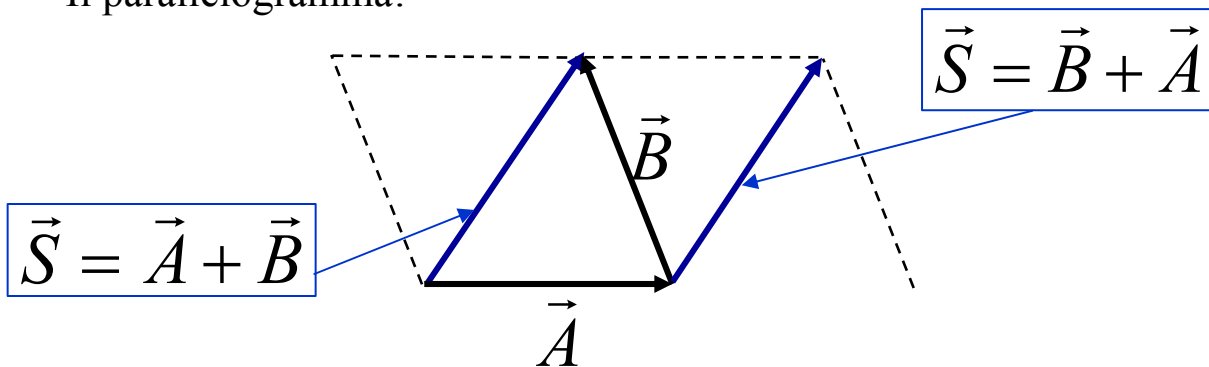
PROPRIETÀ DEI VETTORI

1) SOMMA

- regola del parallelogramma (**golden rule!**)
- commutatività
- associatività
- elemento neutro

Non è indispensabile costruire
Il parallelogramma!

ETTORE NULLO
che modulo e direzione ha?



$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{C}$$

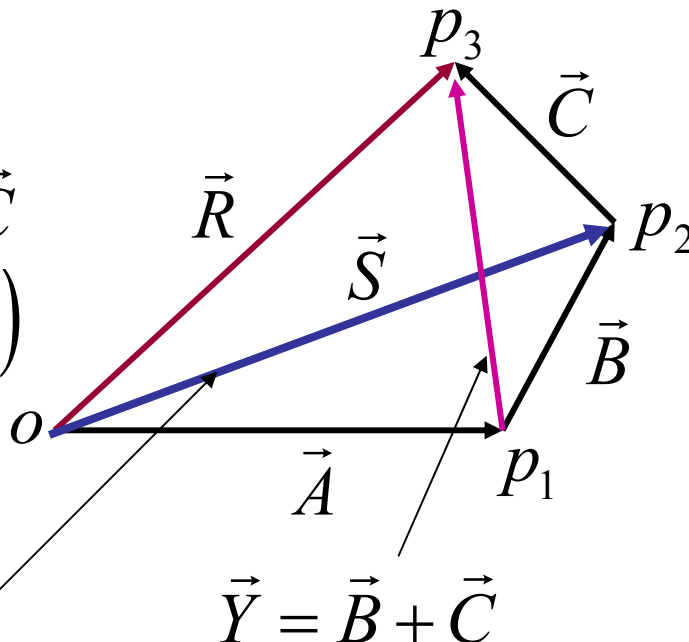
$$= (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

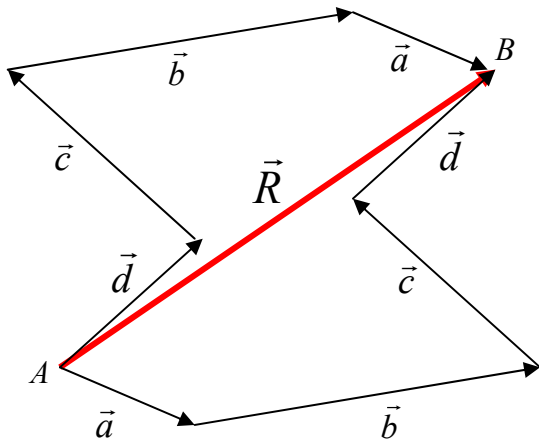
$$= \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

$$= \vec{A} + \vec{Y}$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{Y} = \vec{B} + \vec{C}$$

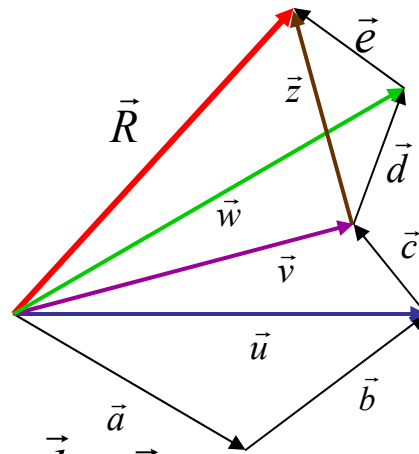




Proprietà commutativa

Proprietà associativa:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$



$$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{u} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

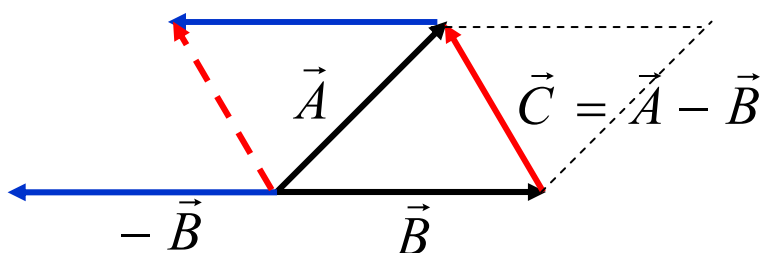
$$\vec{R} = (\vec{u} + \vec{c}) + \vec{d} + \vec{e} = \vec{v} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{v} + (\vec{d} + \vec{e}) = \vec{v} + \vec{z} \dots\dots$$

dati 3 vettori tali che: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ si ha che: $C \leq A + B$

2) DIFFERENZA

dati 2 vettori: $\vec{A}, \vec{B}$ la loro differenza è un vettore: $\vec{C}$ tale che:

$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{B}$$



...e $(\vec{B} - \vec{A})$ quanto vale?

Nella differenza ci aiuta il prodotto.....

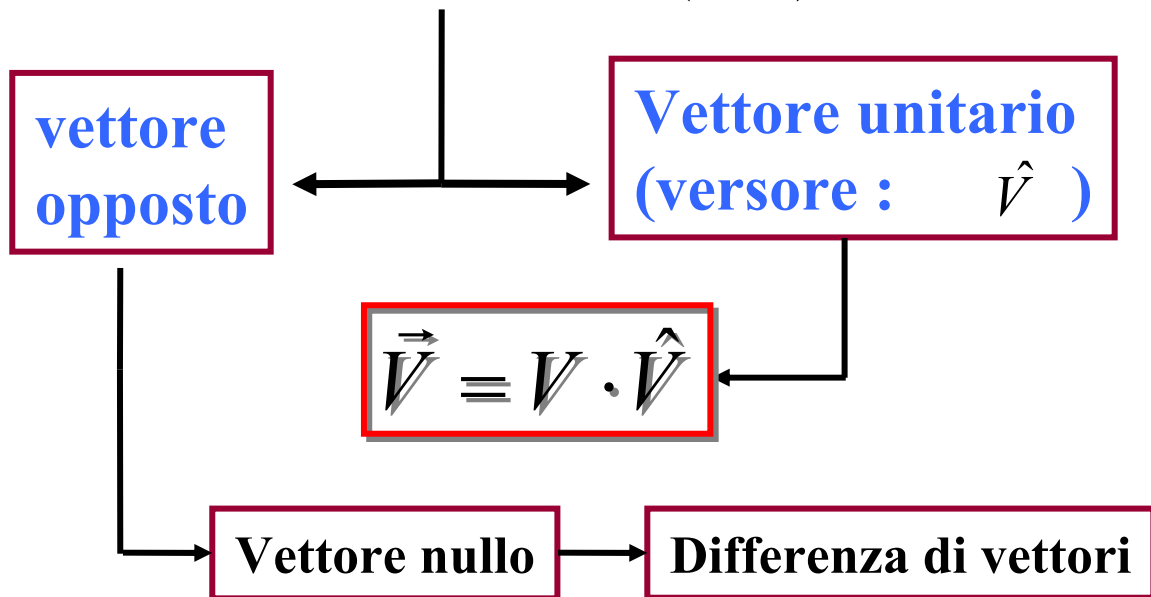
2) **PRODOTTO:**

A) Per uno scalare $m \cdot \vec{V} = \vec{V}'$ **È un vettore!!!!**

- ha la stessa direzione
- ha lo stesso verso (se $m > 0$)
- ha modulo: $m|\vec{V}|$

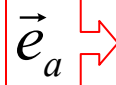
Proprietà:

- distributiva $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$
- elemento neutro $(b + c)\vec{A} = b\vec{A} + c\vec{A}$



N.B.

Segue dalla definizione di moltiplicazione di vettore per uno scalare che ogni vettore può essere rappresentato come:

$\vec{a} = a \vec{e}_a$  Vettore unitario (**versore**) con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{a}$ se $a > 0$

In generale: $\vec{e}_a$ si indica : $\hat{e}_a$

$$\hat{e}_a = \frac{\vec{a}}{a}$$

E tutti i versori sono ovviamente adimensionali!!

I versori sono relazionabili non solo con i vettori ma con qualsiasi direzione o curva nello spazio:

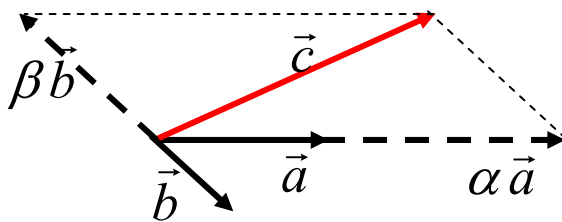
$\hat{e}_x$ Versore dell' asse coordinato x

$\hat{e}_n$ Versore della normale ad una curva

$\hat{e}_t$ Versore della tangente ad una curva

Importanti relazioni lineari vettoriali

- siano dati tre vettori complanari e non collineari, uno qualunque può essere espresso come combinazione lineare degli altri due:



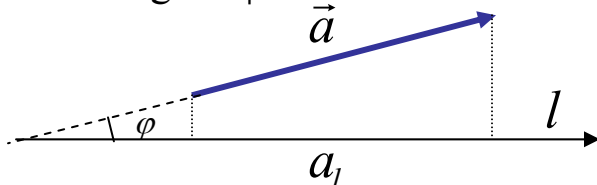
$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

α, β : scalari che determinano univocamente il vettore

- per estensione**: siano dati tre vettori ognuno dei quali non complanare con altri due, ogni altro vettore è tale che:

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

- data una direzione l nello spazio ed un vettore $\vec{a}$ che forma un angolo φ con essa:



$$a_l = |\vec{a}| \cos \varphi$$

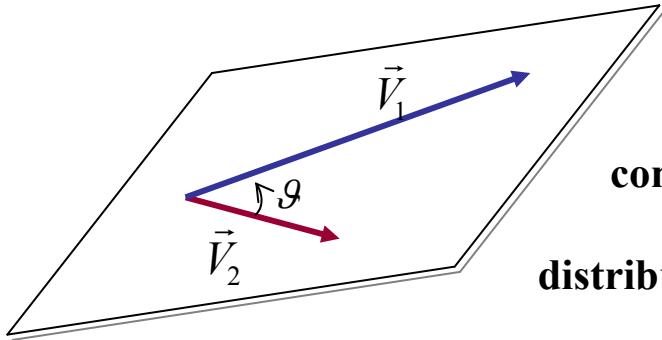
Proiezione del vettore lungo la direzione l

$$\vec{a} = \sum_{i=1,n} \vec{a}_i \Rightarrow a_l = \sum_{i=1,n} a_{l_i}$$

B) Scalare

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 V_2 \cos \vartheta$$

È uno scalare!!!!



Proprietà:

commutativa $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

distributiva $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

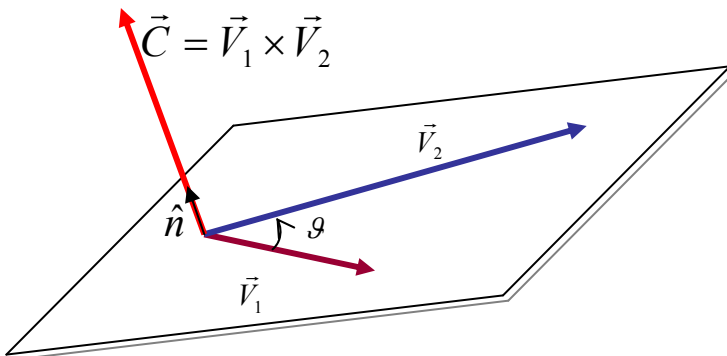
1. condizione di ortogonalità: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
2. modulo di un vettore:

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \Rightarrow \text{modulo di } \vec{A} \text{ al quadrato}$$

C) vettoriale

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

È un vettore!!!



$$C \equiv V_1 V_2 \sin \vartheta$$
$$\vec{C} \equiv (V_1 V_2 \sin \vartheta) \hat{n}$$

- direzione ortogonale al piano di $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$
- verso della vite destrorsa

Proprietà:

- è anticommutativo

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

- condizione di parallelismo

$$\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$$

- la moltiplicazione per uno scalare

$$c(\vec{A} \wedge \vec{B}) = c\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge c\vec{B}$$

- proprietà distributiva:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

D)
Misto

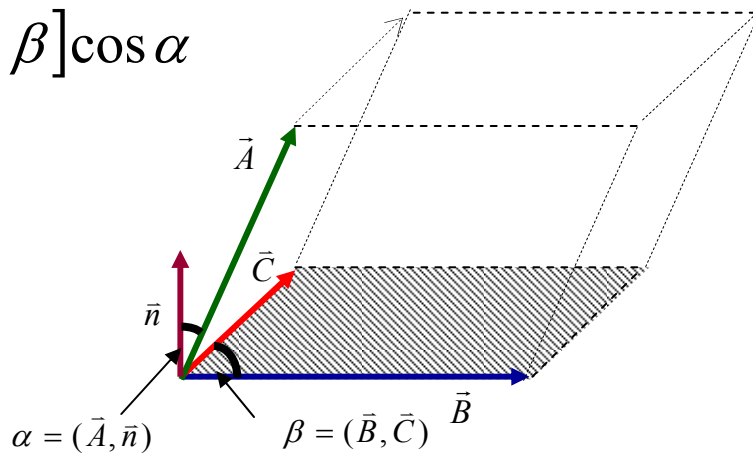
$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$$

è un vettore o uno scalare??

$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C}$ Cosa rappresenta?

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = A[BC \sin(\vec{B}, \vec{C})] \cos(\vec{A}, \vec{n})$$

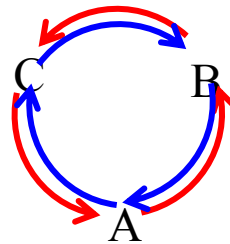
$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = A[BC \sin \beta] \cos \alpha$$



In particolare:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \wedge \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \wedge \vec{B}$$

Il prodotto vettoriale non cambia per trasformazione ciclica dei suoi fattori:



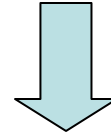
rotazioni positive: è numericamente uguale al volume

rotazioni negative: è uguale al volume cambiato di segno

VETTORI

QUALCHE ALTRA PROPRIETA'

1) $\vec{A} \cdot \vec{X} = b$ $\vec{X}$ non è definito..univocamente



La divisione per un vettore è un'operazione
non definita

2) $(\vec{A} - \vec{B}) = \vec{C}$

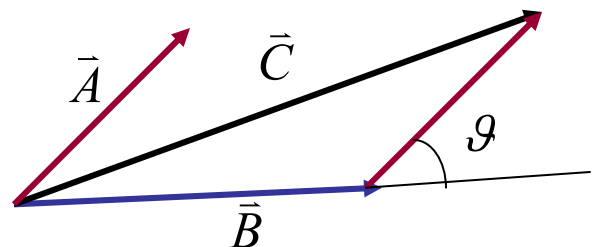
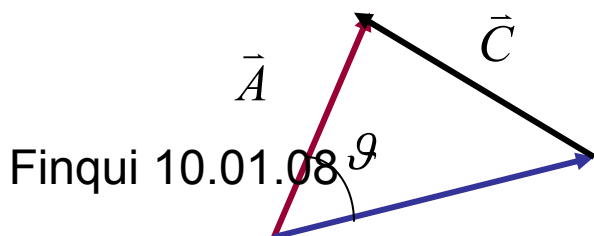
$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{C} \cdot \vec{C}$$

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) = C^2$$

ed analogamente se:

$$(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C}$$

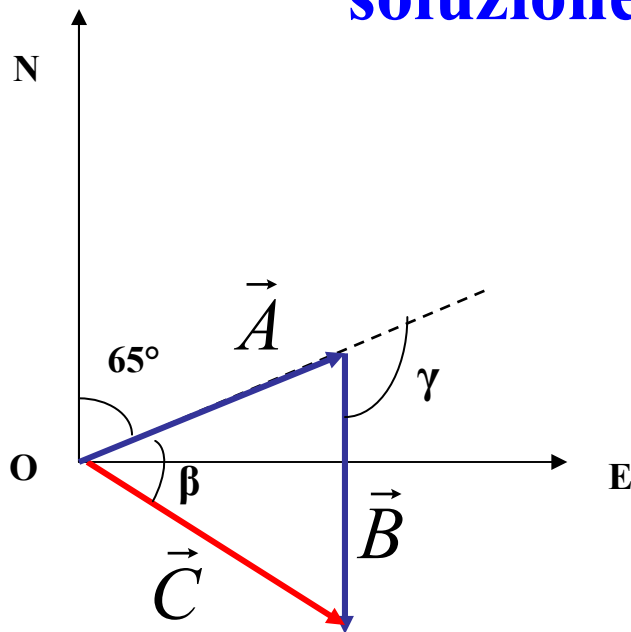
$$A^2 + B^2 + 2AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) = C^2$$



Problema 0

Una nave si muove per 2.89 miglia in direzione 65° N e successivamente per 1.83 miglia in direzione S. Trovare lo spostamento totale effettuato dalla nave.

soluzione:



per il teorema di Carnot:

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \gamma$$

$$C = (8.35 + 3.35 - 4.45)^{1/2} = 2.69 \text{ miglia}$$

per il teorema dei seni:

$$\sin \beta / B = \sin \gamma / C \quad \beta = 38.1^\circ$$

$$\begin{aligned} |\vec{C}| &= 2.69 \text{ miglia} \\ \beta &= 38.1^\circ \end{aligned}$$

CINEMATICA

STUDIA IL MOTO DEGLI OGGETTI
INDIPENDENTEMENTE DALLE CAUSE
CHE LO PRODUCONO

Definisce alcuni concetti fondamentali:

1) EVENTO

- fenomeno che accade in un certo punto dello spazio ed in un certo istante di tempo;
- spazio e tempo caratterizzano un evento.

2) PUNTO MATERIALE

- sistema fisico che concorre alla realizzazione di un evento e le cui dimensioni sono piccole rispetto alle altre in gioco; oppure sono piccole rispetto alla precisione con cui se ne conosce la posizione.
- è un concetto relativo.

La cinematica si occupa del moto dei sistemi descrivendone la configurazione (posizione) al passare del tempo. Dobbiamo definire operativamente il concetto di: **posizione**



SISTEMI DI RIFERIMENTO

Perchè la posizione di un punto materiale ha senso solo se definita rispetto alla posizione di altri corpi presi come riferimento

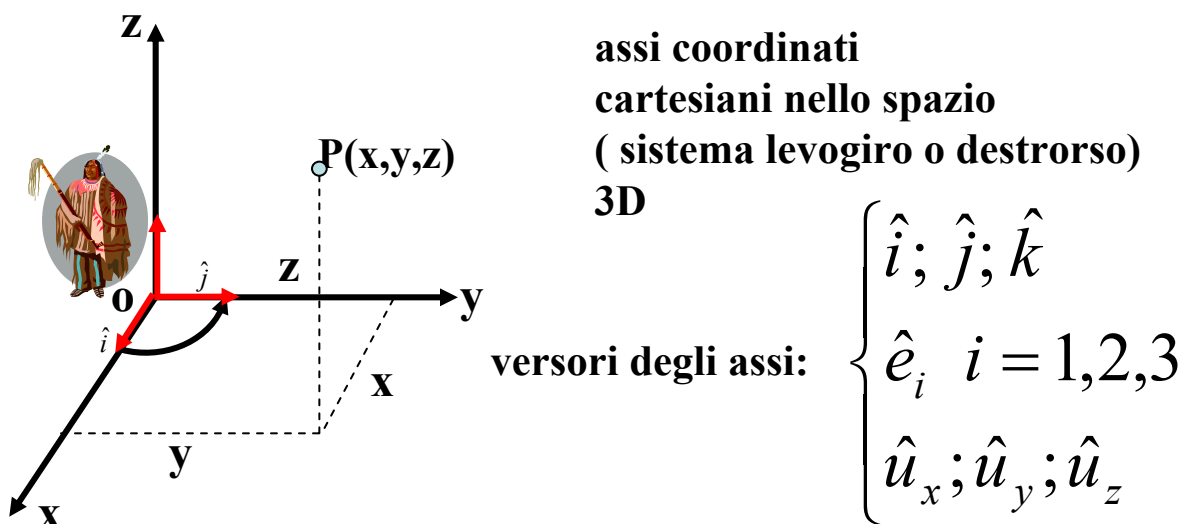
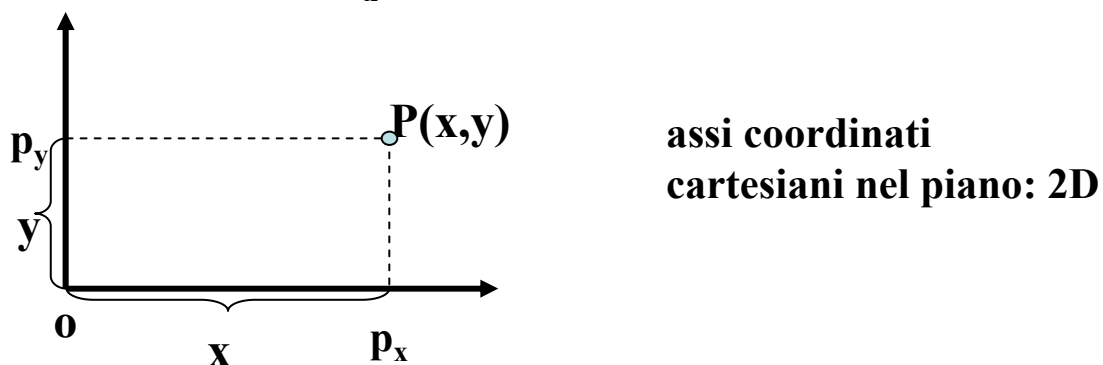
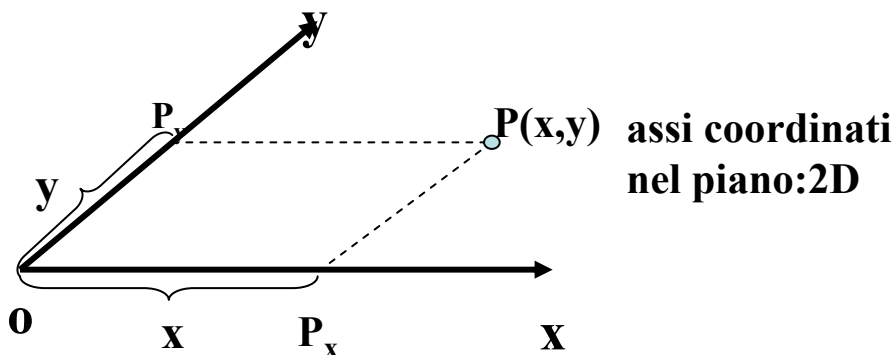
Si assume che lo spazio sia:

- tridimensionale
- euclideo
- omogeneo
- isotropo

Si assume che il tempo sia :

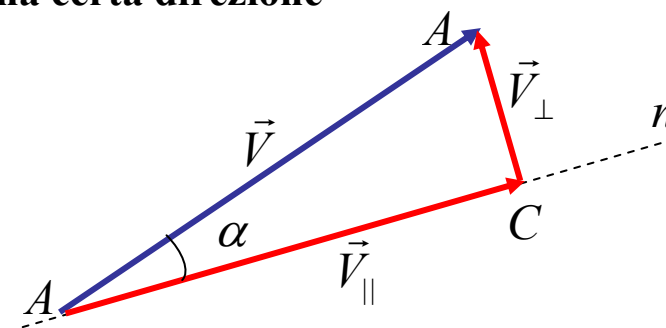
- assoluto

Come si rappresenta lo spazio?



Componenti di un vettore in una certa direzione

$$\vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$$



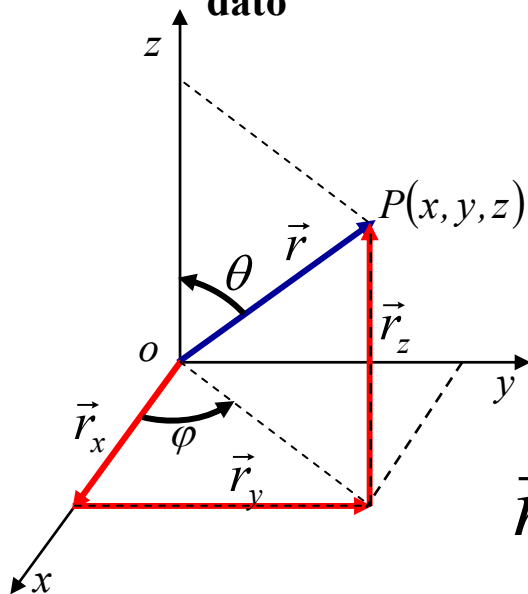
Gradi di libertà: numero di parametri indipendenti necessari per definire la posizione di un sistema fisico.

Punto materiale libero nello spazio : **3 gradi di libertà**

Punto materiale libero nel piano: **2 gradi di libertà**

Ma non coincidono con le dimensioni dello spazio!!!

1. sistema di N punti materiali liberi nello spazio
2. sbarra rigida di lunghezza l libera nello spazio
3. sistema rigido mobile nello spazio
4. punto in moto su una circonferenza di raggio dato



$$\vec{r} = \underbrace{\vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z}_{\text{Vettori componenti}}$$

Vettori componenti

$$\vec{r} = \boxed{r_x} \hat{i} + \boxed{r_y} \hat{j} + \boxed{r_z} \hat{k}$$

Componenti cartesiane del vettore

$$r_x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$r_y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$r_z = r \cos \theta$$

Componenti del vettore
In coordinate polari

Rappresentazione cartesiana dei vettori

COSENI DIRETTORI

Ogni vettore puo'essere espresso mediante le sue componenti cartesiane:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{A} = \hat{i}(\vec{A} \cdot \hat{i}) + \hat{j}(\vec{A} \cdot \hat{j}) + \hat{k}(\vec{A} \cdot \hat{k})$$

Consideriamo il caso di un vettore unitario:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{i}(\hat{A} \cdot \hat{i}) + \hat{j}(\hat{A} \cdot \hat{j}) + \hat{k}(\hat{A} \cdot \hat{k}) \\ \hat{A} &= \hat{i} \cos(\hat{A}, \hat{i}) + \hat{j} \cos(\hat{A}, \hat{j}) + \hat{k} \cos(\hat{A}, \hat{k}) \\ \hat{A} &= \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma\end{aligned}$$

Coseni direttori

Se calcoliamo il modulo:

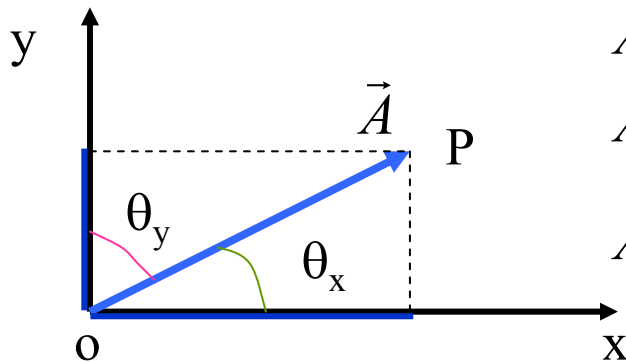
$$1 = \cos^2(\hat{A}, \hat{i}) + \cos^2(\hat{A}, \hat{j}) + \cos^2(\hat{A}, \hat{k})$$

La somma dei quadrati dei coseni direttori di una retta (vettore) vale 1.

Dato un sistema di coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ \vec{A} &= (A_x, A_y, A_z)\end{aligned}$$

In due dimensioni:



$$A_x = A \cos \theta_x$$

$$A_y = A \cos \theta_y = A \sin \theta_x$$

$$A = (A_x^2 + A_y^2)^{1/2}$$

In tre dimensioni:

$$A_x = A \cos \theta_x, A_y = A \cos \theta_y, A_z = A \cos \theta_z$$

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

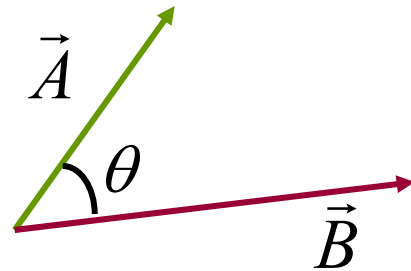
In particolare per i “versori degli assi”:

$$\hat{i} = (1, 0, 0) \quad \hat{j} = (0, 1, 0) \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Prodotto scalare

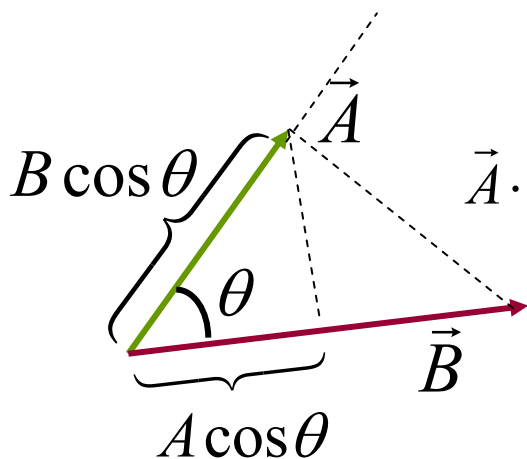
E' uno **scalare** !

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = AB \cos \theta$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cdot \cos 0 = A^2$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot (B \cdot \cos \theta) = (A \cos \theta) B = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B_A = B \cdot A_B$$

In termini di versori:

$$\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \forall i = j \\ 0 \forall i \neq j \end{cases}$$

$$\hat{i} \cdot \vec{A} = A_x$$

$$i, j = 1, 2, 3 = x, y, z$$

Notiamo che, se ruotiamo il sistema di coordinate, cambiano le componenti cartesiane dei vettori (per ora è intuitivo!) ma non cambia la quantità (prodotto scalare):

$$AB \cos \alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + \cancel{A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j}} + \cancel{A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k}} \\ & \cancel{A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i}} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + \cancel{A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k}} \\ & \cancel{A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i}} + \cancel{A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j}} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

che per questo viene detta: **Invariante Scalare**

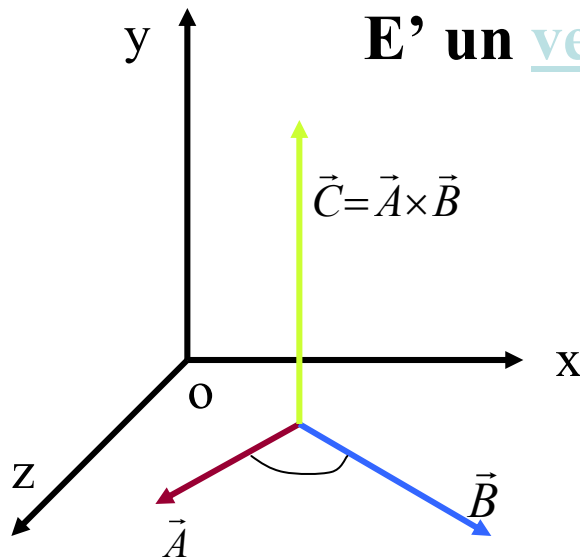
La condizione di ortogonalità è implicita in:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

In generale:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

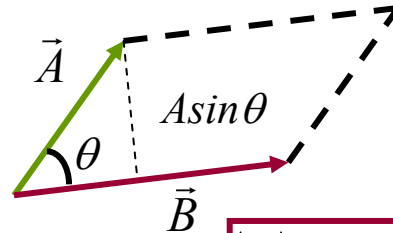
Prodotto Vettoriale



E' un vettore !

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \vec{n}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{A} ?$$



$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= \text{base} \\ |\vec{A}| \sin \theta &= \text{altezza} \end{aligned}$$

In termini di versori:

$$\hat{x}_i \times \hat{x}_j = \begin{cases} x_k \forall i \neq j \text{ e perm. pari} \\ -x_k \forall i \neq j \text{ e perm. dispari} \\ 0 \forall i = j \end{cases}$$

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

N.B.

Nel determinare la direzione del prodotto vettoriale abbiamo fatto riferimento alla direzione di rotazione dal primo al secondo vettore. Per il vettore spostamento no. L'orientazione è data dalla natura stessa del vettore: **polare o vero**. Nel primo caso parliamo di vettori **assiali o pseudovettori** che cambiano di segno passando da sistemi destrorsi a sistemi sinistrorsi contrariamente ai polari che rimangono invariati.

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \wedge (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} = & \cancel{A_x B_x \hat{i} \wedge \hat{i}} + \cancel{A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j}} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} \\ & A_y B_x \hat{j} \wedge \hat{i} + \cancel{A_y B_y \hat{j} \wedge \hat{j}} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} \\ & A_z B_x \hat{k} \wedge \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \wedge \hat{j} + \cancel{A_z B_z \hat{k} \wedge \hat{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} = & A_x B_y \hat{i} \wedge \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \wedge \hat{k} \\ & - A_y B_x \hat{i} \wedge \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \wedge \hat{k} \\ & - A_z B_x \hat{i} \wedge \hat{k} - A_z B_y \hat{j} \wedge \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_x B_y \hat{k} + A_x B_z \hat{j} - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} - A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_z B_y - A_y B_z \end{pmatrix} \hat{i} + \begin{pmatrix} A_x B_z - A_z B_x \end{pmatrix} \hat{j} + \begin{pmatrix} A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

è cond. di parallelismo:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$$

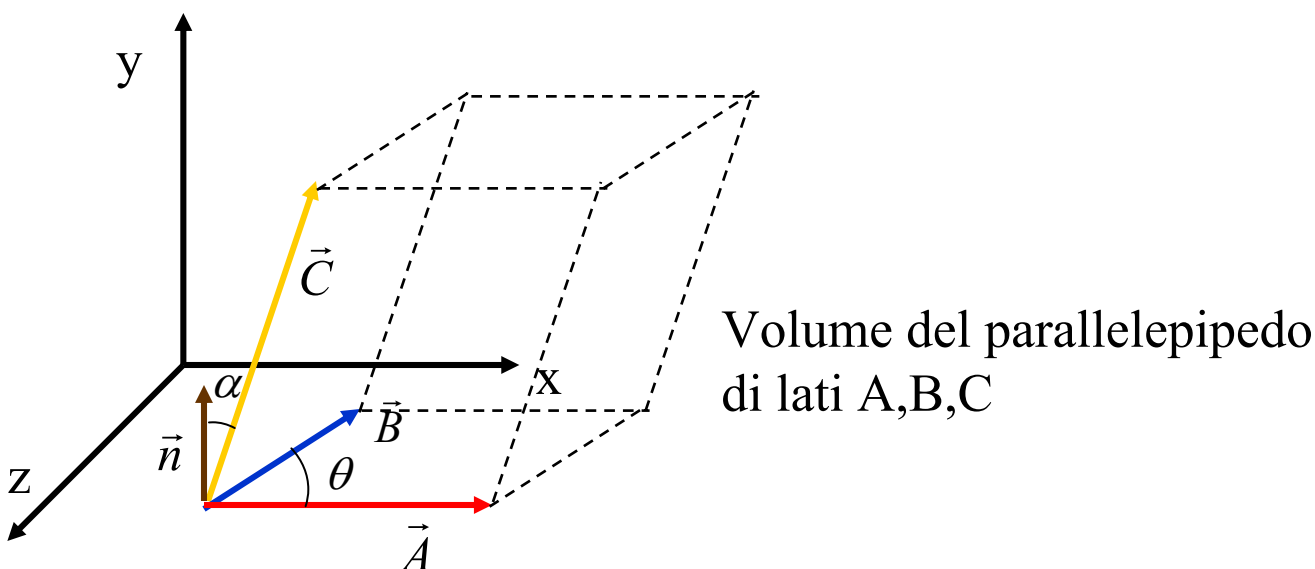
In generale:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A}$$

Prodotto misto

E' uno **scalare** (triplo prodotto scalare):

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = C[AB \sin \theta] \cos \alpha$$



Proprietà:

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$$

$$V = -\vec{B} \times \vec{A} \cdot \vec{C} = -\vec{A} \times \vec{C} \cdot \vec{B}$$

$$V = -\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}$$

In termini di componenti:

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Triplo prodotto vettoriale

E' un vettore:

$$\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$


In quale piano giace il vettore $\vec{D}$?

Nel piano dei vettori $\vec{B}$ e $\vec{C}$

Possiamo quindi scrivere: $\vec{D} = \alpha \vec{B} + \beta \vec{C}$

E si può dimostrare (ma non lo facciamo) che:

$$\vec{D} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

Dove valgono le seguenti relazioni:

$$\alpha = (\vec{A} \cdot \vec{C})$$
$$\beta = -(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Derivata di un vettore

Sia dato un vettore dipendente dal tempo: $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$$

e supponiamo che il sistema di riferimento **non ruoti**. In un intervallo di tempo Δt il vettore subisce un incremento $\Delta \vec{a}$

$$\Delta \vec{a}(t) = \Delta a_x(t)\hat{i} + \Delta a_y(t)\hat{j} + \Delta a_z(t)\hat{k}$$

Che cosa significa?

- Qual'è la **velocità di variazione** del vettore nel tempo?
- Cosa implica che il sistema di riferimento non ruota?

$$\frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_x(t)}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_y(t)}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta a_z(t)}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{da_y(t)}{dt} \hat{j} + \frac{da_z(t)}{dt} \hat{k}$$

La seguente notazione è molto usata:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}; \frac{d^3\varphi}{dt^3} = \dddot{\varphi}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}}; \frac{d^2\vec{a}}{dt^2} = \ddot{\vec{a}}; \frac{d^3\vec{a}}{dt^3} = \dddot{\vec{a}}$$

Ad esempio, nel caso del vettore posizione:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

Valgono tutte le regole delle derivate

alcuni esempi interessanti:

$$1) \vec{b}(t) = \varphi(t)\vec{a}(t)$$

$$\frac{d\vec{b}(t)}{dt} = \varphi(t)\frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{\varphi(t)}{dt}\vec{a}(t) = \varphi(t)\dot{\vec{a}}(t) + \dot{\varphi}(t)\vec{a}(t)$$

$$2) c(t) = \vec{b}(t) \cdot \vec{a}(t)$$

$$\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = \vec{b}(t) \cdot \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{d\vec{b}(t)}{dt} \cdot \vec{a}(t) = \vec{b}(t) \cdot \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t) \cdot \vec{a}(t)$$

$$3) \vec{c}(t) = \vec{b}(t) \wedge \vec{a}(t)$$

$$\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = \vec{b}(t) \wedge \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{d\vec{b}(t)}{dt} \wedge \vec{a}(t) = \vec{b}(t) \wedge \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t) \wedge \vec{a}(t)$$

Dato che:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{a}} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} = \\ d(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot d\vec{b} + \vec{b} \cdot d\vec{a} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = \frac{d}{dt} (\vec{a})^2 = 2\vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$d(\vec{a})^2 = 2\vec{a} \cdot d\vec{a} \quad 2\vec{a} \cdot d\vec{a} = d(a^2) \Rightarrow \vec{a} \cdot d\vec{a} = d\left(\frac{a^2}{2}\right)$$

Ancora sulle grandezze vettoriali

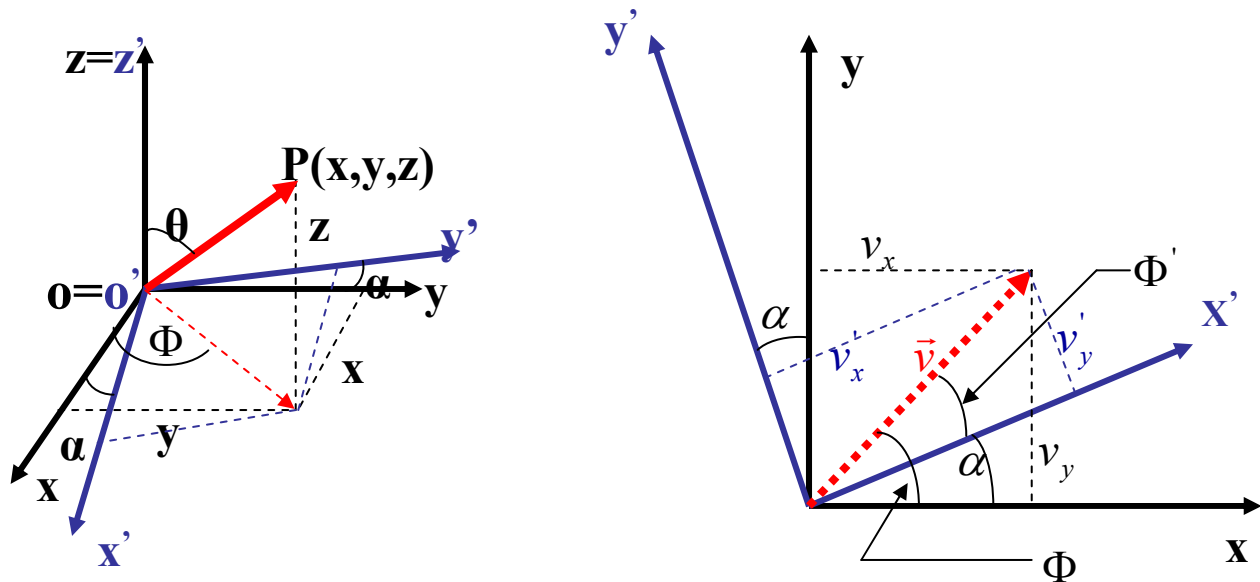
Avevamo detto:

e' vettoriale una grandezza con modulo, direzione e verso
e che si trasforma come il vettore posizione

Abbiamo visto: le proprietà matematiche

Ma ci son anche : le trasformazioni

Come cambiano le componenti (cartesiane) del vettore posizione (quindi di un vettore generico) se passiamo ad un nuovo sistema di riferimento (x',y',z') ruotato rispetto al primo? In due dimensioni...per iniziare



$$\begin{cases} v'_x = v \cos \Phi' \\ v'_y = v \sin \Phi' \end{cases} \quad \Phi' = \Phi - \alpha$$

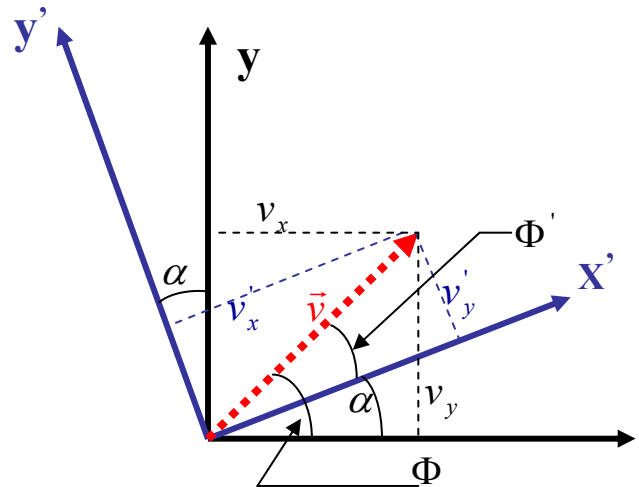
$$\begin{cases} v'_x = v \cos(\Phi - \alpha) \\ v'_y = v \sin(\Phi - \alpha) \end{cases}$$

da : $\cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha$
e : $\sin(\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha$

$$\begin{cases} v'_x = v(\cos \Phi \cos \alpha + \sin \Phi \sin \alpha) \\ v'_y = v(\sin \Phi \cos \alpha - \cos \Phi \sin \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x = v(\cos \Phi \cos \alpha + \sin \Phi \sin \alpha) \\ v'_y = v(\sin \Phi \cos \alpha - \cos \Phi \sin \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha \\ v'_y = -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha \end{cases}$$



Che in forma **matriciale**:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Cosa significa?

che in **generale** può essere scritta:

$$v'_i = \sum_{j=1,3} \alpha_{ij} v_j$$

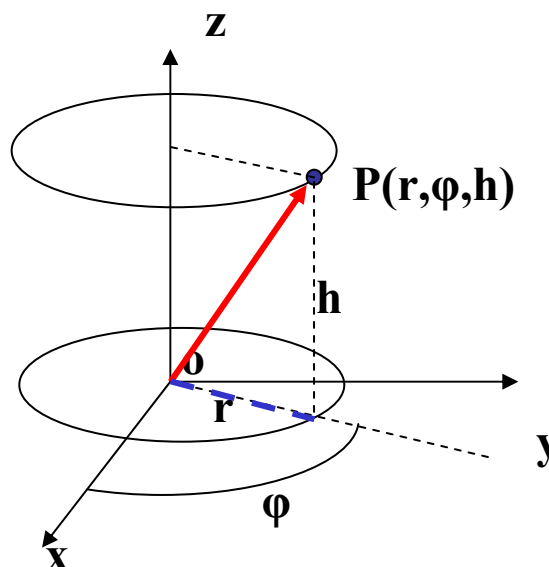
Tali regole di trasformazione valgono
per ogni altro vettore
e definiscono le proprietà vettoriali

Altri sistemi di coordinate

1. Cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}$$

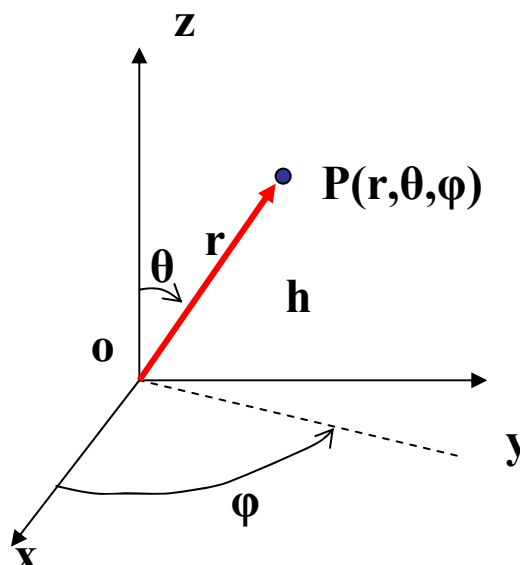
$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ -\infty &\leq h < \infty \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$



2. Polari Sferiche

$$\begin{cases} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq |r| < \infty \\ 0 &\leq \vartheta < \pi \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned}$$



LA LEGGE ORARIA DEL PUNTO MATERIALE

Il moto di un punto materiale è noto se è nota la sua posizione in funzione del tempo
cioè la sua:

legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

La legge oraria (vettoriale) è **sempre** equivalente a **tre equazioni scalari**

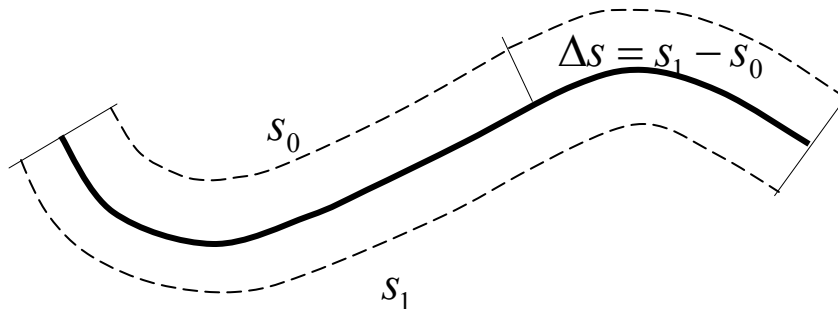
cerchiamo di analizzare il caso seguente:

$$\vec{r}(t) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = bt + c \\ z = 0 \end{cases}$$

cinematica in una dimensione

La notazione vettoriale è superflua

velocità intensiva media:



$$\frac{\text{spazio totale percorso}}{\text{tempo impiegato}} \geq 0 ! \quad \langle v_{\text{int.}} \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

dimensionalmente:

$$[v_{\text{int.}}] = [LT^{-1}]$$

unità e simboli:

$$\frac{\text{metro}}{\text{secondo}} \Rightarrow \frac{m}{s} \Rightarrow ms^{-1}$$

La velocità **intensiva** media:

1. è uno **scalare**
2. non è associata al concetto di direzione
3. è definita positiva

Esempio

La Terra si muove attorno al Sole descrivendo un' orbita circolare (?) di raggio $r=1.5 \cdot 10^8 \text{ Km}$. Quanto vale la velocità intensiva media della Terra (rispetto al Sole)?

$$\begin{aligned}
 T &= 1 \text{ anno} = 3.15 \cdot 10^7 \text{ s} & \langle v_{\text{int.}} \rangle &= \frac{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^8}{3.16 \cdot 10^7} = 29.9 \text{ Km s}^{-1} \\
 s &= 2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^8 \text{ Km} \\
 &= 2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m} & &= 29.8 \frac{\text{Km}}{\text{s}} \frac{3.6 \cdot 10^3 \text{ s}}{\text{h}} = 107.7 \cdot 10^3 \frac{\text{Km}}{\text{h}} \\
 \langle v_{\text{int.}} \rangle &= \frac{2\pi \cdot 1.5 \cdot 10^{11}}{3.16 \cdot 10^7} = 29.8 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Metri al secondo m/s	Chilometri all' ora Km/h
1	3.6
0.2778	1
0.4470	1.609

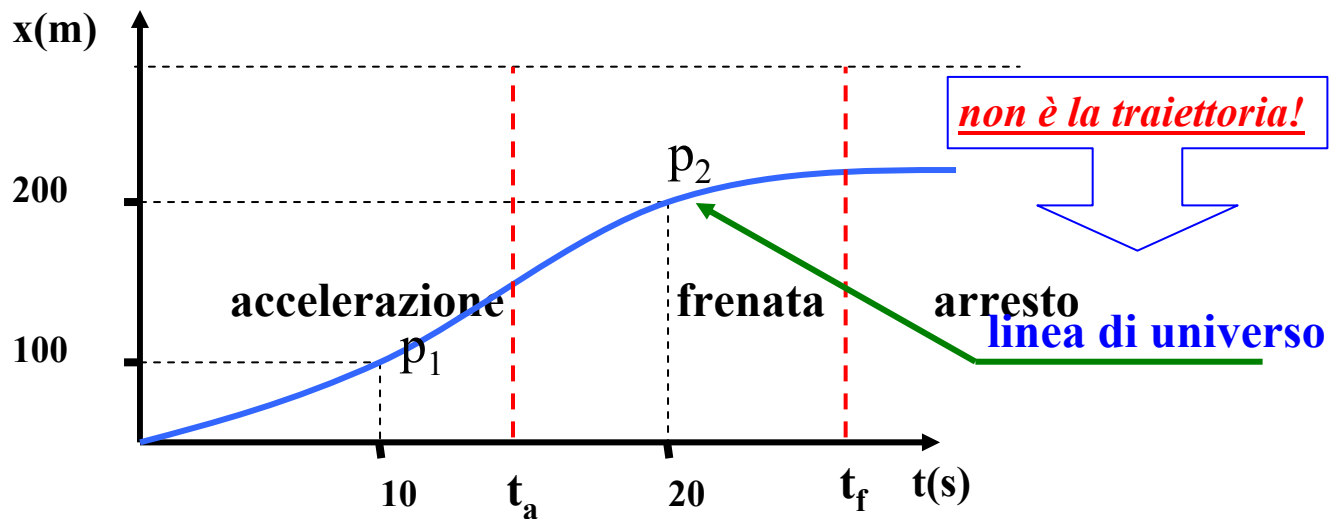
1 mi=5280 feet=63.36 10^3 in=1760yd=1609m

1NM=1M=6076.1155 feet=1.150774mi=2025.372yd=1852m

Alcune velocità:

Luce	$3.0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Recessione di una quasar	$2.7 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Elettrone attorno al nucleo	$2.2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$
Terra attorno al Sole	$3.0 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}$
Aereo supersonico	$7.1 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$
Rotazione della Terra(equatore)	$4.6 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$
Moto casuale delle molecole di aria	$4.5 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$
suono in aria	$3.3 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$
Ghepardo	28 ms^{-1}
Uomo (max)	11 ms^{-1}
chiocciola	10^{-3} ms^{-1}
ghiacciaio	10^{-6} ms^{-1}
Velocità di crescita dei capelli	$3 \cdot 10^{-9} \text{ ms}^{-1}$
Deriva dei continenti	10^{-9} ms^{-1}

Velocità media (in 1 dimensione!!):



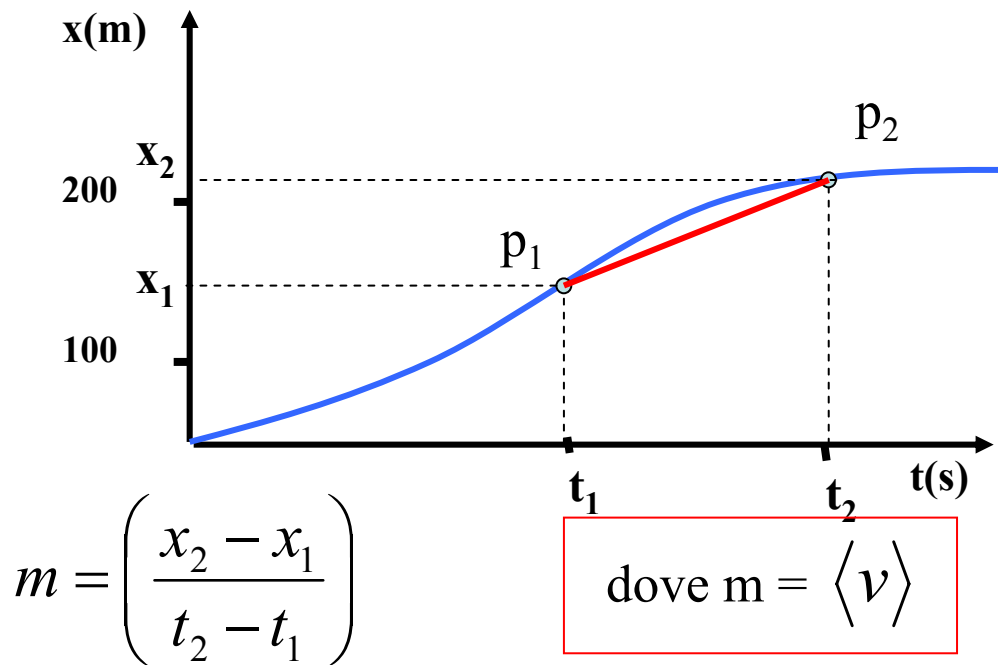
$$\langle v \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta x &= \text{Spostamento ossia} \\ &\quad \text{variazione di posizione} \\ \Delta t &= \text{Intervallo di tempo} \end{aligned}$$

Dimensionalmente: $[v] = [LT^{-1}]$

Unità e simboli: $\frac{\text{metro}}{\text{sec ondo}} = \frac{m}{s} = m s^{-1}$

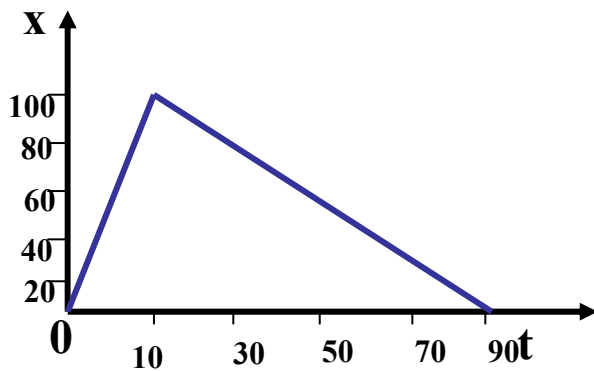
Cosa rappresenta

- **fisicamente:** il valore di velocità costante che mi permette di effettuare lo stesso spostamento nello stesso tempo
- **matematicamente:**→



Esempio 2

Un atleta corre i 100 m su una pista rettilinea in 11 s e poi ritorna camminando al punto di partenza in 80 s. Quanto valgono la velocità media e la velocità intensiva media nei primi 11 s, nei successivi 80 s e per tutto il percorso?

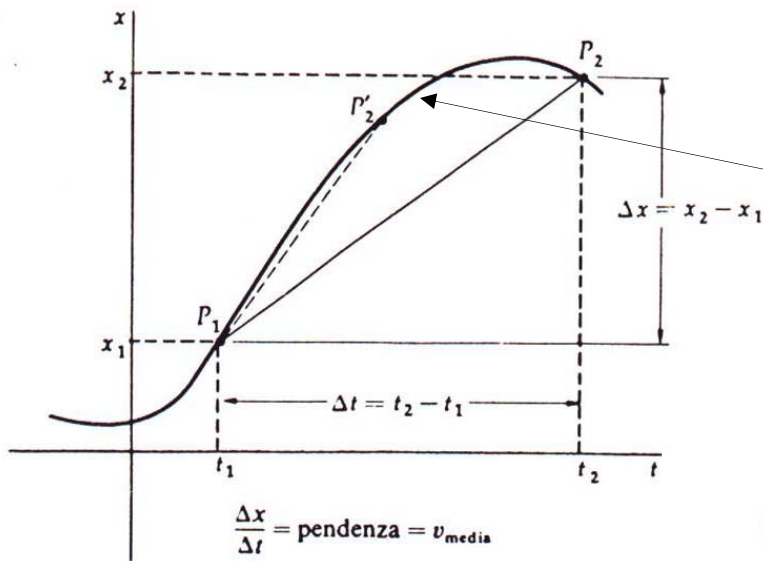


$$\begin{aligned} \langle v_{11} \rangle &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100}{11} = 9.1 \text{ ms}^{-1} \\ \langle v_{80} \rangle &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-100}{80} = -1.2 \text{ ms}^{-1} \\ \langle v_{90} \rangle &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{91} = 0 \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

Ma:

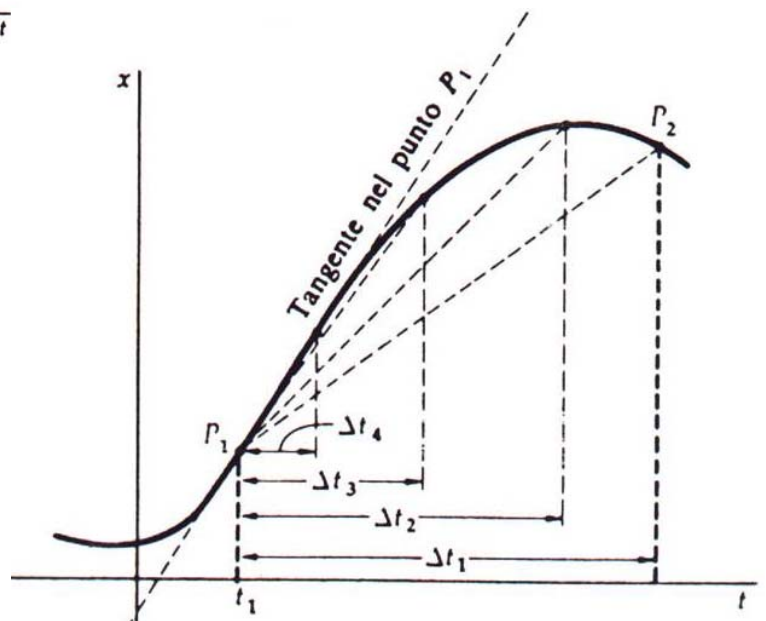
$$v_{in,11} = \frac{100}{11} = 9.1 \text{ ms}^{-1} \quad v_{in,80} = \frac{100}{80} = 1.2 \text{ ms}^{-1} \quad v_{in,tot} = \frac{200}{91} = 2.2 \text{ ms}^{-1}$$

Velocità istantanea (in 1 dimensione!!):



Linea universo del punto materiale

$$v(t = t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Dimensionalmente: $[v] = [LT^{-1}]$

Unità e simboli: $\frac{\text{metro}}{\text{sec ondo}} = \frac{m}{s} = m s^{-1}$

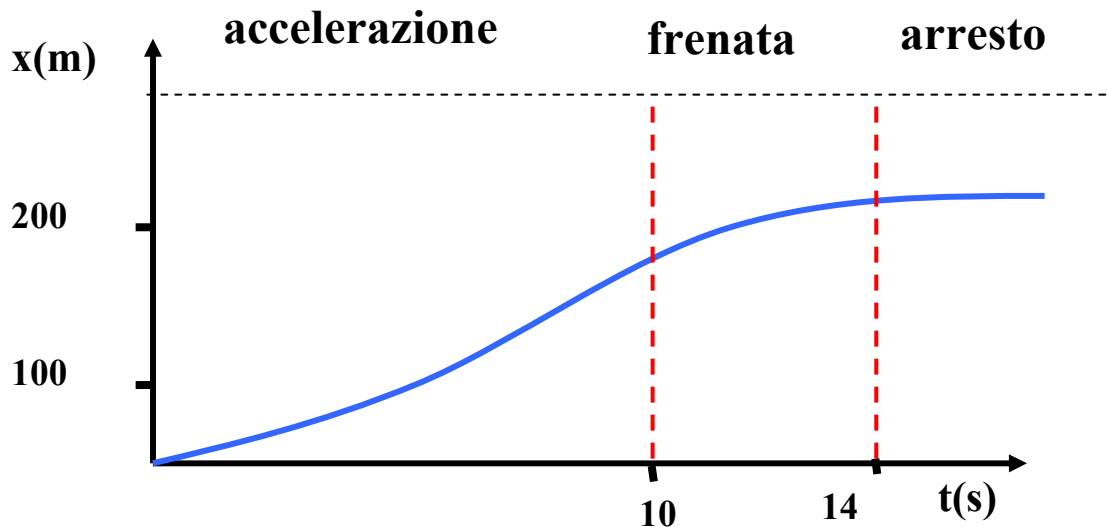
Quale è l'interpretazione geometrica della velocità scalare istantanea?

Valutazione analitica

un punto materiale si muove con legge oraria data da:

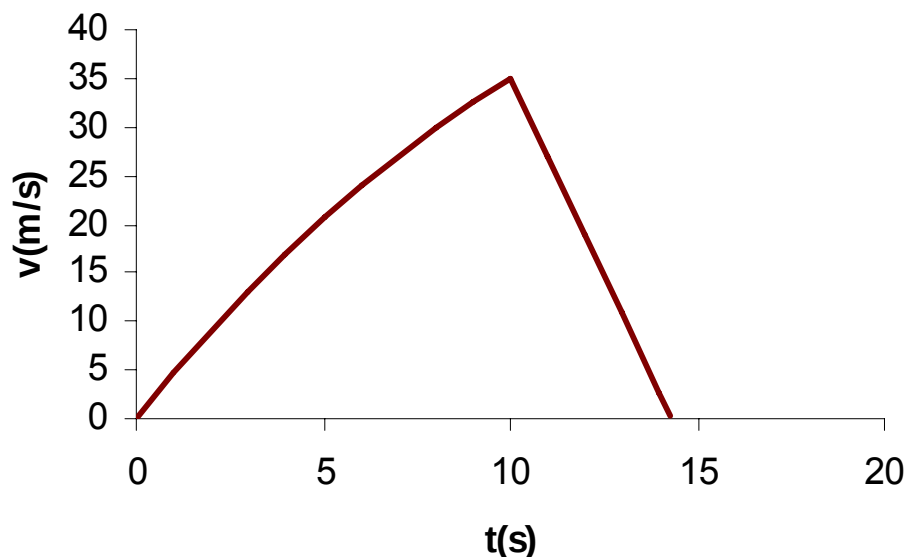
$$x = 2.376 \cdot t^2 - 0.042 \cdot t^3 \quad 0s \leq t \leq 10s$$

$$x = -555.8 + 115.4 \cdot t - 4.022 \cdot t^2 \quad 10s \leq t \leq 14.3s$$



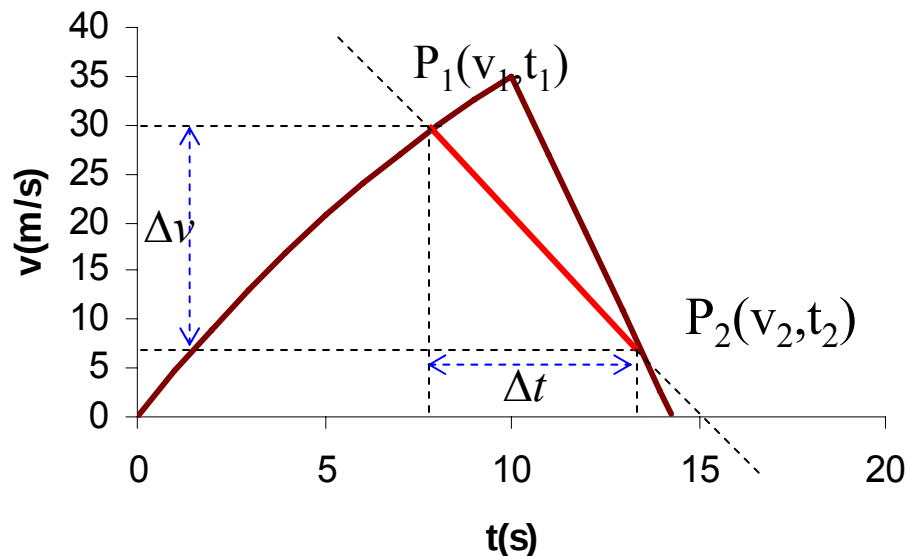
$$v = \frac{dx}{dt} = 4.752 \cdot t - 0.126 \cdot t^2 \quad 0s \leq t \leq 10s$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 115.4 - 8.044 \cdot t \quad 10s < t \leq 14.3s$$



In modo analogo posso definire la:

Accelerazione media (in 1 dimensione!!):



$$\langle a \rangle = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Dimensionalmente: $[a] = [LT^{-2}]$

Unità e simboli: $\frac{\text{metro}}{\text{sec ondo}^2} = \frac{m}{s^2} = ms^{-2}$

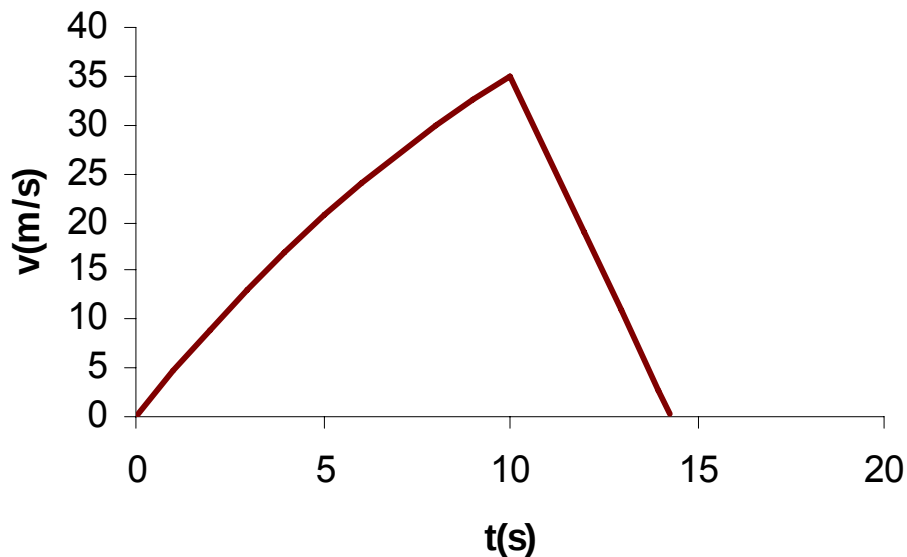
Accelerazione istantanea(1 dimensione):

$$a(t = t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

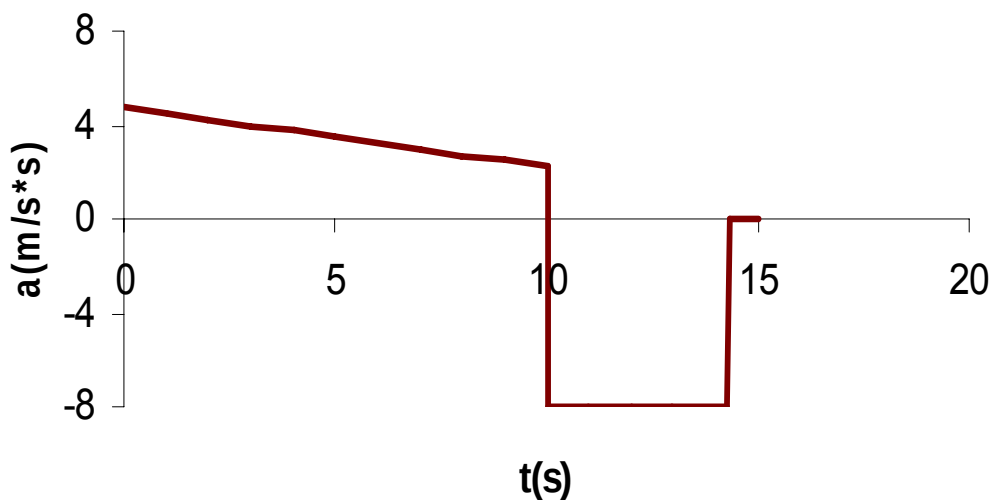
Per cui:

$$a = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \ddot{x}(t)$$

Se riprendiamo il nostro esempio:

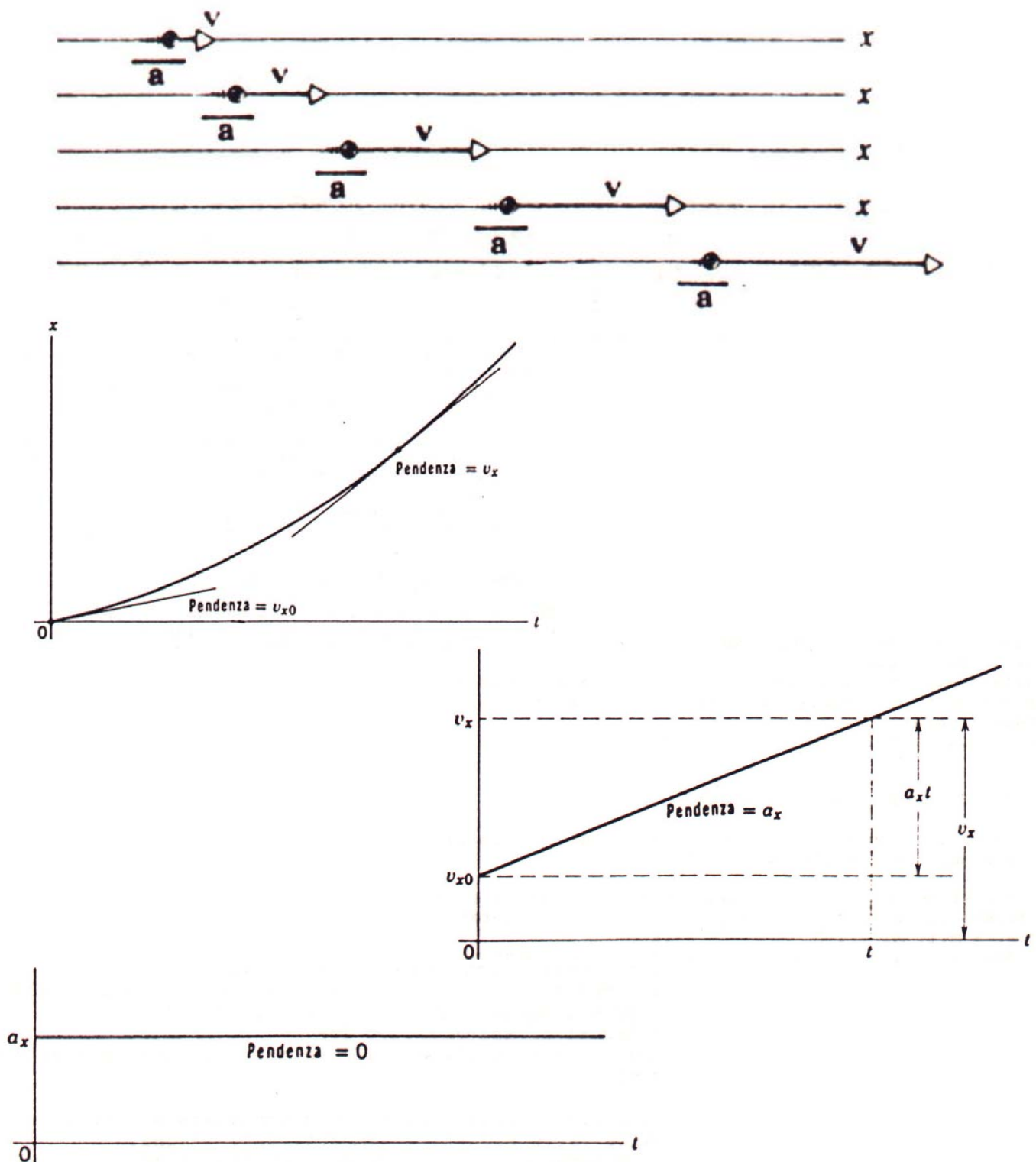


analiticamente: $a = 4.752 - 0.252t$ $0s \leq t \leq 10s$
 $a = -8.044$ $10s \leq t \leq 14.3s$

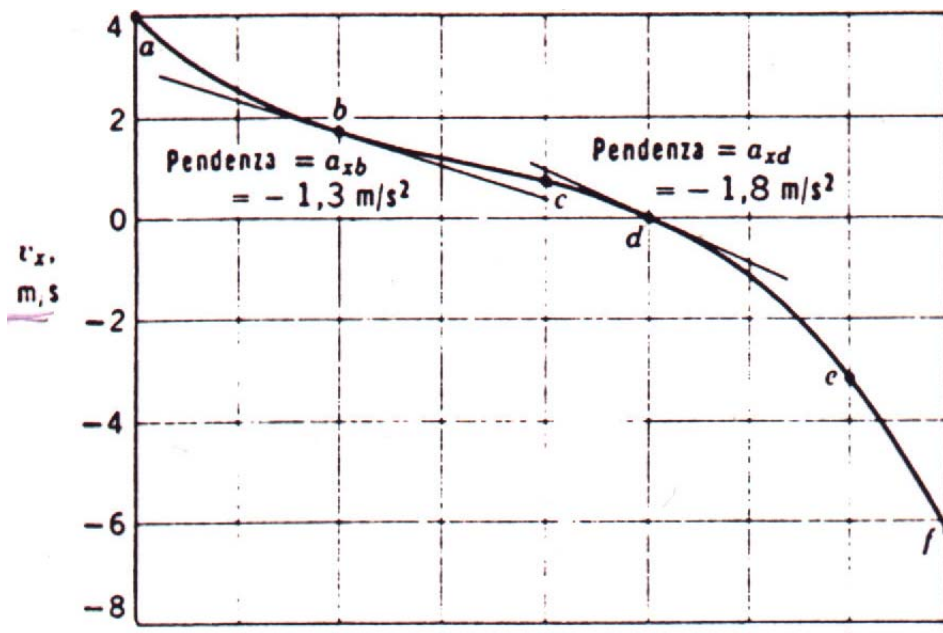
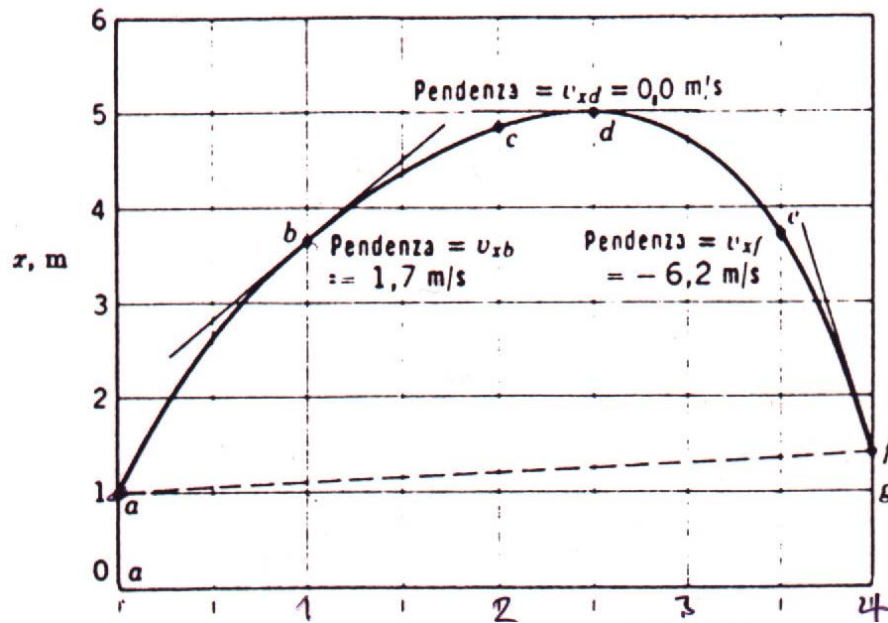
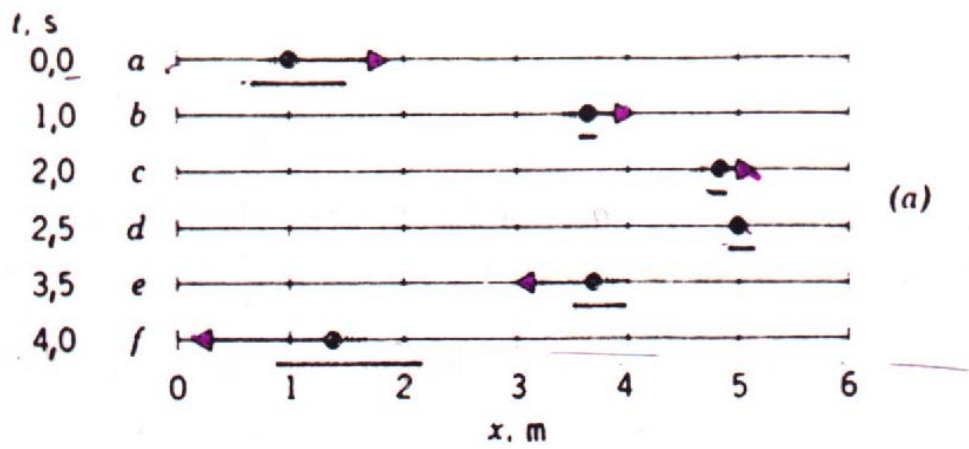


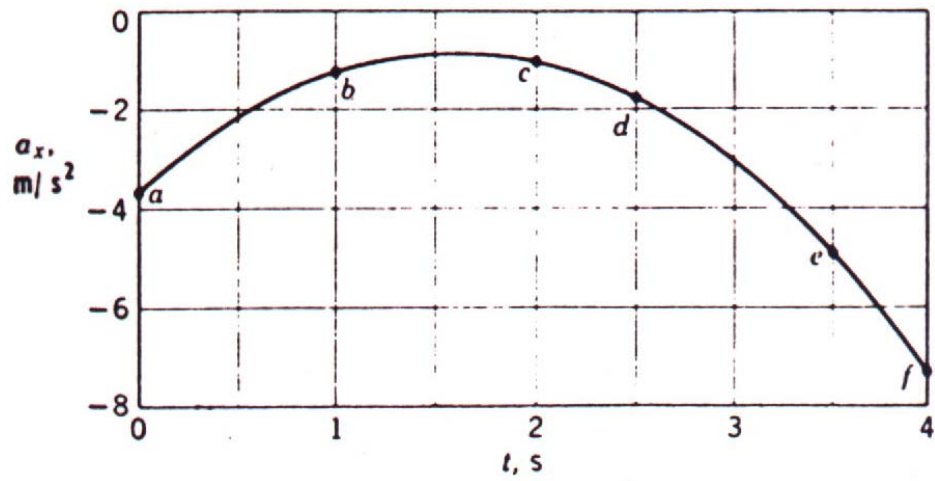
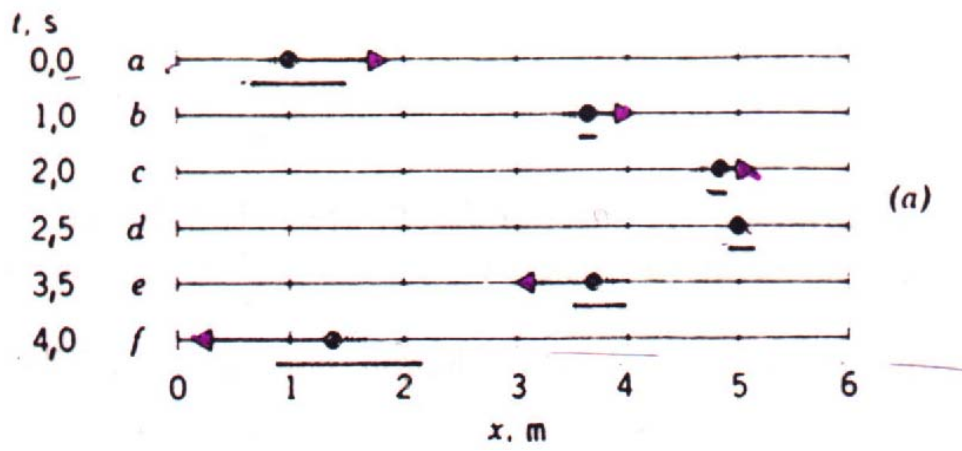
Alcune accelerazioni

Protoni accelerari a FNAL	$9 \cdot 10^{13} \text{ ms}^{-2}$
supercentrifuga	$3 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-2}$
Palla da baseball	$3 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-2}$
Pallone da calcio	$3 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-2}$
automobile a 100Km/h contro ost. fisso	10^3 ms^{-2}
Paracadutista all' apertura del paracadute	$3.2 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-2}$
Accelerazione di gravità sul Sole	$2.7 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-2}$
Aviogetto in risalita dopo una picchiata	80 ms^{-2}
Perdita di coscienza dell' uomo	70 ms^{-2}
Accelerazione di gravità sulla Terra	9.8 ms^{-2}
Frenatura di un' automobile	$\sim 8 \text{ ms}^{-2}$
Accelerazione di gravità sulla Luna	1.7 ms^{-2}
Rotazione della Terra (Equatore)	$3.4 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$
Rivoluzione della Terra	$0.6 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$



– (a) Cinque successive posizioni di un punto materiale in moto rettilineo uniformemente accelerato. Le frecce sui punti rappresentano v , mentre quelle sotto rappresentano a . (b) Lo spostamento aumenta in modo quadratico secondo la relazione $x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$; la pendenza aumenta uniformemente e in ogni istante ha il valore v_x , la velocità. (c) La velocità v_x cresce uniformemente secondo la relazione $v_x = v_{x0} + a_x t$; la pendenza è costante e vale a_x , l'accelerazione. (d) L'accelerazione a_x è costante; la sua pendenza è nulla. La fig. 3-5 illustra grafici analoghi per il moto in una dimensione con accelerazione *non* costante.

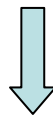




Cinematica in 3D

In una dimensione: $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

In tre dimensioni: $\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \langle v_y \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t}; \langle v_z \rangle = \frac{\Delta z}{\Delta t}$

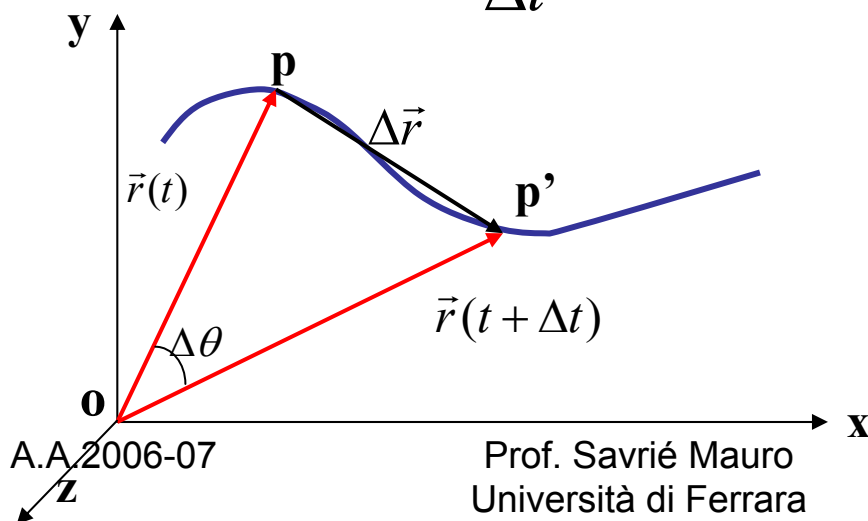


Le interpretiamo come le componenti di un vettore

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}$$

Nel caso sia un vettore velocità:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$



Passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{dx}{dt} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{dy}{dt} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{Diventano la velocità istantanea:}$$
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$
$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

per le proprietà delle derivate:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- È dimensionalmente corretta?
- Che ipotesi si sono fatte sui versori ?
- Derivare un vettore equivale a derivare tre funzioni scalari

In realtà sia la velocità che l'accelerazione (come la posizione e lo spostamento) sono grandezze vettoriali ed in 3 dimensioni:

1. velocità vettoriale media

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \langle v_y \rangle = \frac{\Delta y}{\Delta t}; \langle v_z \rangle = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

2. velocità vettoriale istantanea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

3. accelerazione vettoriale media

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}; a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}; a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

4. accelerazione vettoriale istantanea

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

come si ricavano i moduli?

Esempio 1

un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio R nel piano xy con centro nell'origine percorrendo archi uguali in tempi uguali. Scrivere la legge oraria in coordinate polari e cartesiane

Moto nel piano xy :

$$\theta = \pi / 2$$

Moto circolare:

$$r = \text{cost.} = R$$

Archi di circonferenza proporzionali al tempo:

$$\phi = s / R = (v \cdot t) / R \quad v = \text{cost.}$$

Equazione oraria:

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \pi / 2 \\ \phi = (v \cdot t) / R \end{cases}$$

$v =$ (lunghezza di) arco percorso nell' unità di tempo

$v / R = \phi / t = \omega$ angolo descritto nell' unità di tempo

quale unità?
quale dimensione?

$$\phi = \omega t$$

La trasformazione a **coordinate cartesiane**:

$$\phi = \omega t; \theta = \pi/2$$

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \omega t \\ y = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \omega t \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

Quanti gradi di libertà ha il sistema?

Cosa succede eliminando il tempo?

Quadriamo, sommiamo ed otteniamo la:

$$x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = R^2$$

cosa rappresenta ?:

L'equazione della traiettoria

Il moto è **periodico** (di periodo T):

si ripete con le stesse modalità passando dalla stessa posizione negli istanti:

$$t, t + T, t + 2T, t + 3T, t + 4T, \dots$$

In un tempo T infatti l'angolo varia di 2π (a $v = \text{cost.!!!}$):

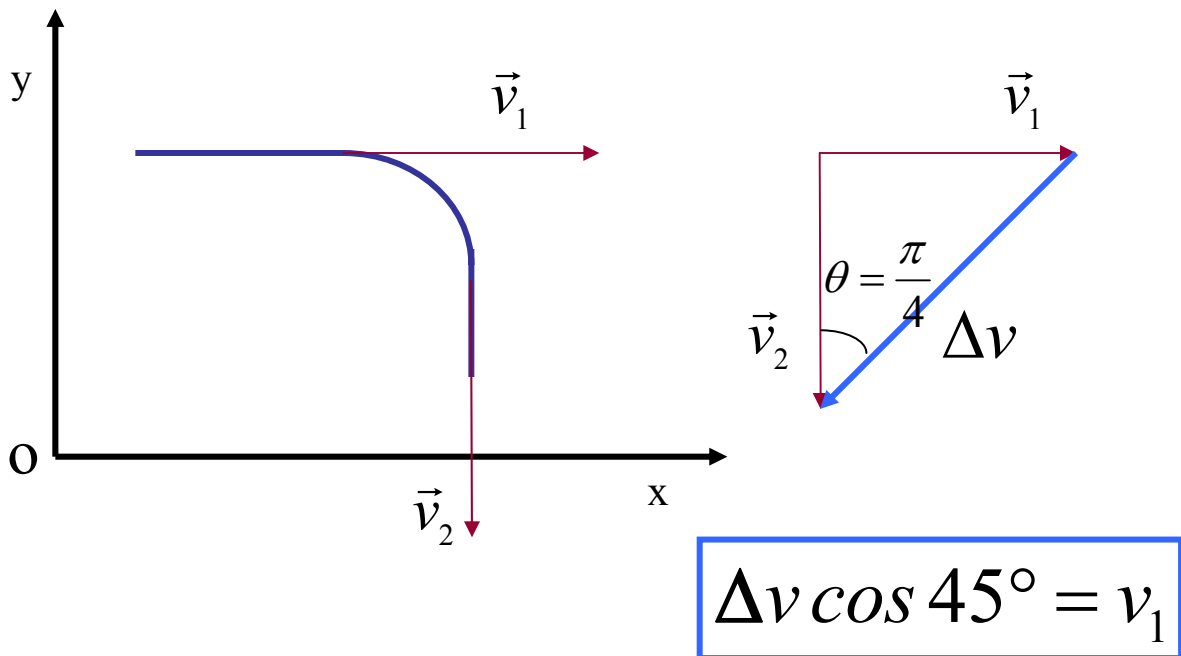
$$\omega = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Esempio 3

Da: H. Ohanian (come molti altri)

Un' auto entra in una curva a 90° con una velocità costante con modulo $V=25 \text{ m/s}$ ed Esce dopo 6 s.

Quanto vale la sua accelerazione media in questo intervallo di tempo?



$$|\vec{a}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 / \cos 45^\circ}{6.0} = 5.9 \text{ m/s}^2$$

Problema cinematico inverso

Date la velocità e l'accelerazione trovare le leggi orarie.

Sia dato un punto che si muove di moto con accelerazione costante. In $t=0$ siano:

$$x = x_0 \quad v_x = v_{x,0}$$

E se la velocità cresce in modo lineare con il tempo

$$v_x = v_{x,0} + a_x \cdot t \quad x = x_0 + v_x \cdot t$$

$$x = x_0 + v_x \cdot t = x_0 + (v_{x,0} + a_x \cdot t) \cdot t$$

Cos'è

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot t^2$$

Ma non è vera anche se corretta dal punto di vista dimensionale PERCHÉ'?

La velocità, se considero un moto accelerato, è variabile con il tempo. E' più ragionevole quindi usare la velocità media:

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v}{2}$$

Con la velocità media:

$$x = x_0 + \langle v_x \rangle \cdot t =$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_{0,x} + v_x) \cdot t$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} [v_{0,x} t + (v_{0,x} + a_x t) t]$$

$$x = x_0 + v_{0,x} \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2$$

E questa relazione è corretta

Ma il vero problema consiste nella ricerca di una funzione “generale” di cui si conosce la derivata:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{se} \quad v = v_0 = \cos t \Rightarrow x = v_0 t$$

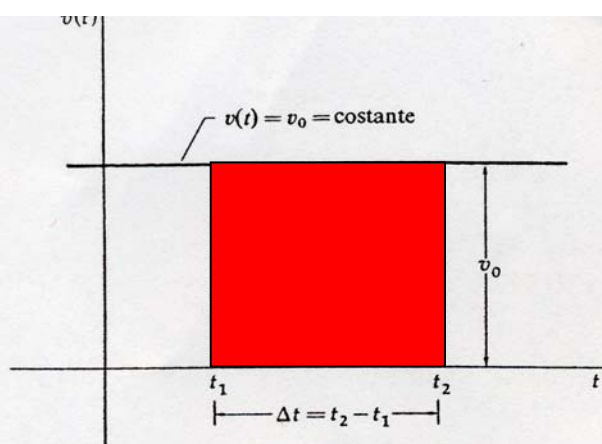
Cos'è?

Ma la soluzione più generale è: $x = C + v_0 t$

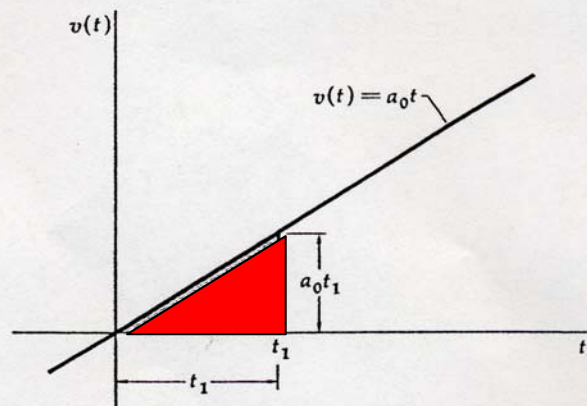
Vediamo un caso più difficile:

$$v = v(t) \quad \text{ad esempio} \quad v = a_0 t$$

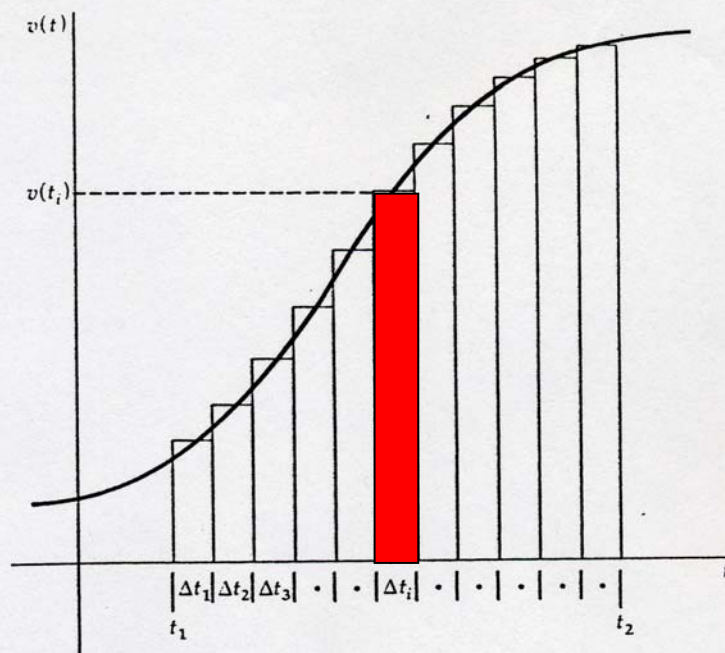
In pratica il problema consiste nella ricerca della funzione **primitiva** (integrazione)



Area ombreggiata = $v_0 \Delta t = v_0(t_2 - t_1) = v_0 t_2 - v_0 t_1 = x_2 - x_1 = \Delta x$



Area ombreggiata = $\frac{1}{2} (\text{base}) (\text{altezza}) = \frac{1}{2} (t_1) (a_0 t_1) = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = x_1$

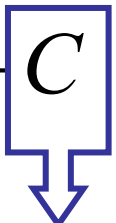


$$v(t_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \cong \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \Rightarrow \Delta x_i \approx v(t_i) \Delta t_i$$

$$\Delta x = \sum_{t_1}^{t_2} \Delta x_i \approx \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i) \Delta t_i \quad \Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i) \Delta t_i$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i) \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = x(t_2) - x(t_1)$$

Abbiamo quindi un procedimento generale per risolvere il problema cinematico inverso

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad dx = v_x dt \quad x = \int v_x dt + C$$


Costante ignota.....

Ma se sono definiti l'istante e la posizione iniziali.....

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_x dt \quad \text{Dove in generale: } v_x = v_x(t)$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt =$$

Se la velocità è costante (*moto rettilineo uniforme*):

$$x = x_0 + v_x \int_{t_0}^t dt =$$

$$x = x_0 + v_x (t - t_0)$$

Analogamente per i moti uniformemente accelerati:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$dv_x = a_x \cdot dt \quad v_x = \int a_x dt + C_1$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^t a_x dt \quad v_x = v_{x0} + a_x \int_{t_0}^t dt$$

$$v_x = v_{x0} + a_x \cdot (t - t_0)$$

Possiamo scrivere altre relazioni interessanti:

$$v_x dv_x = a_x dx = a_x \frac{dx}{dt} dt = a_x dx$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x_0}^x a_x dx \quad \frac{1}{2} (v_x^2 - v_{0x}^2) = \int_{x_0}^x a_x dx$$

Se l'accelerazione è costante:

$$v_x^2 - v_{x_0}^2 = 2 \cdot a_x (x - x_0)$$

In generale:

$$dv_x = a_x dt \Rightarrow \int_{t_0}^t dv_x = a_x \int_{t_0}^t dt = a_x (t - t_0)$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x (t - t_0)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt = \int_{t_0}^t [v_{0,x} + a_x (t - t_0)] dt$$

$$(x - x_0) = v_{0,x} \int_{t_0}^t dt + a_x \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

$$x = x_0 + v_{0,x} (t - t_0) + \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2$$

La ricerca della primitiva stabilisce che se una $F(x)$ è primitiva della $f(x)$ allora anche qualunque altra funzione del tipo $G(x) = F(x) + c$ è primitiva della $f(x)$ e possiamo scrivere:

$$F(x) = \int f(x) dx + c$$

.....e nel nostro caso, se supponiamo di conoscere l'accelerazione in funzione del tempo (...adesso in tre dimensioni):

$$\vec{a} = \vec{a}(t)$$

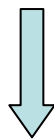
$$\begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \\ a_z = a_z(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \int a_x(t) dt + c_{1x} \\ v_y &= \int a_y(t) dt + c_{1y} \\ v_z &= \int a_z(t) dt + c_{1z} \end{aligned}$$

Le tre costanti non sono determinabili dal sistema. Se deriviamo le velocità otteniamo le stesse accelerazioni per qualunque valore delle costanti.

Le v_i sono funzioni del tempo: cosa succede se poniamo $t=t_0$ (es. $t_0=0$) ?

Finqui 21.01.08



Condizioni iniziali

ESEMPIO 4

Un punto materiale si muove con accelerazione data da:

$$\begin{cases} a_x = 2t \\ a_y = 3 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \int a_x(t) dt + c_{1x} \\ v_y(t) = \int a_y(t) dt + c_{1y} \\ v_z(t) = \int a_z(t) dt + c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \int 2t dt + c_{1x} \\ v_y(t) = \int 3 dt + c_{1y} \\ v_z(t) = c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = t^2 + c_{1x} \\ v_y(t) = 3t + c_{1y} \\ v_z(t) = c_{1z} \end{cases}$$

Se all'istante $t=5s$ abbiamo misurato le velocità ed abbiamo trovato (in metri al secondo):

$$\begin{cases} v_x(5) = 30 \\ v_y(5) = 10 \\ v_z(5) = 12 \end{cases}$$

Poniamo $t=5s$

$$\begin{cases} v_x(5) = 5^2 + c_{1x} \\ v_y(5) = 3 \cdot 5 + c_{1y} \\ v_z(5) = c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 = 25 + c_{1x} \\ 10 = 15 + c_{1y} \\ 12 = c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = c_{1x} \\ -5 = c_{1y} \\ 12 = c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = t^2 + 5 \\ v_y = 3t - 5 \\ v_z = 12 \end{cases}$$

Integrando ancora:

$$\begin{cases} x(t) = \int v_x(t) dt + c_{2x} \\ y(t) = \int v_y(t) dt + c_{2y} \\ z(t) = \int v_z(t) dt + c_{2z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \int (t^2 + 5) dt + c_{2x} \\ y(t) = \int (3t - 5) dt + c_{2y} \\ z(t) = \int 12 dt + c_{2z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + c_{2x} \\ y(t) = \frac{3}{2}t^2 - 5t + c_{2y} \\ z(t) = 12t + c_{2z} \end{cases}$$

E ancora per $t=5s$:

$$\begin{cases} x(5) = 41.7 + 25 + c_{2x} \\ y(5) = 37.5 - 25 + c_{2y} \\ z(5) = 60 + c_{2z} \end{cases}$$

COSA CI MANCA PER AVERE LA SOLUZIONE?

e se all' istante $t=5s$ abbiamo misurato le posizioni ed abbiamo, per esempio, trovato (in metri):

$$\begin{cases} x(5) = 3 \\ y(5) = 0 \\ z(5) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 41.7 + 25 + c_{2x} \\ 0 = 37.5 - 25 + c_{2y} \\ -2 = 60 + c_{2z} \end{cases} \quad \begin{cases} c_{2x} = -63.7 \\ c_{2y} = -12.5 \\ c_{2z} = -62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 41.7 + 25 - 63.7 \\ y = 37.5 - 25 - 12.5 \\ z = 60 - 62 \end{cases} \quad \begin{cases} x(5) = 3 \\ y(5) = 0 \\ z(5) = -2 \end{cases}$$

E l' equazione del moto
completa si scrive:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{3} + 5t + 63.7 \\ y(t) = \frac{3}{2}t^2 - 5t - 12.5 \\ z(t) = 12t - 62 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + 5t + 63.7 \right) \hat{i} + \left(\frac{3}{2}t^2 - 5t - 12.5 \right) \hat{j} + (12t - 62) \hat{k}$$

Riassumiamo le più importanti “**formule**” in una dimensione:

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_x + v_{0,x}) \cdot t$$

$$x = x_0 + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2 a (x - x_0)$$

.....e in tre dimensioni:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} (\vec{v} + \vec{v}_0) \cdot t$$

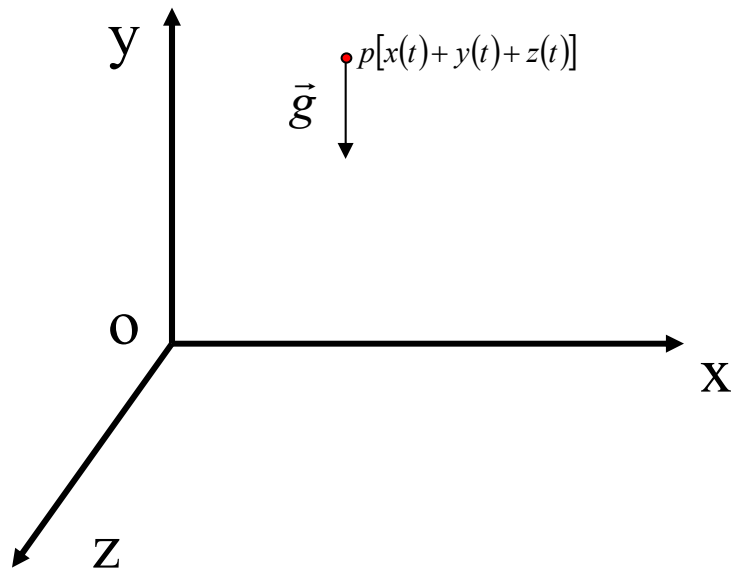
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + 2 \vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Ognuna delle quali vale tre **relazioni scalari**
(tranne l' ultima!)

Equazioni del moto per la caduta libera



**Le formule del moto uniformemente accelerato
si trasformano in:**

$$y = \frac{1}{2} (v_y + v_{0,y}) \cdot t$$

$$y = v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

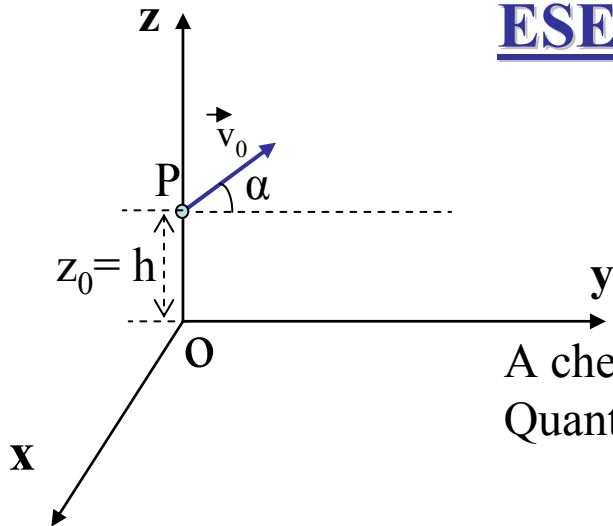
$$v_y = v_{0,y} - g t$$

$$v_y^2 = v_{0,y}^2 - 2 g y$$

Con: $t_0 = 0$ e $y_0 = y(t_0) = 0$

$$|\vec{g}| = 9.81 m s^{-2}$$

ESEMPIO 5



$$\alpha = 30^\circ$$

$$z_0 = h = 8m$$

$$|\vec{v}_0| = 12ms^{-1}$$

A che distanza il punto P cade dall' origine?
Quanto tempo rimane in volo?

L' accelerazione del punto P è: $\vec{g} : |\vec{g}| = 9.8ms^{-2}$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t=0) = v_{0,x} = 0 \\ v_y(t=0) = v_{0,y} = v_0 \cos \alpha \\ v_z(t=0) = v_{0,z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Condizioni iniziali

Aggiungendo
le condiz. Iniz.

Integrando le eq. del moto:

$$\begin{cases} v_x(t) = c_{1x} \\ v_y(t) = c_{1y} \\ v_z(t) = -gt + c_{1z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = v_0 \cos \alpha \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Se integriamo ancora:

$$\begin{cases} x(t) = c_{2x} \\ y(t) = (v_0 \cos \alpha)t + c_{2y} \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + c_{2z} \end{cases}$$

E ricaviamo la legge oraria:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 \cos \alpha)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + z_0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\hat{j} + \left[(v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + z_0 \right]\hat{k}$$

Quali caratteristiche ha il moto?

Come possiamo determinare la traiettoria?

$$z = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} g + (tg \alpha)y + h \quad z_0 = h$$

Come troviamo la “gittata”?

$$y_c = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

cosa indicano i segni + e – nella eq. della gittata??

cos’è e quanto vale il “tempo di volo”?

qual’è la quota massima raggiunta?

$$t_c = \frac{y_c}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

$$\frac{dz}{dy} = -g \frac{y}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + tg \alpha$$

$$y_m = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$z_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + z_0$$

Esempio 7

Un punto materiale si muove secondo la legge oraria:

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Cosa possiamo dire del moto ?}$$

Si trovino:

- 1) velocità media nell' intervallo di tempo tra $t_1=1s$ e $t_2=5s$ e la velocità istantanea, in modulo ed argomento, in $t=4s$.
- 2) l' accelerazione ;

$$\langle v_x \rangle = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2t_2^2 - 2t_1^2}{t_2 - t_1} = 12ms^{-1} \quad \boxed{\text{dipende da } t}$$

$$\begin{aligned} \langle v_y \rangle &= \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{(2t_2 + 1) - (2t_1 + 1)}{t_2 - t_1} = 2ms^{-1} \end{aligned} \quad \boxed{\text{non dipende da } t}$$

$$\langle v_z \rangle = \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1} = 0ms^{-1} \quad \boxed{\text{non dipende da } t}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = 4t \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = 2 \\ v_z(t) = \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

N.B.

La velocità non è costante né in modulo né in argomento (direzione)!! Infatti:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 2\sqrt{4t^2 + 1}$$

$$\tan \vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2t}$$

Per l'accelerazione:

$$\begin{cases} a_x(t) = x''(t) = 4 \\ a_y(t) = y''(t) = 0 \\ a_z(t) = z''(t) = 0 \end{cases}$$

N.B.

L'accelerazione è costante in modulo e in argomento (direzione)!! Infatti:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 4ms^{-2}$$

$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x} = 0 \quad \beta = 0^\circ \quad (180^\circ)$$

Variazione di g con la latitudine

luogo	latitudine	g
Quito (Ecuador)	0° Nord	9.780 ms ⁻²
Madras (India)	13° Nord	9.783 ms ⁻²
Hong Kong (Cina)	22° Nord	9.788 ms ⁻²
Cairo (Egitto)	30° Nord	9.793 ms ⁻²
New York (USA)	41° Nord	9.803 ms ⁻²
Londra (Inghilterra)	51° Nord	9.811 ms ⁻²
Oslo (Norvegia)	60° Nord	9.819 ms ⁻²
Murmansk (Russia)	69° Nord	9.825 ms ⁻²
Spitsbergen	80° Nord	9.831 ms ⁻²
Polo Nord	90° Nord	9.832 ms ⁻²

(ancora) il caso (?) del moto circolare uniforme

Che avevamo già iniziato a vedere

L'equazione del moto:

1. In forma vettoriale:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

2. In forma scalare (coordinate cartesiane):

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

3. Nel moto circolare:

In rappresentazione polare:

$$\begin{cases} \vartheta = \pi/2 \\ r = \text{cost.} = R \\ \varphi = s/R = (v \cdot t)/R \end{cases}$$

In rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = R \cos(v \cdot t / R) \\ y = R \sin(v \cdot t / R) \\ z = 0 \end{cases}$$

Condizioni del moto (circolare uniforme):

$$|\vec{v}| = \cos t. \quad : \text{moto uniforme}$$

$$|\vec{r}| = \cos t. \quad : \text{moto circolare}$$

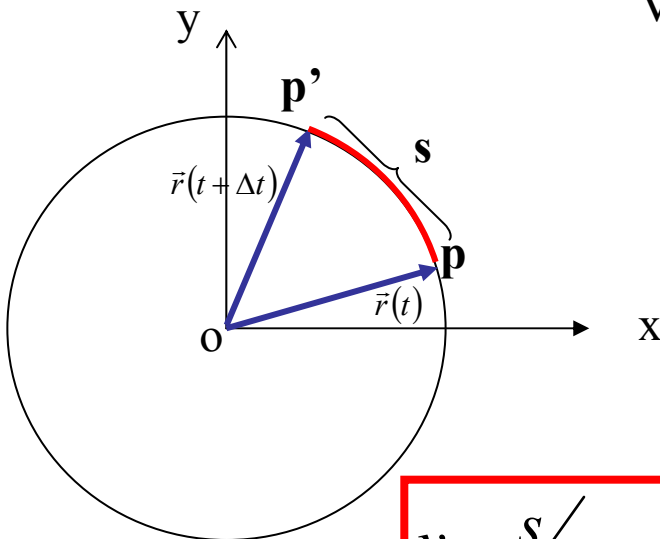
$$\Rightarrow \frac{|\vec{v}|}{|\vec{r}|} = \cos t.$$

Dimensionalmente:

$$V: [LT^{-1}]$$

$$R: [L]$$

$$V/R: [LT^{-1}][L^{-1}]=[T^{-1}]$$



$$v = \frac{s}{t}$$

$$\frac{v}{R} = \frac{s}{R} \frac{1}{t} \quad \text{ma} \quad \frac{s}{R} = \vartheta(\text{rad})$$

$$\Rightarrow \frac{v}{R} = \frac{\vartheta}{t} = \omega \equiv \text{velocità angolare}$$

unità di misura: rad./s



$$\boxed{s^{-1}}$$

Le equazioni del moto diventano allora:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

Per la velocità (vettoriale) istantanea:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega R \sin \omega t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \omega R \cos \omega t \\ v_z = \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ed il suo modulo:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 R^2 \cos^2 \omega t} \\ &= \sqrt{\omega^2 R^2} = \omega R \end{aligned}$$

La velocità è costante ?, perchè?

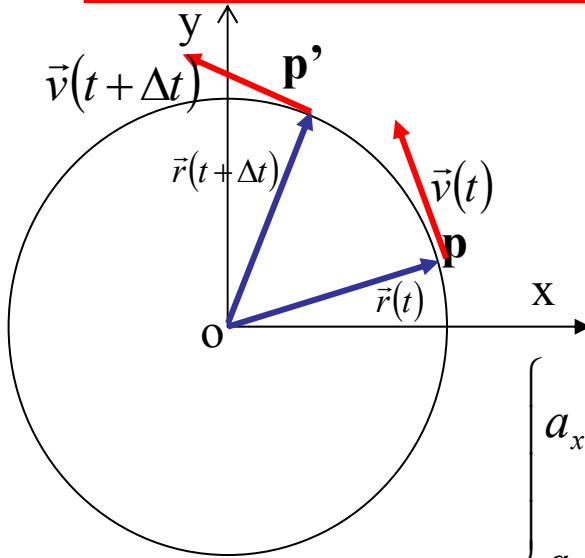
E le derivate delle V_x, V_y, V_z sono diverse da 0 ?, Perchè?

proviamo a calcolare: $\vec{r} \cdot \vec{v}$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = xv_x + yv_y$$

$$= r \cos \omega t [-\omega r \sin \omega t] + r \sin \omega t [\omega r \cos \omega t] = 0$$

$\vec{r}$ e $\vec{v}$ sono tra loro ortogonali



Accelerazione del moto:

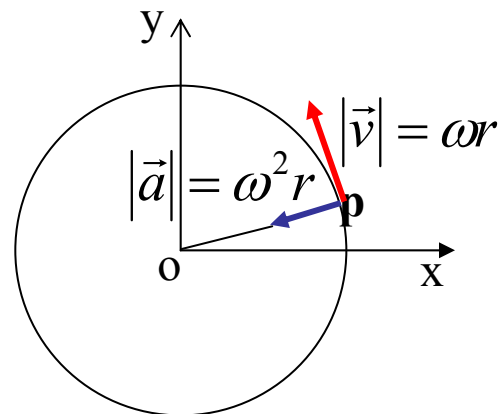
$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y \\ a_z = 0 \end{cases}$$

Finqui 28.01.08

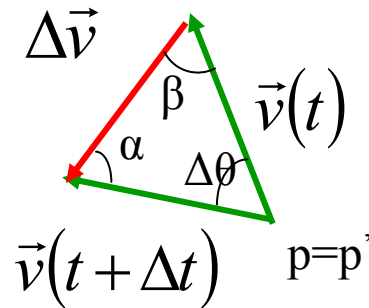
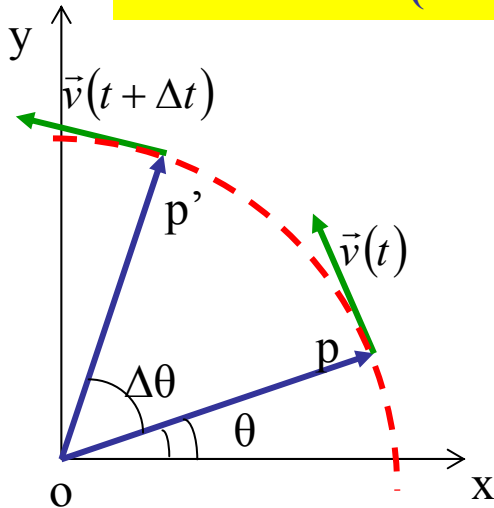
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 r = \omega(\omega r) = \omega v$$

Quali sono la direzione ed il verso dell' accelerazione?

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x v_x + a_y v_y = 0$$



Supponiamo che la velocità sia costante (in modulo):
(ma è del tutto generale)



calcoliamo : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

ma vediamo che $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vartheta \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

ha la direzione della normale entrante

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\vec{v}(t + \Delta t)| - |\vec{v}(t)|}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2|\vec{v}| \sin \Delta \theta / 2}{\Delta t} = |\vec{v}| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \Delta \theta / 2}{\Delta \theta / 2} \cdot \Delta \theta / \Delta t \right]$$

$$= |\vec{v}| \left[\lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \theta / 2}{\Delta \theta / 2} \right] \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \theta / \Delta t \right]$$

quindi compattando in notazione vettoriale:

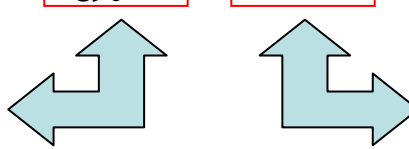
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega v \hat{r} = \omega v \hat{t}$$

E' generale!!!

dato un vettore $\vec{v}$ di modulo costante e che ruota con velocità angolare costante ω , la sua derivata è un vettore di modulo pari a ωv e ruotato di $\pi/2$ nel senso in cui ruota $\vec{v}$

Se la velocità varia in direzione e modulo:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d(v\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{dt} & \vec{v} &= v\hat{v} \\ &= \boxed{\frac{dv}{dt} \hat{v}} + \boxed{\omega v \hat{t}} \end{aligned}$$

Parallelo a $\vec{V}$  Ortogonale a $\vec{V}$

$\hat{t}$: versore $\perp$ a $\hat{v}$ centripeto

Ed anche questo risultato è generale!!!

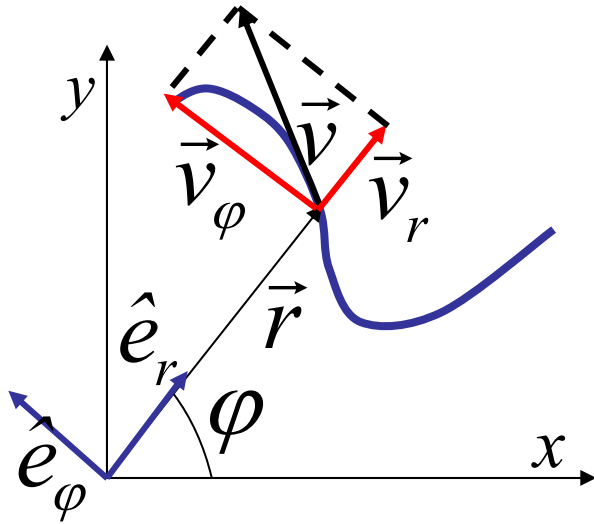
La derivata di un vettore $\vec{v}$ può essere scritta come somma di due termini vettoriali: un termine parallelo al versore del vettore, avente come modulo la derivata dv/dt e l'altro ortogonale a $\vec{v}$ (nel senso in cui ruota $\vec{v}$ avente come modulo ωv (dove ω è la velocità angolare istantanea con cui il vettore ruota).

N.B. Sappiamo che possiamo scrivere per la velocità:

$$\vec{v} = v\hat{e}_v = v\hat{\tau}$$

$\hat{\tau} \equiv$ Versore tangente alla traiettoria
nello stesso verso di $\vec{v}$

Proviamo ad esprimerlo in altro modo:



$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = d(r\hat{e}_r)/dt$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\phi$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\phi = \dot{\phi}\hat{e}_\phi = \omega\hat{e}_\phi$$

$$\vec{v}_\phi = r\dot{\hat{e}}_r = \omega r\hat{e}_\phi$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + \omega r\hat{e}_\phi$$

ricordiamocela: è importante!!!!

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\omega^2}$$

N.B. anche per per l'accelerazione:

Accelerazione tangenziale

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\hat{\tau})$$

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{\tau} + v\dot{\hat{\tau}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Accelerazione normale
(radiale)

$$|\vec{a}_\tau| = \dot{v} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

1. Se la velocità cresce con il tempo $\dot{v} > 0$ la accelerazione ha la stessa direzione di $\hat{\tau}$
2. Se la velocità diminuisce con il tempo $\dot{v} < 0$ la accelerazione ha verso opposto a quello di $\hat{\tau}$ e quindi a quello della velocità
3. Se il moto è uniforme $\dot{v} = 0$ l' accelerazione tangenziale è nulla .

Come nel moto rettilineo uniforme:

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \Rightarrow d\vartheta = \omega dt \quad \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\theta = \int_{t_0}^t \omega dt$$

Se $\omega = \text{costante}$: $\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0)$

Se $\omega \neq \text{cost.}$:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^t \alpha dt = \alpha \int_{t_0}^t dt$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

ma :

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

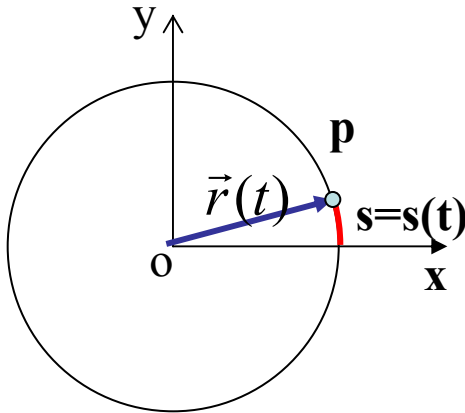
integrando :

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta = \int_{t_0}^t \omega_0 dt + \int_{t_0}^t \alpha dt$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Esempio 8

Calcolare la velocità e l'accelerazione di un punto materiale mobile su una traiettoria circolare, nota che sia la legge oraria $s=s(t)$ (ascissa curvilinea).



$$\vec{r}(t) = R\hat{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dR}{dt}\hat{r}(t) + R\omega\hat{t}$$

$\hat{t}$: versore tangente alla traiettoria e
 $\hat{r}(t) = -R\hat{r}(t)$
 ortogonale a r nel senso in cui r ruota

Dato che R è costante:

$$\vec{v}(t) = R\omega\hat{t} \quad \omega = v/R$$

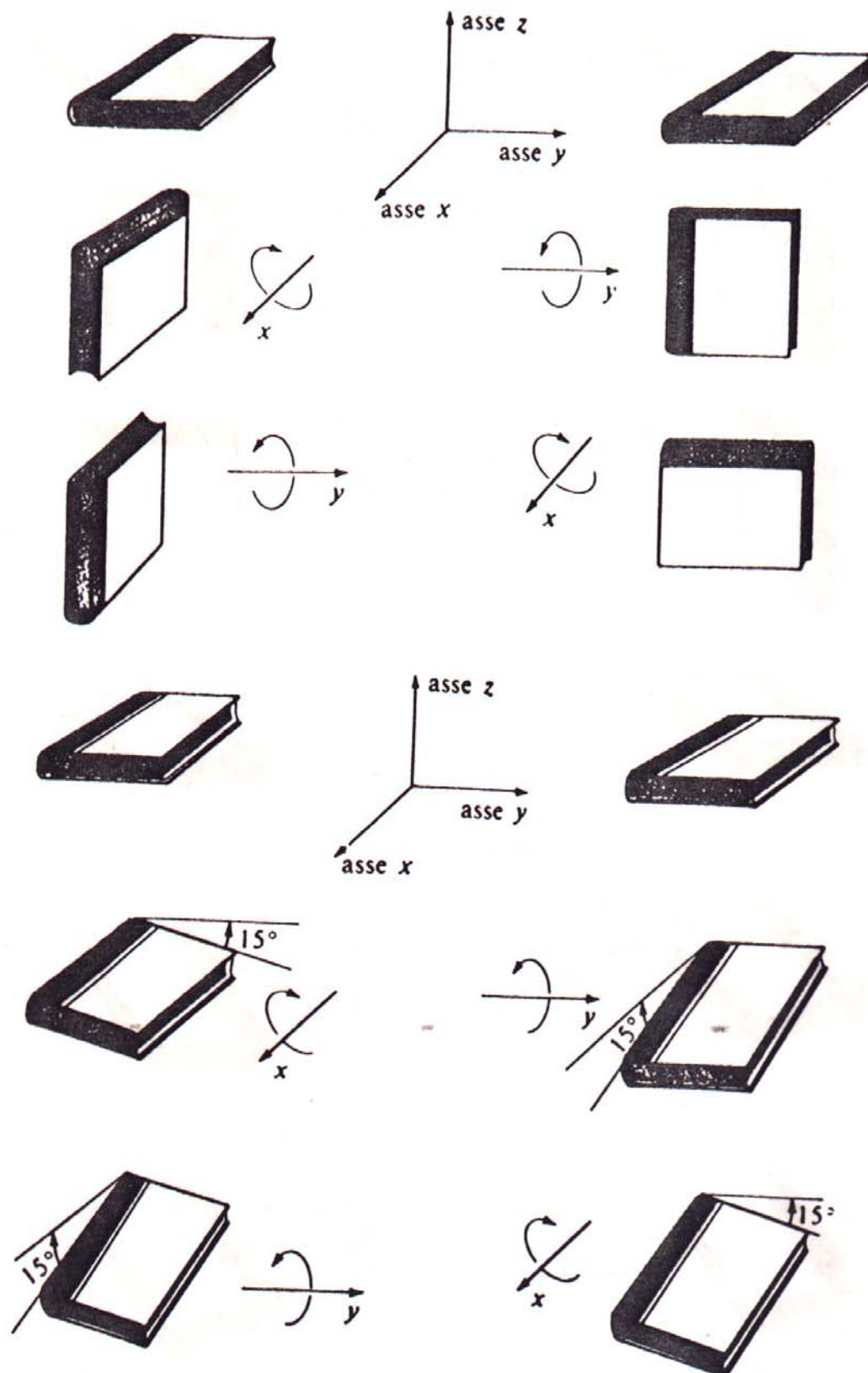
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\hat{t}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + R\omega\frac{d\hat{t}}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + R\omega \cdot 1 \cdot \omega(-\hat{r}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} - R\omega^2\hat{r}$$

$$a_T(t) = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

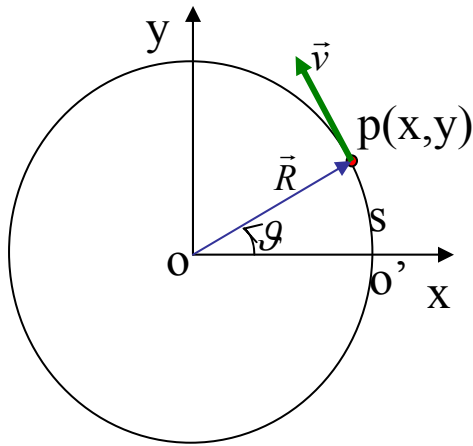
$$a_r(t) = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R}$$

L'angolo e' una quantita' vettoriale?



La velocità angolare e' una quantita' vettoriale?

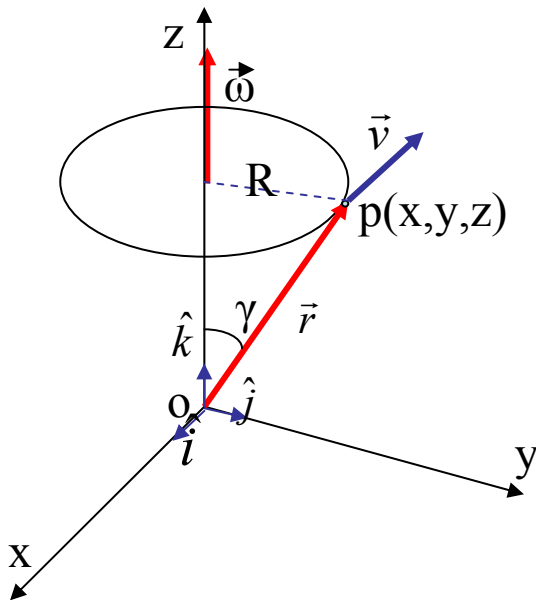
Per il moto circolare uniforme abbiamo visto che:



è chiaro cos'è?

$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = \omega R$$

Come rappresentiamo ω ? vediamo lo in 3d anche se è un moto piano:



$$R = r \sin \gamma$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\omega}$$

$$|\vec{v}| = \omega R = \omega r \sin \gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \hat{\omega} \equiv \hat{k}$$

se il moto è vario ($v \neq \text{cost.}$)
abbiamo già visto che:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \omega v \hat{n} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

e se il modulo della velocità è costante:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad \Leftarrow \quad \text{formula di Poisson}$$

abbiamo visto che per il moto circolare (in generale!!):

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(R\omega\hat{t})}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \hat{t} + R\omega \cdot 1 \cdot \omega(-\hat{r}) = R \frac{d\omega}{dt} \hat{t} - R\omega^2 \hat{r}$$

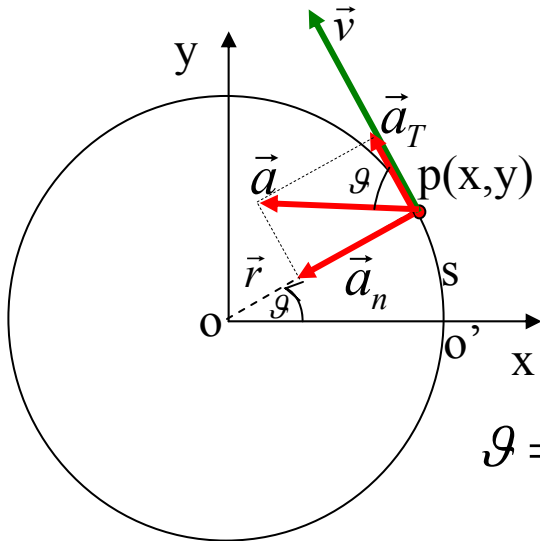
Per cui avremo che:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \alpha R$$

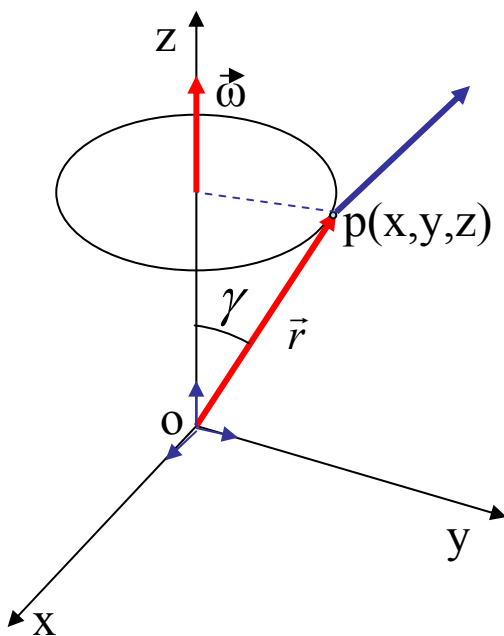
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a = \sqrt{\alpha^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\vartheta = a \tan \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 R}{\alpha R} \quad \text{e le dimensioni?}$$



se il moto è **circolare uniforme**: $\alpha = 0$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad \text{visto prima!}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt}$$

e poichè $\alpha=0 \rightarrow \omega=\text{costante}$:

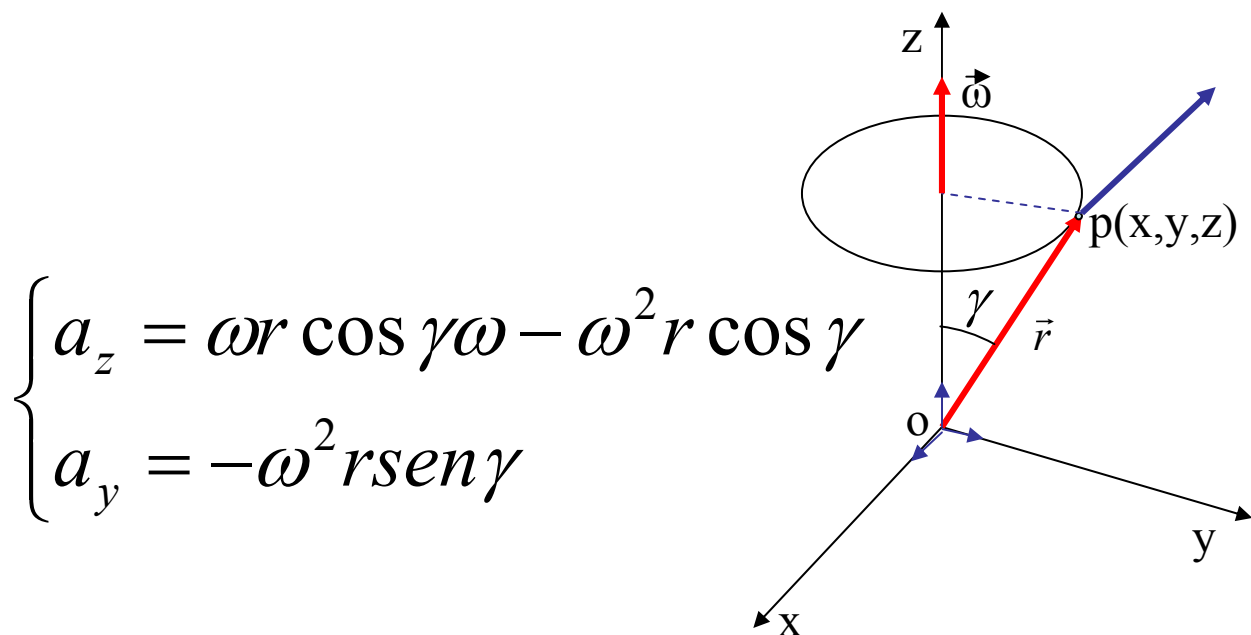
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

$$|\vec{a}| = |\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})| = \omega^2 R$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \omega r \cos \gamma \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}$$



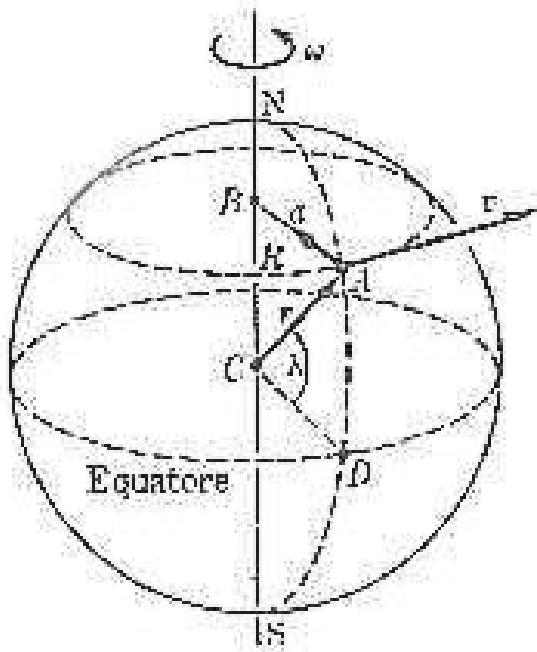
$$\begin{cases} a_z = \omega r \cos \gamma \omega - \omega^2 r \cos \gamma \\ a_y = -\omega^2 r \sin \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_z = \omega^2 r \cos \gamma - \omega^2 r \cos \gamma = 0 \\ a_y = -\omega^2 R \end{cases}$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\omega^4 R^2} = \omega^2 R$$



Esempio 9



Tutti I punti sulla terra si muovono con la stessa ω

λ =latitudine

r =CA=raggio terrestre $6.35 \cdot 10^6$ m

$R = r \cos \lambda$

$$v = \omega R = \omega r \cos \lambda$$

$$a = \omega^2 R = \omega^2 r \cos \lambda$$

$$\text{se } \omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

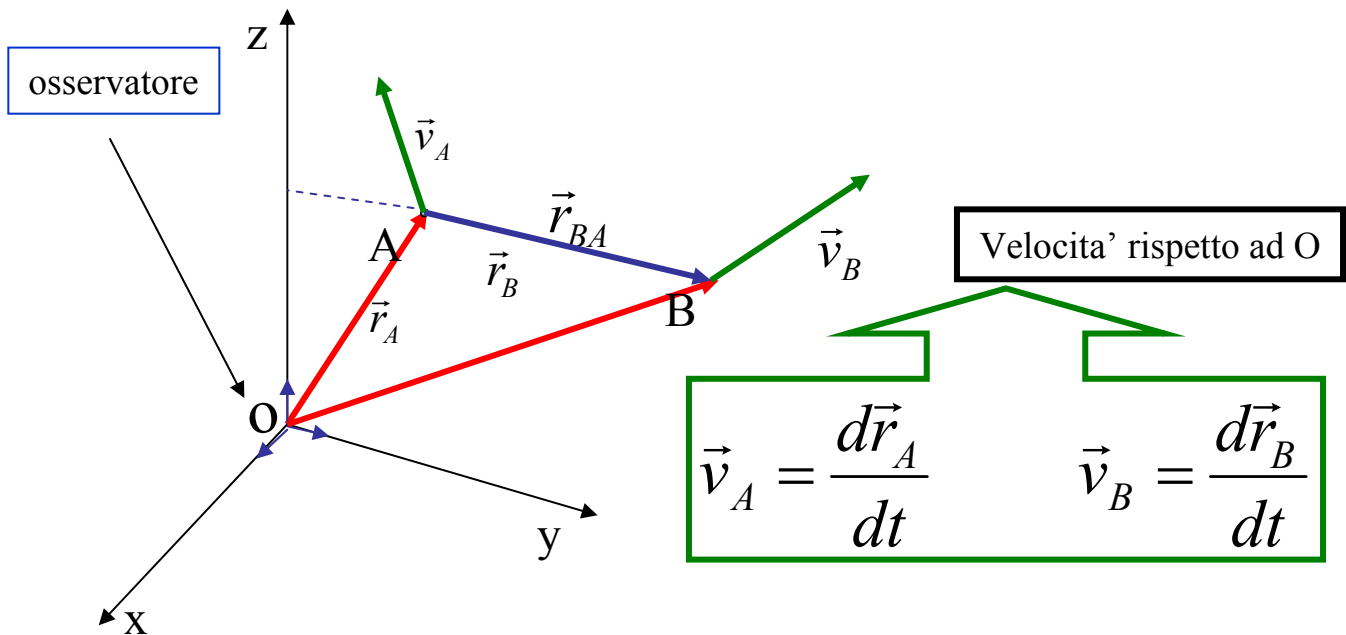
$$v = 459 \cos \lambda \text{ ms}^{-1}$$

$$v_{\max} = 459 \text{ ms}^{-1} = 1652 \text{ Kmh}^{-1}$$

$$a = 3.34 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \text{ ms}^{-2}$$

$$a_{\max} = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2} \Rightarrow 0.3\%g$$

I MOTI RELATIVI



Le velocità di B relativa a A e di A relativa ad B sono:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \quad \vec{v}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad \text{Dove:}$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

Ne segue che:

$$\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}$$

N.B.

Le velocità di A relativa a B e di B relativa ad A sono uguali ed opposte

Derivando le posizioni relative: $\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ $\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} - \frac{d\vec{r}_B}{dt}$

E usando le definizioni di velocità:

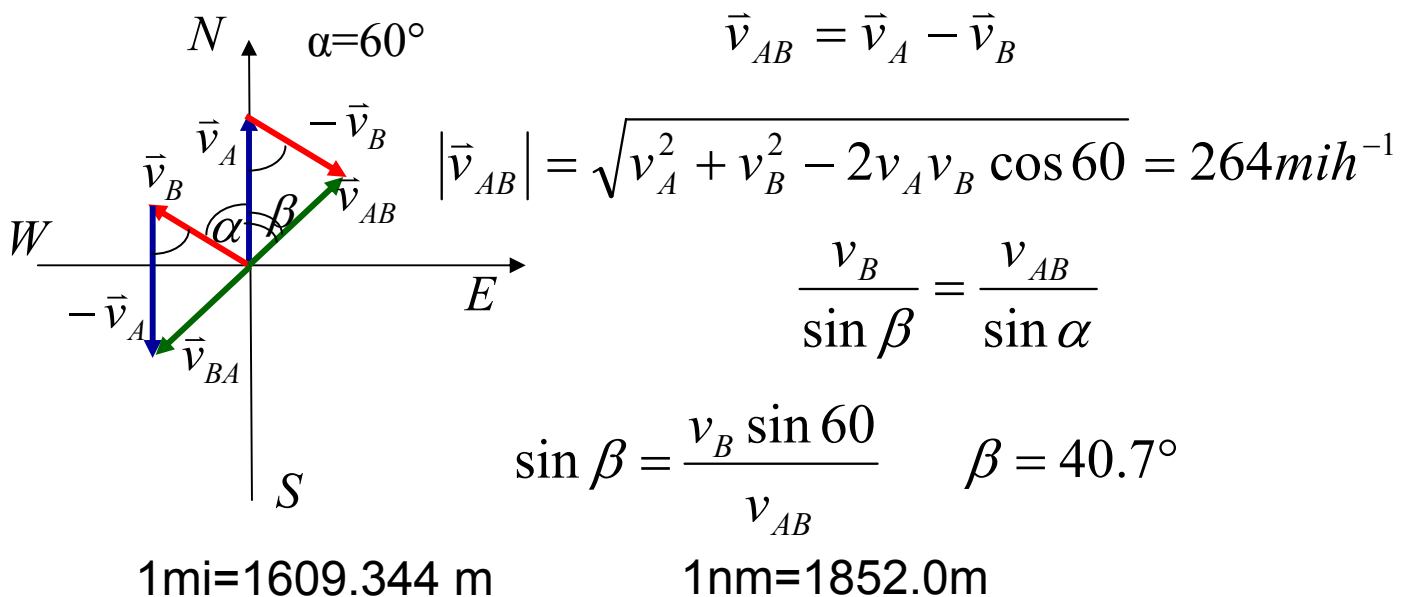
$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

N.B.

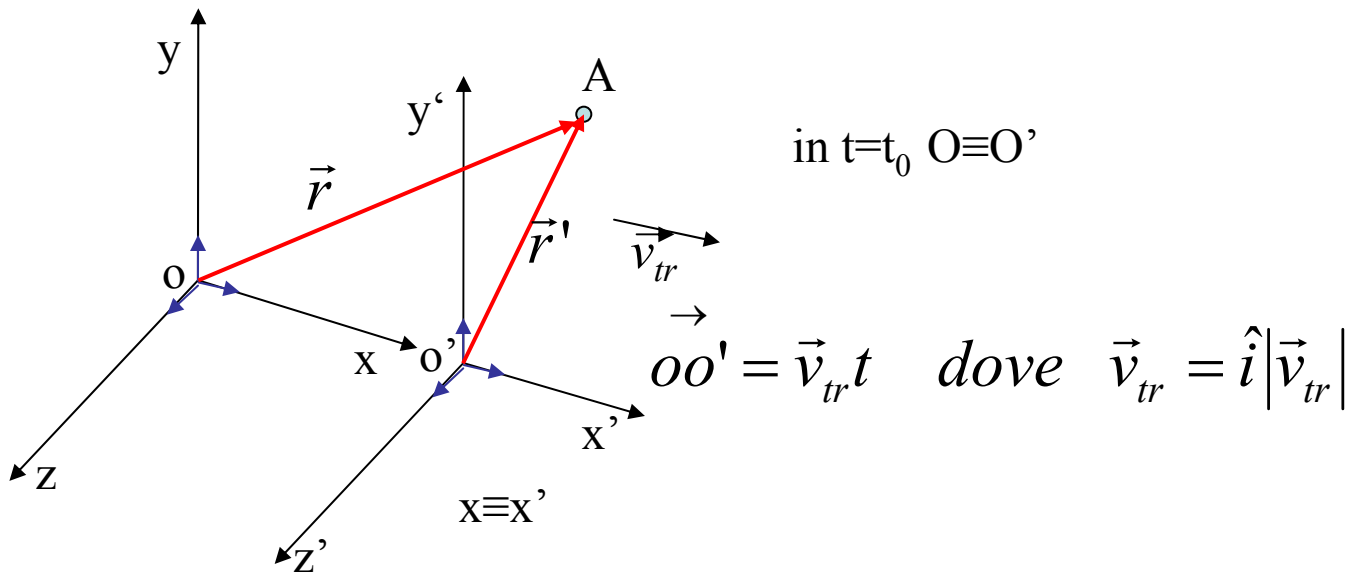
le velocità relative sono la differenza delle velocità che A e B hanno rispetto all'osservatore "fisso" in O (sistema di riferimento o,x,y,z)

Esempio 9.1

Un aeroplano A viaggia in direzione N alla velocità di 300 mi h⁻¹ rispetto al suolo. Un altro, B, viaggia in direzione N60W alla velocità di 200mi h⁻¹. trovare le velocità relative.



Dati due sistemi in moto traslazionale relativo uniforme con
velocità $\vec{v}_{tr}$ $x=x', y||y', z||z'$:



Che relazione esiste tra la posizione, velocità e accelerazione di A rispetto a O (XYZ) e quella di A rispetto a O' (X'Y'Z')?

$$\vec{r}' = \vec{r} - \overrightarrow{oo'} = \vec{r} - \vec{v}_{tr} t$$

Se deriviamo:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' = \frac{d(\vec{r} - \overrightarrow{oo'})}{dt} = \frac{d(\vec{r} - \vec{v}_{tr} t)}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_{tr}$$

Se deriviamo ancora:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' = \frac{d(\vec{v} - \vec{v}_{tr})}{dt} = \vec{a} + 0$$

Ricaviamo così le:

Trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} x' = x - v_{tr} t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{Ma in generale} \quad \begin{cases} x' = x - v_{tr,x} t \\ y' = y - v_{tr,y} t \\ z' = z - v_{tr,z} t \end{cases}$$

N.B.

Si suppone $t=t'$ (il tempo è assoluto!!)

Derivando l' equazione vettoriale: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_{tr} t$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{tr} \quad \vec{v}_{tr} = \text{Velocità di trascinamento}$$

proiettando l' equazione precedente sugli assi di riferimento:

$$\begin{cases} V'_x = V_x - v_{tr,x} \\ V'_y = V_y - v_{tr,y} \\ V'_z = V_z - v_{tr,z} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se c'è trascinamento} \\ \text{Solo lungo x (ad es.)} \end{array} \quad \begin{cases} V'_x = V_x - v_{tr} \\ V'_y = V_y \\ V'_z = V_z \end{cases}$$

Se A si muove in una particolare direzione (es. Y): $V_x=V_z=0$; $V_y=V$

$$\begin{cases} V'_x = -v_{tr} \\ V'_y = V \\ V'_z = 0 \end{cases} \quad |\vec{V}'| = \sqrt{v_{tr}^2 + V^2}$$

Ma se deriviamo ancora (l' eq. vettoriale):

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} + 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a}' = \vec{a} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

L' accelerazione è invariante per

trasformazioni di Galileo! (assi paralleli in traslazione uniforme relativa)

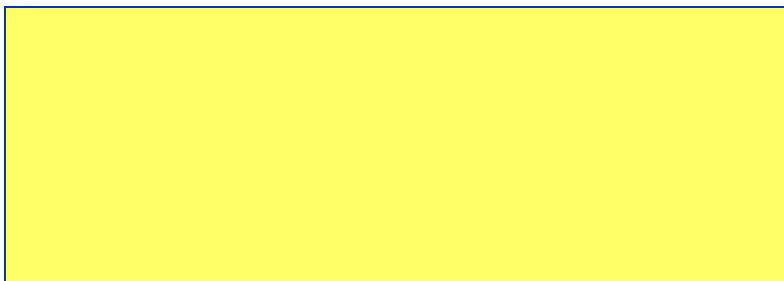
La relazione che lega il vettore posizione di un punto materiale nel sistema “fisso” ed in quello “mobile” è quindi data da:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t$$

che sono sempre vere!!!!!!!

e per le componenti cartesiane si legge:

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' = \\ &= (x - V_{0x}t)\hat{i} + (y - V_{0y}t)\hat{j} + (z - V_{0z}t)\hat{k}\end{aligned}$$



?

moltiplichiamola scalarmente per: $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$

$$x' = (\hat{i}' \cdot \hat{i})(x - V_{0x}t) + (\hat{i}' \cdot \hat{j})(y - V_{0y}t) + (\hat{i}' \cdot \hat{k})(z - V_{0z}t)$$

$$y' = (\hat{j}' \cdot \hat{i})(x - V_{0x}t) + (\hat{j}' \cdot \hat{j})(y - V_{0y}t) + (\hat{j}' \cdot \hat{k})(z - V_{0z}t)$$

$$z' = (\hat{k}' \cdot \hat{i})(x - V_{0x}t) + (\hat{k}' \cdot \hat{j})(y - V_{0y}t) + (\hat{k}' \cdot \hat{k})(z - V_{0z}t)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\hat{i}' \cdot \hat{i})(\hat{i}' \cdot \hat{j})(\hat{i}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{j}' \cdot \hat{i})(\hat{j}' \cdot \hat{j})(\hat{j}' \cdot \hat{k}) \\ (\hat{k}' \cdot \hat{i})(\hat{k}' \cdot \hat{j})(\hat{k}' \cdot \hat{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - V_{0x}t \\ y - V_{0y}t \\ z - V_{0z}t \end{pmatrix}$$

Ovvero:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} x - V_{0x}t \\ y - V_{0y}t \\ z - V_{0z}t \end{pmatrix} \quad |R| \Rightarrow \boxed{\text{matrice di trasformazione}}$$

nel caso di assi cartesiani paralleli:

$$|R| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e solo in questo caso!!!!!!!}$$

vale che:

$$\boxed{x' = (x - V_{0x}t) \text{ ecc. ecc.}}$$

N.B.

Una relazione di eguaglianza tra vettori implica l'eguaglianza tra le rispettive rappresentazioni cartesiane solo rispetto ad uno stesso sistema di riferimento

Le componenti del vettore al I membro di un' eq.ne sono uguali alle componenti omologhe del vettore al II membro purchè sia il I che il II membro siano ottenuti da proiezioni sugli assi di uno

stesso sistema di riferimento!!!

ovviamente vale anche che per le velocità:

$$\begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} v_x - V_{0x} \\ v_y - V_{0y} \\ v_z - V_{0z} \end{pmatrix}$$

e per le accelerazioni:

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix} = |R| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

N.B.

Tutto questo vale per i sistemi di riferimento
in moto relativo

rettilineo ed uniforme

Cosa succede in caso di moti relativi
rotazionali ?

.....lo vedemo più avanti!