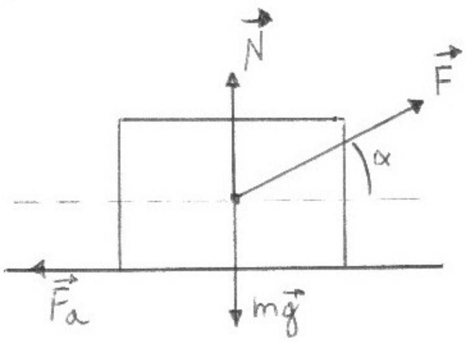
ESERCIZIO DINAMICA 05/11/2015

Una massa m è appoggiata su un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu = 0{,}25$. Ad essa è applicata una forza $\vec{F}$ che forma un angolo α con la direzione orizzontale.

ⓐ scrivere l'espressione della forza totale agente lungo la direzione orizzontale

ⓑ trovare per quale valore di α la forza è massima



Indicheremo con $\vec{F_a}$ la forza di attrito e con $\vec{N}$ la reazione vincolare del piano normale ad esso. Finché non c'è moto la somma di tutte le forze dovrà essere nulla, ossia:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F_a} = 0$$

>Se il corpo è in quiete

y) $N + F\,\mathrm{sen}\,\alpha = mg \rightarrow N = mg - F\,\mathrm{sen}\,\alpha$

x) $F\cos\alpha = F_a = \mu \cdot N = \mu(mg - F\,\mathrm{sen}\,\alpha)$

>Se il corpo si muove

ⓐ

x) $F_{xt} = F\cos\alpha - \mu N = F\cos\alpha - \mu(mg - F\,\mathrm{sen}\,\alpha) =$

$= F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\,\mathrm{sen}\,\alpha =$

$= F\cos\alpha\,(1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha) - \mu mg$

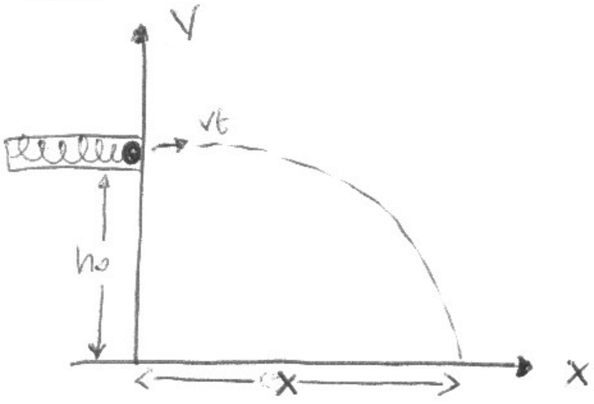
ⓑ La forza è massima quando la derivata rispetto ad α è NULLA

$$\frac{dF_{xt}}{d\alpha} = 0 \rightarrow \frac{dF\cos\alpha}{d\alpha} - \cancel{\frac{d(\mu mg)}{d\alpha}} + \mu\frac{dF\,\mathrm{sen}\,\alpha}{d\alpha} =$$

$$= -F\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mu F\cos\alpha = 0 \rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \mu$$

$$\mathrm{arctg}\,\mu = \alpha = 14^\circ$$

ESERCIZIO DINAMICA



Si supponga di avere un cannone a molla disposto come in figura. La molla viene inizialmente compressa di una lunghezza $x_0 = 1\,m$ e poi lasciata libera, lancia una massa $m = 1\,kg$. Se la costante elastica della molla è $k = 100\ N m^{-1}$, calcolare:

(a) la velocità con cui viene lanciata la massa m

(b) a che distanza x la massa cade sulla superficie terrestre se il cannone si trova ad un'altezza h_0 da questa

$x_0 = 1\,m \qquad m = 1\,kg$

$k = 100\ N m^{-1}$

a) $V = ?$

b) $x = ?$

(1) $$ma = m\frac{dv}{dt} = -k \cdot x \qquad dv = -\frac{k}{m} x\, dt$$

moltiplico per $v = \frac{dx}{dt}$

$$v\, dv = -\frac{k}{m} x\, v\, dt = -\frac{k}{m} x\, dx$$

INTEGRIAMO

$$\int_0^v v\, dv = -\frac{k}{m}\int_{-x_0}^{0} x\, dx \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{k}{2m} x_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_0 = 10\, m/s$$

(2) Dopo che esce dal cannone

$$\begin{cases} x = v \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0 \rightarrow y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2} + h_0 \end{cases}$$

arriva al suolo quando $\boxed{y = 0}$

$$x = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\, v$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE

① Un proiettile fermo scoppia dividendosi in due parti di masse $m_1 = 3{,}2\,kg$ e $m_2 = 2\,kg$

ⓐ Se la velocità del primo frammento è $V_1 = 400\,m/s$ qual è quella del secondo frammento?

ⓑ Se il proiettile, anziché fermo al momento dello scoppio, fosse stato dotato di una velocità $V_0 = 600\,m/s$ nella stessa direzione del moto dei due frammenti, quali sarebbero le velocità dei frammenti?

— SOLUZIONE —

ⓐ Nell'esplosione SI DEVE CONSERVARE LA QUANTITÀ DI MOTO

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = 0 \qquad \vec{V}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{V}_1 = -1{,}6\,\vec{V}_1$$

ⓑ L'esplosione del proiettile mantiene le stesse caratteristiche ma è visto da un sistema di riferimento diverso nel quale il proiettile, prima dell'esplosione ha una velocità V_0.
in questo sistema di riferimento la velocità dei frammenti è:

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_1 + \vec{V}_0 \qquad \vec{V}_2' = \vec{V}_2 + \vec{V}_0$$

$$V_1' = 1000\,m/s \qquad V_2' = 40\,m/s$$

---

② UN cannone spara un proiettile di massa $m = 40\,kg$ con una velocità $V = 800\,m/s$

a) Qual è la quantità di moto del cannone dopo lo sparo?

b) Se la massa del cannone è $M = 1000\,kg$ quale sarà la velocità di rinculo?

La quantità di moto del cannone + proiettile si deve conservare per cui

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0 \qquad V = \frac{m}{M} v = 32\,m/s$$

QUANTITÀ DI MOTO CANNONE

$$Q = M \cdot V = 32\,000\,kg\frac{m}{s}$$

ESERCIZIO SUL LAVORO E SUL MOMENTO ANGOLARE

Si consideri un sistema costituito da due masse uguali m a distanza d_0, che ruotano intorno ad un asse che passa per il loro baricentro ed è perpendicolare alla loro congiungente.
Sia ω_0 LA VELOCITÀ DI ROTAZIONE. Si supponga che le due sfere sotto l'azione di una molla inizialmente compressa si allontanino fino a raggiungere una separazione d_1.

ⓐ SI TROVI LA "NUOVA VELOCITÀ" ANGOLARE DEL SISTEMA ω_f

ⓑ SI TROVI IL RAPPORTO TRA L'ENERGIA CINETICA FINALE ED INIZIALE

$$v_0 = \omega_0 \frac{d_0}{2}$$

ⓐ IL MOMENTO ANGOLARE DEL SISTEMA È:

$$L = 2\left(m v_0 \frac{d_0}{2}\right) = m\omega_0 \frac{d_0^2}{2}$$

$v_0 \to \omega_0 \frac{d_0}{2}$

NON VI SONO FORZE ESTERNE L SI CONSERVA, per cui:

$$L = 2\left(m v_0 \frac{d_0}{2}\right) = m\omega_0 \frac{d_0^2}{2} = 2\left(m v_f \frac{d_1}{2}\right) = m\omega_f \frac{d_1^2}{2}$$

v_f finale
d_1 finale

$$m\omega_0 \frac{d_0^2}{2} = m\omega_f \frac{d_1^2}{2}$$

$$\omega_f = \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2 \omega_0$$

ⓑ ENERGIA CINETICA INIZIALE

$$\boxed{T_i = 2\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right)} \longrightarrow T_i = 2\left(\frac{1}{2} m v_0^2\right) = m\omega_0^2 \frac{d_0^2}{4}$$

$v_0 = \omega_0 \frac{d_0}{2}$

$$\boxed{T_f = 2\left(\frac{1}{2} m v_f^2\right)} = m\omega_f^2 \frac{d_1^2}{4} = \frac{m\omega_0^2}{4} \cdot \frac{d_0^4}{d_1^2}$$

$$\boxed{\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2}$$

$$\Delta T = T_f - T_i = \frac{m\omega_0^2}{4} d_0^2 \left(\frac{d_0^2}{d_1^2} - 1\right) = T_i\left[\left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2 - 1\right]$$

LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA CORRISPONDE AL LAVORO FATTO DALLA FORZA CHE AGISCE SULLE DUE MASSE. INFATTI, DURANTE L'ESPANSIONE, ASSUMENDO CHE QUESTA SIA MOLTO LENTA, DOVRÀ ESSERE

$$F = m\omega^2 \frac{x}{2}$$

dove x è la distanza generica fra le due masse, compresa fra d_0 e d_1. Nello stesso tempo, per la conservazione del momento angolare:

$$\omega x^2 = \text{cost} = \omega_0 d_0^2 \qquad \text{per cui} \quad F = m\omega^2 \frac{x}{2} = \frac{m\omega_0^2 d_0^4}{2x^3}$$

Il lavoro fatto da tale forza durante l'espansione da d_0 a d_1 sarà:

$$L_{\text{lavoro}} = -\int_{d_0}^{d_1} F\,dx = -\frac{m\omega_0^2}{2} d_0^4 \int_{d_0}^{d_1} \frac{dx}{x^3} = \frac{m\omega_0^2 d_0^4}{2}\left[\left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2 - 1\right]$$

CHE È UGUALE A $\boxed{\Delta T}$