Esercizio 1

Un satellite cilindrico di raggio r=4.5m e massa m=5.4 10^3 kg inizialmente fermo, viene messo in rotazione per mezzo di due propulsori montati tangenti al cilindro; determinare:

- il modulo F della forza che deve essere applicata da ciascun razzo affinché il satellite raggiunga la velocità angolare di modulo ω=3.5 rad/s nel tempo Δt=360 s;
- l'energia cinetica finale del satellite.

Esercizio 2

Si consideri un cilindro omogeneo di massa m=6.3 kg e raggio r=64 cm che rotola su di un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro G del disco di modulo F=12 N; sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è μs=0.55, determinare:

- il modulo della sua velocità lineare dopo t=4.2 s;
- l'energia cinetica all'istante t;
- il lavoro fatto dalla forze agenti sul cilindro;
- il modulo massimo che può avere la forza perché il rotolamento avvenga senza strisciare.

Esercizio 3

Una sbarra di massa m_1=0.4 Kg e lunghezza l=0.8 m è fissata tramite un perno, collocato nel centro della sbarra, ed è libera di ruotare attorno a esso. Un oggetto puntiforme di massa m_2=0.08 Kg colpisce la sbarra in un estremo con velocità v_i=2 m/s. Assumendo il sistema in quiete prima dell'urto e assumendo quest'ultimo come elastico, con v_f parallela a v_i, determinare la velocità angolare e la velocità finale della sbarra.

Esercizio 4

Un corpo rigido è costituito da un cilindro di 10kg e raggio 12.0cm, più due cilindri coassiali identici ("pioli"), ciascuno di 2.5 kg e raggio 4.0 cm. I due "pioli" sono appoggiati su una guida rettilinea, inclinata di 35° rispetto all'orizzontale, con coefficiente di attrito statico 0.65. Inizialmente il corpo è tenuto in equilibrio da un filo orizzontale.

- Calcolare la tensione del filo.
- Calcolare l'accelerazione del corpo se il filo si spezza e verificare che sia soddisfatta la condizione di puro rotolamento.
- Qual è la massima inclinazione della guida per cui si ha puro rotolamento?

Esercizio 5

Un corpo rigido è formato da un disco di massa 5.0 kg e raggio 15 cm, al quale è saldata una sbarra di 2.0 kg lunga 60 cm. Il tutto è vincolato a ruotare intorno all'asse del disco ed è mantenuto in equilibrio, con l'asta inclinata di 45° verso l'alto, da un corpo sospeso al diametro esterno del disco. Calcolare la massa del corpo. Il filo si spezza.

- Calcolare la velocità angolare del corpo rigido quando l'asta passa per l'orizzontale.
- Calcolare la reazione del vincolo in quell'istante.

Esercizio 6

Un disco omogeneo di raggio R rotola su un piano orizzontale scabro. Si determini quale legame deve esserci tra la velocità iniziale del suo centro di massa e la velocità angolare rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per il suo centro di massa perché si possa verificare che:

- Ad un certo istante il corpo si arresti;
- Ad un certo istante incominci a rotolare senza strisciare con velocità del suo centro di massa uguale a $-\frac{4}{9}v_i$.

Esercizio 7

Un disco omogeneo, di massa M=10 kg e raggio R=0.5 m, è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un proiettile puntiforme di massa m=l kg viene sparato tangenzialmente contro il disco con velocità v= 30 m/s. Supponendo che l'urto sia anelastico, calcolare, la velocità angolare del disco dopo l'urto, espressa in rad/s.

Esercizio 8

Una sbarretta uniforme di massa M=2 kg e lunghezza l=1 m, è libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale senza attrito passante per un suo estremo. Sull'altro estremo della sbarretta è fissato un corpo, approssimabile ad un punto materiale, di massa m=2 kg. La sbarretta inizialmente ferma in posizione orizzontale, viene lasciata cadere. Determinare:

- la posizione del centro di massa del sistema;
- l'accelerazione angolare iniziale del sistema e l'accelerazione tangenziale iniziale dell'estremità destra della sbarretta;
- la velocità del centro di massa quando il sistema raggiunge la posizione verticale.

Esercizio

Scelgo come polo un punto sull'asse di simmetria del cilindro

$\Rightarrow M_0 = I \frac{\omega}{\Delta t}$

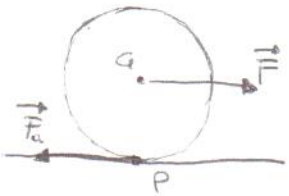
Con $I = \frac{1}{2} m r^2$ e $M_0 = 2|\vec{r} \times \vec{F}| = 2Fr$

$\Rightarrow 2Fr = \frac{1}{2} m r^2 \frac{\omega}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{mr\omega}{4\Delta t} = 59\,N$

- L'energia cinetica è dovuta alla rotazione

$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} m r^2 \omega^2 = 3{,}4 \cdot 10^3\,J$

Esercizio



Asse di rotazione perpendicolare al cilindro e passante per G

$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F}_a = m\vec{a}_G \\ M = I\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} F - F_s = m a_G \\ M_{att.} = F_s r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha \end{cases}$ con $a_G = \alpha r$

$\Rightarrow F_s r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_G}{r} \Rightarrow F = \frac{1}{2} m a_G + m a_G \Rightarrow a_G = \frac{2}{3}\frac{F}{m}$

$\Rightarrow V_G = a_G t = 5{,}3\,m/s$

- $K = K_G + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{4} m r^2 \frac{V_G^2}{r^2} = \frac{3}{4} m V_G^2 = 1{,}3 \cdot 10^2\,J$

- $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$ $\quad s = \frac{1}{2} a_G t^2 = \frac{1}{3}\frac{F}{m} t^2$

$\Rightarrow L = Fs = \frac{1}{3}\frac{F^2 t^2}{m} = 1{,}3 \cdot 10^2\,J$

- Da $F - F_a = m a_G \Rightarrow F - F_a = m \frac{2}{3}\frac{F}{m} \Rightarrow F_a = \frac{1}{3} F$

$\Rightarrow F_{a\,max} = \mu_s N = \mu_s P = \mu_s mg$

Per avere solo rotolamento $F \le 3 F_{a\,max} = 3\mu_s mg = 10^2\,N$

Esercizio

La barra è vincolata: - Use conservazione del momento angolare e dell'energia

$$\begin{cases} m_2 v_i \frac{\ell}{2} = m_2 v_f \frac{\ell}{2} + I\omega \\ \frac{1}{2} m_2 v_i^2 = \frac{1}{2} m_2 v_f^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases} \quad \text{con } I = \frac{1}{12} m_1 \ell^2$$

$$\begin{cases} m_2 \frac{\ell}{2} (v_i - v_f) = I\omega \quad (1) \\ m_2 (v_i^2 - v_f^2) = I\omega^2 = m_2 (v_i - v_f)(v_i + v_f) \end{cases}$$

→ Divido la seconda per la prima

$\frac{2}{\ell}(v_i + v_f) = \omega \rightarrow v_f = \frac{\ell}{2}\omega - v_i$ → sostituisco v_f nella (1)

$$\Rightarrow I\omega = m_2 \frac{\ell}{2}\left(v_i - \frac{\ell}{2}\omega + v_i\right) = m_2 \ell v_i - m_2 \ell^2 \frac{\omega}{4}$$

$$\rightarrow \omega = \frac{m_2 \ell v_i}{I + \frac{m_2 \ell^2}{4}} = \frac{m_2 \ell v_i}{\frac{1}{4}\ell^2\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)} = 3{,}75 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{\ell}{2}\omega - v_i = -0{,}5 \text{ m/s}$$

Esercizio

Per avere equilibrio deve essere nulla la risultante delle forze e dei momenti

$$\begin{cases} \vec{T} + \vec{F}_a + \vec{P} = 0 \\ \vec{M}_T + \vec{M}_a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T\cos\theta + F_a - m_1 g \sin\theta = 0 \\ TR - F_a r = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad F_a = \frac{TR}{r}$$

$$T = \frac{m_1 g \sin\theta \cdot r}{R + r\cos\theta} = 22{,}1 \text{ N}$$

Dopo che il filo si spezza

$$\begin{cases} m_1 g \sin\theta \cdot r = I\alpha \\ m_1 g \sin\theta - F_a = m_1 a \\ N - m_1 g \cos\theta = 0 \end{cases} \quad \text{con } I = \frac{1}{2} m_1 R^2 + 2\frac{1}{2} m_2 r^2, \quad a = \alpha r$$

$$\Rightarrow m_1 g \sin\theta \cdot r = I\frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{m_1 g r^2 \sin\theta}{I} = 1{,}77 \text{ m/s}$$

$$F_a = m_1 g \sin\theta - m_1 a = 57{,}7 \text{ N}$$

$$F_{a\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta = 78{,}3 \text{ N}$$

→ Per avere slittamento deve avere $F_a < F_{a\max}$ ⇒ condizione verificata!

$m a \quad F_a = m_T g \operatorname{sen}\theta - \frac{m_T^2 r^2 g \operatorname{sen}\theta}{I} = m_T g \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right)$

→ Per trovare l'angolo massimo per avere solo rotolamento deve essere:

$F_a \leq F_{a_{max}} \Rightarrow m_T g \operatorname{sen}\theta \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right) \leq \mu_s m_T g \cos\theta$

$\Rightarrow tg\,\theta \leq \mu_s \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right) \Rightarrow \theta \leq tg^{-1}\left[\mu_s \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right)\right]^{-1} = 43{,}5°$

Esercizio

Ho equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione

$m g R = m_a g \left(R + \frac{l}{2}\right)\cos\theta \Rightarrow m = \frac{m_a}{R}\left(R + \frac{l}{2}\right)\cos\theta = 4{,}24\,Kg$

- Dopo che il filo si spezza

→ Ho conservazione di energia

$E_{m_{iniz.}} = E_{m_{fin.}}$

$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow m_A g \left(R + \frac{l}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} I \omega^2$ con $I = I_D + I_A$

$I_D = \frac{1}{2} m_d R^2$

$I_A = \frac{1}{12} m_A l^2 + m_A \left(R + \frac{l}{2}\right)^2$

Sostituisco e trovo

$\omega = \sqrt{\frac{2 m_A g \left(R + \frac{l}{2}\right)\operatorname{sen}\theta}{I}} = 5{,}12\ rad/s$

Per la reazione vincolare

$m_{tot}\vec{a}_{cm} = \vec{R}_{est.}$ con $\vec{R}_{est.} = m_{tot}\vec{g} + \vec{F}_v$ $\qquad F_v$: forza vincolare

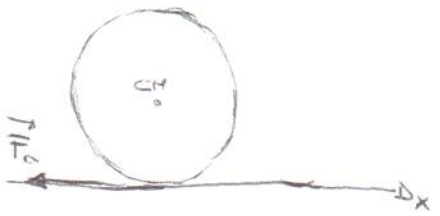
$a_{cm} = -\omega^2 d$

$\Rightarrow \begin{cases} m_{tot} a_x = F_{v_x} \\ m_{tot} a_y = F_{v_y} - m_{tot} g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{v_x} = -m_{tot}\omega^2 d = -23{,}6\ N \\ F_{v_y} = m_{tot} g - m_{tot}\alpha d = 64 N \end{cases}$

$a_x = -\omega^2 d$

$a_y = -\alpha d = -\frac{m_{tot} g}{I} d$

Esercizio



L'unica forza in gioco è la forza di attrito

$$\begin{cases} \vec{F}_a = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{F}_a \vec{R} = I_{CM} \vec{\alpha}_{CM} \end{cases} \qquad \begin{cases} -F_a = m a_{CM} \\ F_a R = I_{CM} \alpha_{CM} \end{cases} \qquad \text{con } I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} V_{CM} = V_0 + a_{CM} t = V_0 - \frac{F_a}{m} t \\ \omega_{CM} = \omega_0 + \alpha_{CM} t = \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t \end{cases}$$

- Quando il disco si arresta V_{CM} e ω_{CM} sono nulle

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0 - \frac{F_a}{m} t = 0 \\ \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{V_0 m}{F_a} \\ \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} \cdot \frac{V_0 m}{F_a} = \omega_0 + \frac{2 R V_0 m}{m R^2} = 0 \Rightarrow \omega_0 = -2\frac{V_0}{R} \end{cases}$$

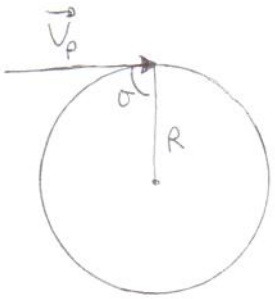
- Per il secondo punto devo imporre

$$\begin{cases} V_{CM} = -\frac{4}{9} V_0 = V_0 - \frac{F_a}{m} t \\ \omega_{CM} = \frac{V_{CM}}{R} = \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{13}{9} V_0 \frac{m}{F_a} \\ \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t = -\frac{4}{9} \frac{V_0}{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sostituisco t nella seconda equazione e trovo

$$\omega_0 = -\frac{10}{3} \frac{V_0}{R}$$

Esercizio



All'inizio il disco è fermo $\Rightarrow \omega_0 = 0$

- Si conserva il momento angolare $\Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$

$\vec{L}_i = \vec{L}_{proiettile} = \vec{P} \times \vec{R} = m\vec{v}_p \times R$

$\Rightarrow L_i = m v_p R \sin\theta = m v_p R \quad$ con $\theta = 90°$

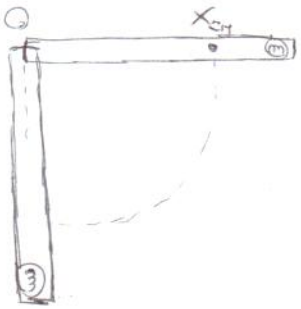
- $\vec{L}_f = I\omega$

con $I = I_0 + I_p = I_0 + mR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$

$\Rightarrow L_i = L_f \Rightarrow I\omega = m v_p R$

$\omega\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right) = m v_p R \Rightarrow \omega = \dfrac{m v_p R}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = 10 \text{ rad/s}$

Esercizio



- $x_{CM} = \dfrac{M x_{asta} + m x_{massa}}{m+M} = \dfrac{M\frac{\ell}{2} + m\ell}{m+M} = 0{,}75 \text{ m}$

- Momento rispetto al polo O

$\vec{M}_0 = \vec{x}_{CM} \times \vec{F} = \vec{x}_{CM} \times \vec{P}$

$\Rightarrow \begin{cases} M_0 = x_{CM}(m+M)g \\ M_0 = I_{asta}\alpha \end{cases}$

con $I = I_{asta} + I_m$

$\rightarrow I_m = m\ell^2$

$I_{asta} = I_{asta,CM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{M\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{4}{3}M\ell^2 = 2{,}67 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

$M_0 = I\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{M_0}{I} = \dfrac{x_{CM}(m+M)g}{I} = 11{,}01 \text{ rad/s}^2$

$\Rightarrow a_t = \alpha\ell = 11{,}01 \text{ m/s}^2$

- Si conserva l'energia meccanica

$E_{mecc,i} = E_{mecc,f}$

$E_i = U_i + \cancel{K_i}^{0} = (m+M)g x_{CM}$

$$E_p = U_f^{\cancel{0}} + K_f = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{V_{CM}^2}{X_{CM}^2}$$

$$\Rightarrow (m+M) g X_{CM} = \frac{1}{2} I \frac{V_{CM}^2}{X_{CM}^2} \Rightarrow V_{CM} = \sqrt{\frac{2 X_{CM}^3 (m+M) g}{I}} = \sqrt{\frac{3 X_{CM}^3 g}{\ell^2}} = 3{,}52 \text{ m/s}$$