Esercizio 1
Un blocco di massa M=4.0 kg è sospeso, in equilibrio statico, ad una molla ideale di costante elastica K=500 N/m. Un proiettile di massa m=50 g viene sparato verticalmente dal basso (alla velocità di 150 m/s) contro il blocco, nel quale rimane incastrato.

- Di quanto è, inizialmente , allungata la molla?
- Quale è la velocità del sistema immediatamente dopo l'urto?
- Si trovi l'ampiezza del moto armonico semplice risultante.

Esercizio 2
Su un piano scabro, inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale, è posto in quiete un corpo (assimilabile ad un punto materiale) di massa m_1=1 kg. Il coefficiente di attrito statico tra corpo m_1 e piano è μ_{1s}=0.7, il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è μ_{1d}=0.4. Un altro corpo di massa m_2=m_1 viene lanciato dalla sommità del piano con velocità v_0=0.05 m/s (parallela al piano stesso). Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo m_2 e il piano è μ_{2d}=0.3. Dopo un tempo t=0.9 s il corpo 2 urta in modo completamente anelastico il corpo 1.
Si determinino:

- La forza di attrito statico tra corpo m_1 e piano;
- La distanza percorsa lungo il piano da m_2 prima di urtare m_1;
- L'accelerazione del sistema dopo l'urto.

Esercizio 3
Un palla rigida di massa m=0.5 kg è agganciata ad una fune lunga L=0.8 m., fissata all'altra estremità. La palla viene abbandonata quando la fune è tesa e orizzontale. Giunta nel punto più basso della traiettoria, la palla colpisce elasticamente e istantaneamente un blocco rigido di massa M=3 kg, inizialmente fermo su una superficie scabra. Si calcolino:

- la velocità della palla immediatamente dopo l'urto;
- la velocità del blocco immediatamente dopo l'urto;
- Supponendo che il blocco si metta in moto con velocità v2f, quanto deve valere il coefficiente di attrito dinamico tra piano e corpo affinché quest'ultimo si arresti dopo aver percorso una distanza d=74cm.

Esercizio 4
Si supponga che un corpo venga lanciato dalla superficie terrestre con una velocità iniziale $v = \sqrt{R_T g}$

- verificare che la velocità è inferiore alla velocità di fuga;
- determinare l'altezza massima raggiunta.

Esercizio 5
Due stelle di massa M e m, poste ad una distanza d, ruotano su orbite circolari attorno al loro centro di massa. Mostrare che ogni stella ha un periodo dato da $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)} d^3$

Esercizio 6
Due veicoli spaziali identici di massa 3250 Kg viaggiano su una stessa orbita circolare ad un'altezza di 270 Km sopra la superficie terrestre. Il veicolo A precede il veicolo B di 105 s. In un certo punto P il pilota di B accende per breve tempo un razzo diretto in avanti riducendo la velocità dello 0,95%. Trovare energia, periodo e semiasse maggiore di B prima e dopo la correzione di velocità e stabilire in quale successione i due veicoli passeranno nuovamente in P.

Esercizio 7

Una particella di massa m_1, all'istante iniziale t=0 ha velocità nulla $v_0=0$ ed è individuata dal vettore posizione $r_0 = 3i + j - 4k$. Applicando la forza, funzione del tempo, $F=2mi + 3mtk$, all'istante t=2 s urta un'altra particella di massa $m_2=3m$, animata di velocità $v_2=4/3i + 2k$. Determinare le coordinate del punto in cui avviene l'urto e la velocità delle particelle dopo l'urto, supponendo che sia completamente anelastico.

Esercizio 8

Una molla di costante elastica K=343 N/m è posta all'interno di un recipiente verticale. Sulla molla è appoggiato un disco di massa M=0.7 kg. Inizialmente il sistema è in equilibrio statico; su di esso urta in modo completamente anelastico un punto materiale che ha massa m=0.1 kg. Immediatamente prima dell'urto la velocità del punto materiale è verticale, diretta verso il basso e ha modulo v=20 m/s. Si determinino:

a) La compressione iniziale della molla

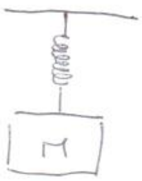
b) L'energia dissipata nell'urto

c) La compressione massima della molla.

Esercizio 9

Tre scimmie S_1, S_2 e S_3, di massa $m_1=10$ Kg, $m_2=15$ Kg e $S_3=8$Kg, si muovono su e giù lungo una fune verticale di massa trascurabile appesa a un punto D a un supporto. S_1 sta scendendo con accelerazione costante $a_1=2m/s^2$, S_3 sta salendo con accelerazione costante $a_3=1.5$ m/s^2 e S_2 si sta arrampicando a velocità costante. Qual è, in tale situazione, la tensione T della fune nel punto D?

Esercizio 1



$\vec{P} + \vec{F}_e = 0$

$P - F_e = 0 \Rightarrow Mg - K\Delta x = 0$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{Mg}{K} = 7,84 \cdot 10^{-2} m$

Conservazione quantità di moto

$m\vec{V}_p = (m+M)\vec{V} \Rightarrow mV_p = (m+M)V$

$\Rightarrow V = V_p \frac{m}{m+M} = 1,85 \; m/s$

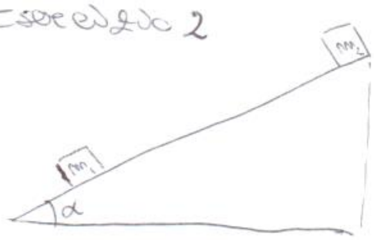
Equazioni del moto armonico semplice

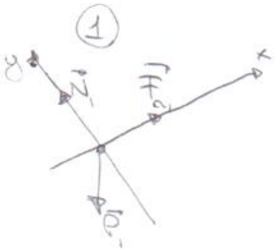
$\begin{cases} x(t) = A\,sen(\omega t + \varphi_0) \\ v(t) = A\omega cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow$ A $t=0$ ha: $\begin{cases} x(0) = A\,sen(\varphi_0) = 0 \\ v(0) = A\omega cos(\varphi_0) = V \end{cases}$

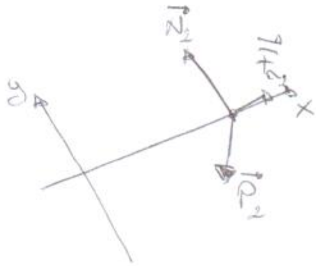
con φ_0: fase iniziale $= 0$

$\Rightarrow A = \frac{V}{\omega} = \frac{V}{\sqrt{K/(m+M)}} = 1,07 \cdot 10^{-1} m$

Esercizio 2







$\vec{P}_1 + \vec{F}_{a_1} = 0$

$-m_1 g\,sen\alpha + F_{a_1} = 0 \Rightarrow F_{a_1} = m_1 g\,sen\alpha = 4,9 N$

Per il corpo 2

$\vec{P}_2 + \vec{F}_{a_2} = m_2\vec{a}$

$-m_2 g\,sen\alpha + \mu_{d_2} N_2 = m_2 a \Rightarrow a = \frac{\mu_{d_2} N_2 - m_2 g\,sen\alpha}{m_2} = \frac{\mu_{d_2} m_2 g\cos\alpha - m_2 g\,sen\alpha}{m_2} = -2,35 \; m/s^2$

$d = v_0 t + \frac{1}{2}|a|t^2 = 9,98 \cdot 10^{-1} m$

- Per ciascun corpo vale

$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g\,sen\alpha + \mu_{d_1} m_1 g\cos\alpha \\ m_2 a = -m_2 g\,sen\alpha + \mu_{d_2} m_2 g\cos\alpha \end{cases} \rightarrow$ Sommo membro a membro con $m_1 = m_2 = m$

$\Rightarrow 2ma = -2mg\,\text{sen}\alpha + g\cos\alpha\, m(\mu_{d_1} + \mu_{d_2})$

$\Rightarrow a = -g\,\text{sen}\alpha + g\cos\alpha \dfrac{(\mu_{d_1} + \mu_{d_2})}{2} = -1{,}93\ m/s^2$

Esercizio 3

Conservazione energia meccanica

$E_{m\,iniz} = E_{m\,fin}$

$U_i + \cancel{K_i}^{\,0} = \cancel{U_f}^{\,0} + K_f$

$mgL = \frac{1}{2} m V_{1i}^2 \Rightarrow V_{1i} = \sqrt{2gL} = 3{,}96\ m/s$

V_{1i} velocità pallina prima di urtare il blocco

- Urto elastico: si conserva quantità di moto e energia cinetica

$$\begin{cases} m_1 V_{1i} = m_1 V_{1f} + M V_{2f} \\ \frac{1}{2} m V_{1i}^2 = \frac{1}{2} m V_{1f}^2 + \frac{1}{2} M V_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow V_{1f} = \frac{m_1 V_{1i} - M V_{2f}}{m_1}$$

$\Rightarrow$ sostituisco nella seconda equazione e trovo

$V_{2f} = \dfrac{2m}{m+M} V_{1i} = 1{,}13\ m/s \Rightarrow V_{1f} = \dfrac{m-M}{m+M} V_{1i} = -2{,}83\ m/s$

- Dopo l'urto si conserva l'energia del sistema $\Rightarrow$ teorema energia cinetica

$\frac{1}{2} M V_{2f}^2 = L_{att.} = \mu_d N d = \mu_d M g d \Rightarrow \mu_d = \dfrac{V_{2f}^2}{2gd} = 0{,}13$

Esercizio 4

$V = \sqrt{R_T g}$ con $g = G\dfrac{m_T}{R_T^2} \Rightarrow V = \sqrt{\cancel{R_T}\, G \dfrac{m_T}{R_T^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\dfrac{G m_T}{R_T}}$

$V_f = \sqrt{\dfrac{2Gm_T}{R_T}} \Rightarrow V < V_f$

- Sulla superficie terrestre

$E_1 = K + U = \frac{1}{2} m V^2 - G\dfrac{m\, m_T}{R_T} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{m\, m_T}{R_T} - G\dfrac{m\, m_T}{R_T} = -\dfrac{1}{2} G \dfrac{m\, m_T}{R_T}$

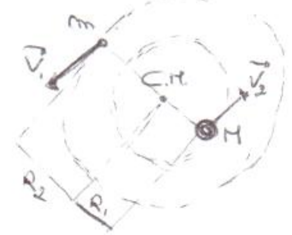
$\Rightarrow$ Quando arriva nel punto più alto $\Rightarrow K = 0$

$\Rightarrow E_2 = U = -G\dfrac{m\, m_T}{R_T + h}$

$\Rightarrow$ L'energia si conserva $\Rightarrow E_1 = E_2$

$-\dfrac{\cancel{G\, m\, m_T}}{2 R_T} = -\dfrac{\cancel{G\, m\, m_T}}{R_T + h} \Rightarrow \dfrac{R_T + h - 2R_T}{2R_T(R_T + h)} = 0 \Rightarrow h = R_T$

Esercizio 5



$d = R_1 + R_2$

- Per la massa M: $\vec{F} = \cancel{M\vec{a}} = M\vec{a}_c$

$$\Rightarrow \frac{GmM}{d^2} = Ma_c = \frac{MV_2^2}{R_2} = \frac{M}{R_2}\left(\frac{2\pi R_2}{T}\right)^2$$

- Per la massa m

$$\frac{GmM}{d^2} = \frac{mV_1^2}{R_1} = \frac{m}{R_1}\left(\frac{2\pi R_1}{T}\right)^2$$

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ Semplifico e sommo le equazioni

$$G(m+M)T^2 = 4\pi^2 d^2 (R_1+R_2) = 4\pi^2 d^3$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)} d^3$$

Esercizio 6

- Prima della attrazione della velocità

$$E = K + U = -\frac{G}{2}\frac{mM_T}{R} = -9{,}76 \cdot 10^{10}\ J$$

con $R = R_T + h = 6640\ Km$

$M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ Kg$

$R_T = 6371\ Km$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}} = 5380\ s$$

Visto che ho moto circolare uniforme $\Rightarrow K = -E = 9{,}76 \cdot 10^{10}\ J$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 7{,}75 \cdot 10^3\ m/s$$

- Dopo la attrazione della velocità $\Rightarrow V' = (1 - 0{,}95\%)V = 7{,}68 \cdot 10^3\ m/s$

Subito dopo la attrazione U non varia $\Rightarrow U = U'$

$$\Rightarrow E' = K' + U' = \frac{1}{2}mV'^2 + U = -9{,}94 \cdot 10^{10}\ J$$

$$\Rightarrow R' = -\frac{GmM_T}{E'} = 6520\ Km$$

$$\Rightarrow T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_0'^3}{2E'}} = 5240\ s$$

Il periodo di B è diminuito di 140 s rispetto quello iniziale B, che era passato dopo 105 s ~~da~~ rispetto ad A, ora passerà ~~[illegible]~~ in ? 35 s prima di A

Esercizio 7

La velocità della prima particella si ottiene integrando l'accelerazione

$$V_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{F}{m}\, dt = \frac{1}{m}\int_0^t F dt = 2t\, i + \frac{3}{2}t^2 K$$

La posizione della prima particella è data da:

$$r_1 = \int_{t_1}^{t_2} V_1\, dt = \int_0^t V_1\, dt = t^2 i + \frac{1}{2}t^3 K + r_0 = (t^2-3)i + j + \left(\frac{1}{2}t^3 - 4\right)K$$

- L'urto si ha per $t = 2s$ $\Rightarrow$ sostituisco in r_1 e trovo il punto di impatto

$$r_1(2s) = i + j \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1\,m \\ y_1 = 1\,m \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

- Dopo l'urto ho conservazione della quantità di moto

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}$$

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}$$

$$\cancel{m}V_1 + 3\cancel{m}V_2 = 4\cancel{m}V \Rightarrow V = V_1 + 3V_2$$

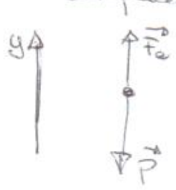
$\Rightarrow$ sostituisco le espressioni di V_1 e V_2 $\Rightarrow$ $V = \left(\frac{1}{2}t + 1\right)i + \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{2}\right)K$

- La velocità dopo l'urto vale $V(2s) = 2i$

$\Rightarrow$ Le particelle procedono sull'asse x alla velocità di $2\,m/s$

Esercizio 8

- Compressione iniziale



$$\vec{P} + \vec{F}_e = 0$$

$$-P + F_e = 0$$

$$-Mg + K\Delta e = 0 \Rightarrow \Delta e = \frac{Mg}{K} = 2\cdot 10^{-2}\,m$$

- Urto anelastico: si conserva solo la quantità di moto

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$mV = (M+m)V_f \Rightarrow V_f = \frac{m}{M+m}V = 2{,}5\,m/s$$

- L'energia dissipata è data dalla variazione dell'energia cinetica

$$\Delta E = E_f - E_i$$

con $E_i = \frac{1}{2} m V^2$

$$E_f = \frac{1}{2}(m+M)V_f^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}(m+M)V_f^2 - \frac{1}{2} m V^2 = -17,5 \text{ J}$$

- Ho conservazione energia meccanica

$$E_{mecc\,i} = E_{mecc\,f}$$

$$E_{mecc\,i} = U_i + K_i + F_{e\,i} = -(m+M)g\Delta e + \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 + \frac{1}{2}K\Delta e^2$$ (Prendo come riferimento la molla a riposo)

$$E_{mecc\,f} = U_f + \cancel{K_f}^{0} + F_{e\,f} = -(m+M)g\Delta x + \frac{1}{2}K\Delta x^2$$

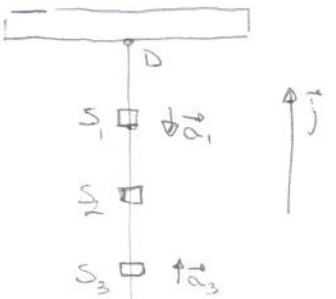
con Δx: massima compressione

$E_{mecc\,i} = 2,57$ J

→ Risolvo l'equazione di secondo grado e trovo

$$\Delta x = \frac{(m+M)g \pm \sqrt{(m+M)^2 g^2 + 2K E_{mecc\,f}}}{K} = 1,44 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

Esercizio 9



$\vec{a}_1 = -a_1 \vec{j}$

$\vec{a}_2 = 0$

$\vec{a}_3 = a_3 \vec{j}$

- L'accelerazione del centro di massa vale: $\vec{a}_{CM} = \frac{d^2 \vec{x}_{CM}}{dt^2} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-m_1 a_1 + m_3 a_3}{M}\vec{j}$

con $M = m_1 + m_2 + m_3$

- La tensione è uguale alla reazione del vincolo in D data da:

$$\vec{T} + \vec{P} = M\vec{a}_c$$

$$T - P = Ma_c \Rightarrow T = P + Ma_c = Mg + \cancel{M} \cdot \frac{-m_1 a_1 + m_3 a_3}{\cancel{M}} = 315 \text{ N}$$