

### Esercizio 1

Un proiettile è lanciato verso l'alto con una velocità di 20 m/s sotto un angolo di  $30^\circ$  con l'orizzontale. Nel corso della sua traiettoria esplose, suddividendosi in due frammenti, uno dei quali ha massa doppia dell'altro. I due frammenti colpiscono il suolo nello stesso istante. Il frammento con la massa minore colpisce il suolo a 20 m dal punto del lancio. In quale punto colpisce il suolo il secondo frammento?

### Esercizio 2

Una pallina di gomma viene lasciata cadere, da ferma, da una altezza di 1 m, e rimbalza sul pavimento. Si osserva che l'energia cinetica della pallina, tra l'istante subito prima e l'istante subito dopo ogni rimbalzo, diminuisce del 20%. Dopo il primo rimbalzo, trascurando l'attrito con l'aria, a quale altezza massima ci aspettiamo che possa arrivare la pallina?

### Esercizio 3

Un uomo di massa  $M=80$  Kg viaggia su un carrello di massa  $m=40$  Kg su un pavimento orizzontale con una velocità di  $v_{CM}=2$  m/s. l'uomo salta giù dal carrello dalla parte posteriore e la sua velocità rispetto al suolo vale  $v_M=1$  m/s nella direzione del moto ma nel verso opposto:

- Qual è la velocità del C.M del sistema uomo-carrello prima e dopo che l'uomo ha saltato?
- Qual è la velocità del carrello dopo che l'uomo ha saltato?
- Qual è la velocità del C.M. dopo che l'uomo ha urtato il suolo arrestandosi?
- A quale forza è dovuta la variazione della velocità del C.M.?
- Quanta energia è stata spesa dall'uomo nel salto?

### Esercizio 4

Un uomo di massa  $m_1=75$  kg si trova a poppa di una zattera di massa  $m_2=200$  kg e lunghezza  $\ell=10$ m la cui prua si trova a contatto con un molo; l'uomo cammina sulla zattera per scendere sul molo. Determinare la distanza fra la prua e il molo quando l'uomo ha raggiunto la prua.

### Esercizio 5

Su un carrello di massa  $m_1=0.5$  Kg è montato un cannone a molla. Nella condizione iniziale il carrello è fermo e la molla, di costante elastica  $k=5 \cdot 10^4$  N/m, è compressa di un tratto  $\Delta l=1$  cm. Determinare l'energia cinetica finale  $K_2$  del proiettile, di massa  $m_2=50$  g, nelle due ipotesi:

- Il carrello viene tenuto fermo;
- Il carrello è lasciato libero di rinculare.

### Esercizio 6

E' assegnata la funzione energia potenziale  $U(x)=A\cos(kx)-Bx$ , con  $A=0.12$  J,  $B=0.63$  N,  $k=2,5$ m<sup>-1</sup> costanti assegnate. Si consideri un punto materiale di massa  $m=22$  g inizialmente fermo nell'origine ( $x=0$ ). Si determini:

- la forza agente sul punto materiale;
- la sua velocità, quando passa per il punto di ascissa  $x_0 = \frac{2\pi}{k}$

### Esercizio 7

Una scala di massa  $m=3,5$  kg e lunghezza  $\ell$  è appoggiata ad una parte verticale formando con il pavimento un angolo  $\alpha=65^\circ$ ; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra la scala e la superficie del pavimento è  $\mu_s=0,36$  e che l'attrito con la parete verticale è trascurabile, determinare

- le reazioni vincolari nei punti di appoggio;
- l'angolo minimo  $\alpha$  che consente alla scala di stare in equilibrio.

### Esercizio 8

Due punti materiali di uguale massa  $m=0,5$  Kg sono posti agli estremi di una sottile asta rigida di massa trascurabile e lunghezza  $2R=40$  cm, e ruotano in un piano orizzontale con velocità angolare costante  $\omega=10$  s<sup>-1</sup> rispetto al centro dell'asta. Il sistema è montato sopra una piattaforma a cuscino d'aria che si muove con velocità  $v_0=0,8$  m/s lungo un piano orizzontale. Calcolare:

1. l'energia cinetica del sistema dei due punti
2. il momento angolare relativo al centro di massa

### Esercizio 9

Un corpo puntiforme di massa  $m=1$  kg è lanciato orizzontalmente dal bordo di un carrello di massa  $M=6$  kg, inizialmente fermo su un binario privo d'attrito. Il corpo attraversa l'intera lunghezza  $l=2$ m del carrello in un tempo  $t=0,4$  s. Si trovi l'energia rilasciata nel lancio.

### Esercizio 1

Calcoliamo il punto di impatto del proiettile se non esplodesse

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \text{gittata } X_{\text{crit}} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = 35,3 \text{ m}$$

Dopo l'esplosione il centro di massa non varia

$$X_{\text{cm}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 m + x_2 2m}{3m}$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{3m X_{\text{cm}} - m x_1}{2m} = 42,8 \text{ m}$$

### Esercizio 2

Alto di caduta libera

$$S_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{g}}$$

$$v_1 = g t_1 = \sqrt{2g S_1}$$

$$K_2 = 0,8 K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 = 0,8 \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_2 = v_1 \sqrt{0,8}$$

$\Rightarrow v_f = v_2 - g t_2$  con  $v_f = 0$  (la palla si ferma nel punto più alto dopo il rimbalzo)

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_2}{g} = \frac{v_1}{g} \sqrt{0,8} = \sqrt{\frac{1,6 S_1}{g}}$$

$$S_2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = v_2 t_2 - \frac{1}{2} g \frac{v_2^2}{g^2} = v_1 \sqrt{0,8} \cdot \frac{v_1 \sqrt{0,8}}{g} - \frac{1}{2} \frac{0,8 v_1^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{0,8 v_1^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{0,8 \cdot 2g S_1}{g} = 0,8 m$$

### Esercizio 3

- Nelle istante precedenti e successive al salto dell'uomo, la velocità del c.m. non cambia  $\Rightarrow v_{\text{cm}} = 2 \text{ m/s}$

- Dopo il salto ha:

$$m v_c + H v_u = (m+H) v_{\text{cm}}$$

$$m v_c - H v_u = (m+H) v_{\text{cm}}$$

$$v_c = \frac{(m+H) v_{\text{cm}} + H v_u}{m} = 8 \text{ m/s}$$

- Quando l'urto si ferma ho:

$$(m+M)V'_{CH} = \cancel{mV_c} - MV_u \quad \text{con } V_u=0$$

$$\Rightarrow V'_{CH} = \frac{m}{m+M} V_c = \frac{8}{3} \text{ m/s} = 2,67 \text{ m/s}$$

- la forza che permette all'urto di fermarsi è la forza d'attrito

-  $\Delta K = K_D - K_P$  cioè la differenza di energia cinetica prima e dopo lo scontro

$$K_P = \frac{1}{2} (m+M) V_{CH}^2 = 240 \text{ J}$$

$$K_D = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} M V_u^2 = 1320 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \Delta K = K_D - K_P = 1080 \text{ J}$$

## Esercizio 2\*

\* Altro modo di risoluzione (più veloce!)

- Prima dei urti

$$E_{mecc\ i} = E_{mecc\ p.}$$

$$U_{1p} + K_{1p} = U_{1p}^0 + K_{1p}^0$$

- Dopo i urti

$$K_{1D} = 80\% K_{2p} = 0,8 K_{2p}$$

$$E_{mecc\ i} = E_{mecc\ f}$$

$$U_{1D} + K_{1D} = U_{1D} + K_{2D}$$

$$\Rightarrow U_{2D} = K_{2D} = 0,8 K_{2p} = 0,8 U_{1p}$$

$$\Rightarrow m g h_f = 0,8 m g h_i \quad \Rightarrow h_f = 0,8 h_i = 0,8 \text{ m}$$

#### Esercizio 4

Sul sistema corno-sattoria non agiscono forze esterne

⇒ C.M. resta fermo mentre il corno si sposta

Applichiamo le c.r. alle

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = l \\ x_2 = \frac{l}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow X_{cm} = \frac{m_1 x_0 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \frac{l}{2}$$

Quando il corno si sposta, la sabbia scivola di distanza "d" dal molo

$$\left. \begin{array}{l} x'_0 = d \\ x'_2 = d + \frac{l}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow X'_{cm} = \frac{m_1 x'_0 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)d + m_2 \frac{l}{2}}{m_1 + m_2}$$

Deve essere  $X'_{cm} = X_{cm} \Rightarrow d = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = 2,7 \text{ cm}$

#### Esercizio 5

Energia elastica molla  $U_e = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = 2,5 \text{ J}$

Coste forma  $U_e = K_e = 2,5 \text{ J}$

• le cariche sul molo ⇒ conservazione energia ~~meccanica~~ meccanica

$$v_{ip} = v_{ic} = 0$$

$$\Rightarrow K_e + K_p = U_e \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_c^2 + \frac{1}{2} m_2 v_p^2 = U_e$$

Conservazione quantità di moto

$$m_1 v_c + m_2 v_p = 0 \Rightarrow v_c = -\frac{m_2}{m_1} v_p \rightarrow \text{Sostituisce e teste}$$

$$K_p = \frac{U_e}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = 2,3 \text{ J}$$

### Esercizio 6

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -AK \sin(kx) - B$$

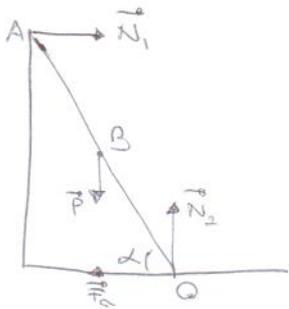
$$\rightarrow F(0) = -B = -0,63 \text{ N}$$

Conservazione dell'energia

$$U_0 + K_0 = U_f + K_f$$

$$U(0) = U(x_0) + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(U(0) - U(x_0))}{m}} = \sqrt{\frac{2Bx_0}{m}} = 7,6 \text{ m/s}$$

### Esercizio 7



Per avere equilibrio dobbiamo annullare sia le risultanti delle forze che il momento totale delle forze nei punti di appoggio.

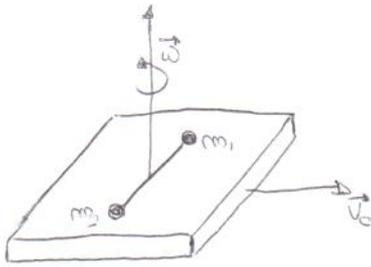
$$\begin{cases} \vec{N}_1 + \vec{F}_A = 0 \\ \vec{N}_2 + \vec{P} = 0 \\ \vec{H}_1 + \vec{H}_P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = F_A \\ N_2 = P = mg \\ |\vec{OA} \times \vec{N}_1| = |\vec{OB} \times \vec{P}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = F_A \\ N_2 = 34 \text{ N} \\ N_1 \ell \sin \alpha = mg \frac{\ell}{2} \sin(90^\circ - \alpha) = mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{mg}{2 \tan \alpha} = 8 \text{ N}$$

- La forza di attrito statica massima che si può sviluppare vale  $F_s^M = \mu_s N_2 = \mu_s mg$

$$\Rightarrow F_s \leq F_s^M \Rightarrow \frac{mg}{2 \tan \alpha} \leq \mu_s mg \Rightarrow \alpha \geq \arctan\left(\frac{1}{2\mu}\right) = 54^\circ$$

### Esercizio 8



$$m_1 = m_2 = m = 0,5 \text{ kg}$$

$$\rho = 2R = 40 \text{ cm}$$

$$\omega = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$v_0 = 0,8 \text{ m/s}$$

- Dal teorema di König

$$K = K_{\text{cm}} + K' = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + K'$$

$$\text{con } \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{2} 2m v_0^2 = m v_0^2$$

-  $K'$ : energia cinetica rispetto al centro di massa

$$K' = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad \text{con } v_1 = \omega R$$

$$v_2 = \omega R$$

$$\Rightarrow K' = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = m \omega^2 R^2$$

$$\Rightarrow K = K_{\text{cm}} + K' = m v_0^2 + m \omega^2 R^2 = 2,32 \text{ J}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{R} \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{R} \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\Rightarrow L = R m v_1 + R m v_2 = R m \omega R + R m \omega R = 2 m \omega R^2 = 0,4 \text{ kg } \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

- la direzione di  $L$  sarà  $\perp$  al piano di rotazione e il verso sarà diretto verso l'alto

### Esercizio 9

Il CF è in quiete prima e dopo il lancio  $\rightarrow$  ho conservazione della quantità di moto

$$m v_1 + M v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{m}{M} v_1 \quad \text{ma } v_1 = \frac{\rho}{t} + v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{m}{M} \left( \frac{\rho}{t} + v_2 \right) = -\frac{m}{m+M} \frac{\rho}{t}$$

$$v_1 = \frac{M}{m+M} \frac{\rho}{t}$$

$$\Rightarrow K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{M}{m+M} \right)^2 \left( \frac{\rho}{t} \right)^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{m}{m+M} \right)^2 \left( \frac{\rho}{t} \right)^2 = 10,7 \text{ J}$$