Esercizio 1

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano di origine O, un punto materiale P di massa m=3.20 kg si muove di moto rettilineo ed uniforme lungo la retta r di equazione cartesiana $3x-4y+12=0$ con velocità di modulo $v = 2.25$ m/s e avente verso diretto in modo tale che le componenti di v siano entrambe negative; determinare modulo, direzione e verso del momento angolare di P rispetto al polo O.

Esercizio 2

Un punto materiale P di massa m è legato mediante una corda inestensibile ad una sottile asta verticale e ruota, in un piano supposto orizzontale, attorno al punto O dell'asta; inizialmente il raggio della traiettoria di P misura r_1=24 cm e ha velocità v_1=2.4 m/s, dopo un certo tempo la corda si è avvolta attorno all'asta e il raggio della traiettoria si è ridotto alla misura r_2=15 cm; determinare la velocità finale di P.

Esercizio 3

Due punti materiali P1 e P2 aventi la stessa massa m=50 g sono uniti da una corda inestensibile di lunghezza ℓ=60 cm e massa trascurabile e ruotano attorno al loro centro di massa G con velocità v=4.3m/s;

- determinare il momento angolare del sistema rispetto al polo G;
- mostrare che il momento angolare rispetto a P1 è il doppio del momento angolare rispetto a G.

Esercizio 4

Un furgone si muove con moto uniformemente accelerato su una traiettoria retta. All'istante t=0, quando la velocità è v_0, una vite si stacca dal soffitto.

- Studiare il moto della vite rispetto a un sistema di riferimento OXY solidale con il terreno;
- Studiare il moto della vite rispetto a un sistema di riferimento O'X'Y' solidale con il furgone.

Esercizio 5

Un punto materiale che si trova sulla sommità di una semisfera di raggio r=2.0m viene messo in movimento con un velocità iniziale di modulo v_0 tangente alla superficie sferica e scivola senza attrito, sulla superficie esterna di questa; determinare

- come il punto di distacco dipende da v_0;
- il valore massimo di v_0 affinché il punto materiale non si stacchi subito dalla sfera.

Esercizio 6

Due corpi di massa m_1=1.1Kg e m_2=2Kg sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile e poggiano su un piano scabro. Il coefficiente di attrito dinamico tra ciascuno dei due copri e il piano è μ_d=0.4. Il corpo m_2 è trascinato da una forza F diretta verso destra di modulo 30N. Determinare:

a) L'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune
b) Sopra al corpo m_1 si trova una formica di massa 1g, in quiete rispetto al corpo stesso. Determinare il modulo e il verso della forza di attrito agente sulla formica e il valore della forza apparente nel sistema relativo al corpo.

Esercizio 7

Due pattinatori su ghiaccio partono da fermi e devono percorrere una distanza d. Supponendo che sviluppino la stessa forza motrice e sapendo che m_1=m e m_2=2m, si determini

- Quale pattinatore arriva al traguardo con energia cinetica maggiore;
- Quale arriva al traguardo con la quantità di moto più alta.

Esercizio 8
Dobbiamo fermare due punti materiali in movimento aventi rispettivamente m_1=0.5 Kg, v_1=4 m/s e m_1=0.1 Kg, v_2=20 m/s. In quale caso sarà più facile?

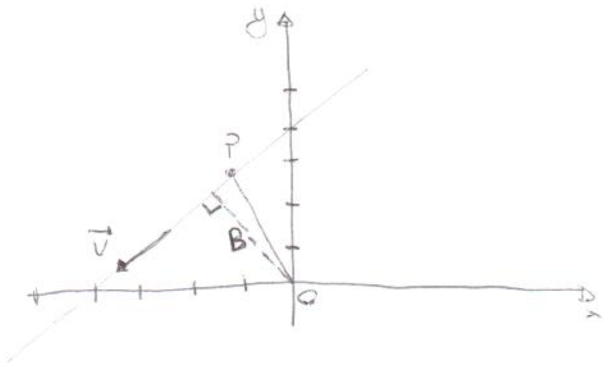
Esercizio 9
Una persona vuole misurare la forza del suo bicipite cimentandosi con un dinamometro. Il dinamometro è posto 28 cm sopra al punto in cui è imperniato il gomito e il bicipite è attaccato a un punto 5 cm sopra al perno (gomito). Se il dinamometro segna 18 N quando la persona compie il massimo sforzo, quale è la forza esercitata dal bicipite?

Esercizio 10
Una palla di 0,4 Kg viene lasciata cadere da una quota di 2 m dal pavimento. La palla rimbalza ad una quota di 1,5 m. Si trovi l'impulso esercitato dal pavimento sulla palla. Se la palla è stata in contatto per 1 ms col pavimento, si trovi la forza media esercitata dal pavimento in questo intervallo di tempo.

Esercizio 11
Una particella si muove di moto armonico di ampiezza A=3,00 cm e di frequenza f=2,50 Hz. Mostrare che la posizione della particella è data da $x(t) = 3{,}00cm \cdot \cos(5{,}00\pi t)$. Determinare la velocità massima e il tempo minimo per raggiungerla. Determinare l'accelerazione massima e il tempo minimo per raggiungerla.

Esercizio 12
Due punti materiali P1 e P2 si muovono di moto armonico con pulsazioni rispettivamente $\omega_1=\pi/8$ rad/s e $\omega_2=\pi/12$ rad/s. Le ampiezze dei due moti sono uguali e valgono A=30cm. Al tempo t=0 i punti partono dal centro delle oscillazioni verso x negative. Calcolare: a) la distanza fra i due punti al tempo t=2s; b) la velocità dei due punti al tempo t=2s; c) l'istante in cui avviene lo scontro.

Esercizio 1



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Nel nostro caso

$$\vec{L} = \vec{OP} \times m\vec{v}$$

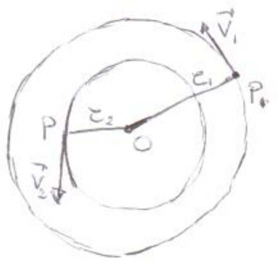
Per la regola della mano destra, il momento angolare ha direzione $\perp$ al piano OXY e verso uscente dal foglio

Il modulo vale: $L = |\vec{B} \times m\vec{v}|$

con b componente di $\vec{OP}$ $\perp$ alla retta $\Rightarrow$ $B = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2{,}4\,m$

$\Rightarrow L = |\vec{B} \times m\vec{v}| = mvB = 17{,}3\ Kg \cdot \dfrac{m^2}{s}$

Esercizio 2



Sul punto agisce solo la tensione della corda

$\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

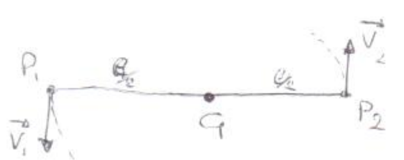
Nel nostro caso $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{T} = 0$ poiché $\vec{r}$ e $\vec{T}$ sono paralleli

$\vec{M} = \dfrac{dL}{dt} \Rightarrow L = cost.$

Possiamo supporre moto circolare uniforme

$L = cost \Rightarrow mv_1 r_1 = mv_2 r_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \dfrac{r_1}{r_2} = 3{,}8\,m/s$

Esercizio 3



$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$L_{TOT} = \vec{GP_1} \times m\vec{v}_1 + \vec{GP_2} \times m\vec{v}_2$

$= mv\dfrac{\ell}{2} + mv\dfrac{\ell}{2} = mv\ell = 0{,}13\ Kg \cdot m^2/s$

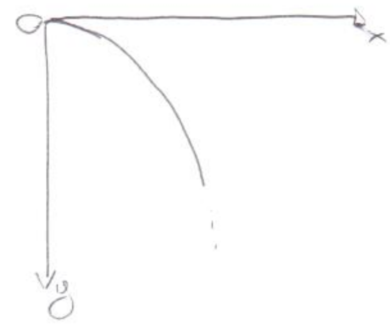
Rispetto al polo P_1 ho solo il momento angolare di P_2 che ruota intorno a P_1

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ma $v_2 = -v_1$ $\Rightarrow$ $v_{21} = 2v$

$\Rightarrow L'_{TOT} = \overline{P_1P_2} \times m\vec{v}_{21} = m2v\ell = 2L_{TOT} = 0{,}26\ Kg \cdot m^2/s$

Esercizio 4

a)



A $t=0$ ho: $x_0=0$

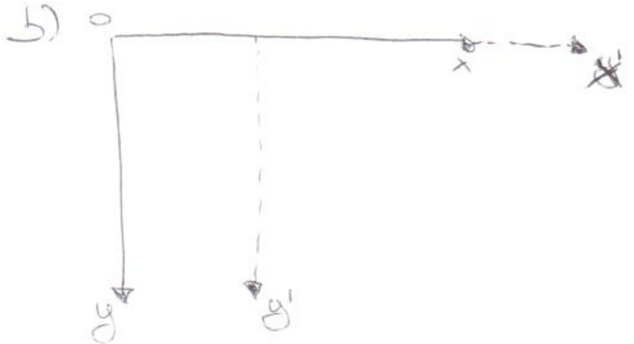
$y_0=0$

Quando la vite si stacca ho:

$$\begin{cases} x(t)=v_0 t \\ y(t)=\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Moto parabolico}$$

$$\Rightarrow t=\frac{x}{v_0} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\frac{g x_0^2}{v_0^2}$$

b)



A $t=0$ ho:

$$\begin{cases} x'_0=0 \\ y'_0=0 \end{cases}$$

Il sistema $Ox'y'$ si muove di moto accelerato rispetto al sistema Oxy, con accelerazione $\vec{a}_t$

$$\Rightarrow \vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{a}_t+\cancel{\vec{a}_c}^{\,=0} \Rightarrow \vec{a}\,'=\vec{a}-\vec{a}_t$$

$\Rightarrow$ Ho accelerazione costante e $v'_0=0$ $\Rightarrow$

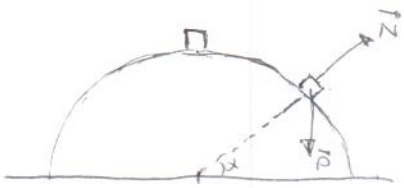
$$\begin{cases} x'(t)=-\frac{1}{2}a_t t^2 \Rightarrow t^2=\frac{2x'(t)}{a_t} \\ y'(t)=\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'(t)=-x'(t)\frac{g}{a_t}$$

Esercizio 5

Le forze che agiscono sul punto sono la forza peso e la reazione vincolare.

$\Rightarrow \vec{P}+\vec{N}=m\vec{a}$ $\quad$ $\vec{a}$ ha una componente tangenziale e una centripeta



Fino a che il punto è sulla semisfera ho:

$$mg\sin\alpha - N = m a_c = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \text{Se } N=0 \text{ il punto si stacca!}$$

Ho conservazione dell'energia $\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2+\cancel{m}gR=\frac{1}{2}\cancel{m}v^2+\cancel{m}gR\sin\alpha$

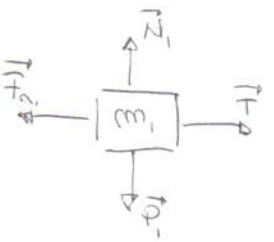
$\Rightarrow v^2=v_0^2+2gR(1-\sin\alpha)$ $\rightarrow$ sostituisco nella prima e trovo

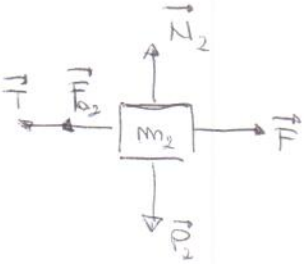
$$\sin\alpha = \frac{2}{3} + \frac{V_0^2}{3gR}$$

- Per determinare V_0 massimo deve essere $\alpha = 90°$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{3} + \frac{V_0^2}{3gR} \Rightarrow V_0 \le \sqrt{gR} = 4{,}4\ m/s$$

Esercizio 6



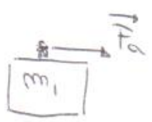


$$\begin{cases} \vec{T} + \vec{F}_{a_1} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{T} + \vec{F}_{a_2} + \vec{F} = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \quad \text{con } a_1 = a_2 = a \qquad \begin{cases} T - F_{a_1} = m_1 a \\ F - T - F_{a_2} = m_2 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = F_{a_1} + m_1 a \\ F - m_1 a - F_{a_1} - F_{a_2} = m_2 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F - F_{a_1} - F_{a_2}}{m_1 + m_2} = \frac{F - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = 5{,}75\ m/s^2$$

$$\Rightarrow T = \mu m_1 g + m_1 a = m_1(\mu g + a) = 10{,}65\ N$$

b) $m = 1g$



Centrando il sistema di riferimento in m_1 vedo la formica muoversi verso sinistra. Finché la formica resta ~~ha~~ attaccata su m_1, la forza di attrito dovrà avere lo stesso verso di tutto il sistema in moto.

Visto che l'unica forza agente sulla formica è quella che fa muovere il sistema, avrò: $F_a = ma = 5{,}75 \cdot 10^{-3}\ N$

Di conseguenza la forza apparente avrà stesso modulo della forza d'attrito e verso contrario al moto del sistema

Esercizio 7

$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m V_1^2$

$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = m V_2^2$

$\Delta K = \mathcal{L}_F \Rightarrow \Delta K_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd$

$\Delta K_2 = m V_2^2 = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd$

$\Rightarrow$ il lavoro è lo stesso $\Rightarrow$ Avranno stessa energia cinetica

$P_1 = m_1 V_1 = m V_1$

$P_2 = m_2 V_2 = 2 m V_2$

$K_1 = \frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P_1^2}{2m}$

$K_2 = \frac{P_2^2}{2m_2} = \frac{P_2^2}{4m}$

$\Rightarrow K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{P_1^2}{\cancel{2m}} = \frac{P_2^2}{\cancel{4m}_2} \Rightarrow P_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} P_2$

$\Rightarrow m_1 V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 V_2 \Rightarrow \cancel{m} V_1 = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cancel{2m} V_2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{2} V_2$

Esercizio 8

$P_1 = m_1 V_1 = 2 \ N \cdot s$

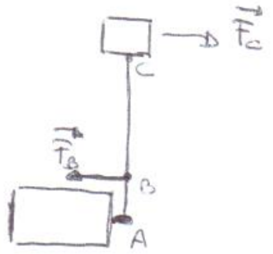
$P_2 = m_2 V_2 = 2 \ N \cdot s$

$K_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = 4 \ J$

$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = 20 \ J$

$\Rightarrow$ Anche se hanno lo stesso impulso, la massa 2 richiede un lavoro 5 volte maggiore per essere fermata. Se la forza applicata è la stessa, per la massa 2 deve essere applicata per un tratto 5 volte più lungo.

Esercizio 9



Il momento della forza esercitata dal bicipite deve essere uguale al momento sul dinamometro

$$\vec{M}_B + \vec{M}_C = 0$$

$$\vec{AB} \times \vec{F}_B + \vec{AC} \times \vec{F}_C = 0$$

$$\Rightarrow -\vec{AB} \cdot F_B + AC\, F_C = 0 \Rightarrow F_B = F_B \cdot \frac{\vec{AB}}{\vec{AC}} = 100,80\,N$$

Esercizio 10

- L'impulso è dato dalla variazione della quantità di moto

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

- Velocità con cui arriva la palla sul pavimento

$$\begin{cases} v_1 = g t_1 \\ s_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = \sqrt{2 g s_1} = 6,26\,m/s \\ t_1 = \sqrt{\frac{2 s_1}{g}} \end{cases}$$

- Velocità con cui la palla arriva a 1,5m dal pavimento

$$\begin{cases} V_2 = -g t_2 \\ s_2 = -\frac{1}{2} g t_2^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_2 = -\sqrt{2 s_2 g} = -5,43\,m/s \\ t_2 = \pm\sqrt{\frac{2 s_2}{g}} \end{cases}$$

$$I = \Delta\vec{p} = mV_2 - mV_1 = -4,7\,Kg\,m/s$$

- $F \Delta t = \Delta p$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 4,7 \cdot 10^3\,N$$

Esercizio 11

All'istante $t=0$, $x=0$ e $V>0$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ con $\varphi = 0$

Con $\omega = 2\pi f = 5{,}00\pi\ s^{-1} \Rightarrow x(t) = A \sin(5{,}00\pi t)$

• $V = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t) = -3{,}00\,cm \cdot 5{,}00\pi\, s^{-1} \cos(\omega t)$

$\Rightarrow V_{max}$ si ha quando $\cos(\omega t) = 1 \Rightarrow V_{max} = 15{,}0\pi\ cm/s$

V_{max} si ha ogni $\frac{T}{2} \Rightarrow t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = 0{,}2s$

• $a = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$

$\Rightarrow a_{max}$ si ha per $\sin(\omega t) = 1 \Rightarrow a_{max} = -\omega^2 A = -75\pi^2\ cm/s^2$

a_{max} si ha per $\frac{T}{4} \Rightarrow t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f} = 0{,}1s$

Esercizio 12

Scrivo le eq. del moto armonico e della velocità

$x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ $\qquad v_1(t) = A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$x_2 = (t) = A \sin(\omega_2 t_2 + \varphi_2)$ $\qquad V_2(t) = A\omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

A $t=0$, $x=0$ e $V<0$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 = A\sin(\varphi_1) \Rightarrow \sin\varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = n\pi \\ x_2(0) = 0 = A\sin(\varphi_2) \Rightarrow \sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = n\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1(0) < 0 = -A\omega_1\cos(\varphi_1) \Rightarrow \cos\varphi_1 < 0 \\ V_2(0) < 0 = A\omega_2\cos(\varphi_2) \Rightarrow \cos\varphi_1 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dalle condizioni ho $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$

$\Rightarrow x_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \pi)$

$x_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \pi)$

$\Rightarrow x_1(t = 2s) = -21{,}2\ cm$

$x_2(t = 2s) = -15\ cm$

$d = |x_1(t=2s) - x_2(t=2s)| = 6{,}2\ cm$

$V_1(t=2s) = -8,33$ cm/s

$V_2(t=2s) = -6,8$ cm/s

- Lo scontro avviene quando $x_1(t^*) = x_2(t^*)$

$\Rightarrow A \operatorname{sen}(\omega_1 t^* + \frac{\pi}{2}) = A \operatorname{sen}(\omega_2 t^* + \frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \operatorname{sen}(\omega_1 t^* + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(\omega_2 t^* + \frac{\pi}{2})$

- Ho due condizioni: $\begin{cases} \omega_1 t^* + \pi = \omega_2 t^* + \pi \\ \omega_1 t^* + \pi = \pi - \omega_2 t^* + \pi \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\pi}{8} t^* + \cancel{\pi} = \frac{\pi}{12} t^* + \cancel{\pi} \Rightarrow t^* = 0 \\ \frac{\pi}{8} t^* + \cancel{\pi} = \cancel{\pi} - \frac{\pi}{12} t^* + \pi \end{cases}$

$\Rightarrow t^* \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12}\right) = \pi \Rightarrow t^* = \frac{24}{5} = 4,8\,s$