Esercizio 1

Un satellite cilindrico di raggio r=4.5m e massa m=5.4 10^3 kg inizialmente fermo, viene messo in rotazione per mezzo di due propulsori montati tangenti al cilindro; determinare:

- il modulo F della forza che deve essere applicata da ciascun razzo affinché il satellite raggiunga la velocità angolare di modulo ω=3.5 rad/s nel tempo Δt=360 s;
- l'energia cinetica finale del satellite.

Esercizio 2

Si consideri un cilindro omogeneo di massa m=6.3 kg e raggio r=64 cm che rotola su di un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F orizzontale applicata al baricentro G del disco di modulo F=12 N; sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è μs=0.55, determinare:

- il modulo della sua velocità lineare dopo t=4.2 s;
- l'energia cinetica all'istante t;
- il lavoro fatto dalla forze agenti sul cilindro;
- il modulo massimo che può avere la forza perché il rotolamento avvenga senza strisciare.

Esercizio 3

Una sbarra di massa m_1=0.4 Kg e lunghezza l=0.8 m è fissata tramite un perno, collocato nel centro della sbarra, ed è libera di ruotare attorno a esso. Un oggetto puntiforme di massa m_2=0.08 Kg colpisce la sbarra in un estremo con velocità v_i=2 m/s. Assumendo il sistema in quiete prima dell'urto e assumendo quest'ultimo come elastico, con v_f parallela a v_i, determinare la velocità angolare e la velocità finale della sbarra.

Esercizio 4

Un corpo rigido è costituito da un cilindro di 10kg e raggio 12.0cm, più due cilindri coassiali identici ("pioli"), ciascuno di 2.5 kg e raggio 4.0 cm. I due "pioli" sono appoggiati su una guida rettilinea, inclinata di 35° rispetto all'orizzontale, con coefficiente di attrito statico 0.65. Inizialmente il corpo è tenuto in equilibrio da un filo orizzontale.

- Calcolare la tensione del filo.
- Calcolare l'accelerazione del corpo se il filo si spezza e verificare che sia soddisfatta la condizione di puro rotolamento.
- Qual è la massima inclinazione della guida per cui si ha puro rotolamento?

Esercizio 5

Un corpo rigido è formato da un disco di massa 5.0 kg e raggio 15 cm, al quale è saldata una sbarra di 2.0 kg lunga 60 cm. Il tutto è vincolato a ruotare intorno all'asse del disco ed è mantenuto in equilibrio, con l'asta inclinata di 45° verso l'alto, da un corpo sospeso al diametro esterno del disco. Calcolare la massa del corpo. Il filo si spezza.

- Calcolare la velocità angolare del corpo rigido quando l'asta passa per l'orizzontale.
- Calcolare la reazione del vincolo in quell'istante.

Esercizio 6

Un disco omogeneo di raggio R rotola su un piano orizzontale scabro. Si determini quale legame deve esserci tra la velocità iniziale del suo centro di massa e la velocità angolare rispetto all'asse ortogonale al piano e passante per il suo centro di massa perché si possa verificare che:

- Ad un certo istante il corpo si arresti;
- Ad un certo istante incominci a rotolare senza strisciare con velocità del suo centro di massa uguale a $-\frac{4}{9}v_i$.

Esercizio 7

Dimostrare che il momento di inerzia del disco rispetto a un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare al piano del disco vale $\frac{1}{2}MR^2$, con M massa del disco e R raggio del disco.

Esercizio

Scelgo come polo un punto sull'asse di simmetria del cilindro

$\Rightarrow M_o = I \dfrac{\omega}{\Delta t}$

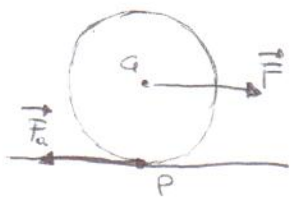
Con $I = \dfrac{1}{2} m r^2$ e $M_o = 2|\vec{r} \times \vec{F}| = 2Fr$

$\Rightarrow 2F\cancel{r} = \dfrac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \dfrac{\omega}{\Delta t} \Rightarrow F = \dfrac{m r \omega}{4 \Delta t} = 59 N$

- L'energia cinetica è dovuta alla rotazione

$K = \dfrac{1}{2} I \omega^2 = \dfrac{1}{4} m r^2 \omega^2 = 3{,}4 \cdot 10^5 J$

Esercizio



Asse di rotazione perpendicolare al cilindro e passante per G

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{F_a} = m\vec{a_G} \\ M = I\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} F - F_s = m a_G \\ M_{att.} = F_s r = \dfrac{1}{2} m r^2 \alpha \end{cases} \quad \text{con } a_G = \alpha r$$

$\Rightarrow F_s \cancel{r} = \dfrac{1}{2} m \cancel{r^2} \dfrac{a_G}{\cancel{r}} \Rightarrow F = \dfrac{1}{2} m a_G + m a_G \Rightarrow a_G = \dfrac{2}{3}\dfrac{F}{m}$

$\Rightarrow V_G = a_G t = 5{,}3 \, m/s$

- $K = K_G + \dfrac{1}{2} I_G \omega^2 = \dfrac{1}{2} m V_G^2 + \dfrac{1}{4} m \cancel{r^2} \dfrac{V_G^2}{\cancel{r^2}} = \dfrac{3}{4} m V_G^2 = 1{,}3 \cdot 10^2 J$

- $\mathcal{L} = \vec{F} \cdot \vec{s}$ $\quad s = \dfrac{1}{2} a_G t^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{F}{m} t^2$

$\Rightarrow \mathcal{L} = Fs = \dfrac{1}{3}\dfrac{F^2 t^2}{m} = 1{,}3 \cdot 10^2 J$

- Da $F - F_a = m a_G \Rightarrow F - F_a = \cancel{m} \dfrac{2}{3}\dfrac{F}{\cancel{m}} \Rightarrow F_a = \dfrac{1}{3} F$

$\Rightarrow F_{a_{max}} = \mu_s N = \mu_s P = \mu_s m g$

Per avere solo rotolamento $F \leq 3 F_{a_{max}} = 3 \mu_s m g = 10^2 N$

Esercizio

La barra è vincolata: - Uso conservazione del momento angolare e dell'energia

$$\begin{cases} m_2 v_i \frac{l}{2} = m_2 v_f \frac{l}{2} + I\omega \\ \frac{1}{2} m_2 v_i^2 = \frac{1}{2} m_2 v_f^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \end{cases} \quad \text{con } I = \frac{1}{12} m_1 l^2$$

$$\begin{cases} m_2 \frac{l}{2}(v_i - v_f) = I\omega \quad (1) \\ m_2 (v_i^2 - v_f^2) = I\omega^2 = m_2 (v_i - v_f)(v_i + v_f) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Divido la seconda per la prima

$\frac{2}{l}(v_i + v_f) = \omega \Rightarrow v_f = \frac{l}{2}\omega - v_i \Rightarrow$ sostituisco v_f nella (1)

$$\Rightarrow I\omega = m_2 \frac{l}{2}\left(v_i - \frac{l}{2}\omega + v_i\right) = m_2 l v_i - m_2 l^2 \frac{\omega}{4}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{m_2 l v_i}{I + \frac{m_2 l^2}{4}} = \frac{m_2 \cancel{l} v_i}{\frac{1}{4} l^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{3} m_1 + m_2\right)} = 3{,}75 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{l}{2}\omega - v_i = -0{,}5 \text{ m/s}$$

Esercizio

Per avere equilibrio deve essere nulla la risultante delle forze e dei momenti

$$\begin{cases} \vec{T} + \vec{F_a} + \vec{P} = 0 \\ \vec{M}_T + \vec{M}_a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T\cos\theta + F_a - m_T g \operatorname{sen}\theta = 0 \\ TR - F_a r = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad F_a = \frac{TR}{r} \quad T = \frac{m_T g \operatorname{sen}\theta \cdot r}{R + r\cos\theta} = 22{,}1 \text{ N}$$

Dopo che il filo si spezza

$$\begin{cases} m_T g \operatorname{sen}\theta \cdot r = I\alpha \\ m_T g \operatorname{sen}\theta - F_a = m_T a \\ N - m_T g \cos\theta = 0 \end{cases} \quad \text{con } I = \frac{1}{2} m_1 R^2 + 2\frac{1}{2} m_2 r^2 \quad a = \alpha r$$

$$\Rightarrow m_T g \operatorname{sen}\theta \cdot r = I\frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{m_T g r^2 \operatorname{sen}\theta}{I} = 1{,}77 \text{ m/s}$$

$$F_a = m_T g \operatorname{sen}\theta - m_T a = 57{,}7 \text{ N}$$

$$F_{a_{max}} = \mu_s N = \mu_s m_T g \cos\theta = 78{,}3 \text{ N}$$

$\Rightarrow$ Per avere solo rotolamento devo avere $F_a < F_{a_{max}} \Rightarrow$ condizione verificata!

$$m_a F_a = m_T g \,sen\,\theta - \frac{m_T^2 r^2 g \,sen\,\theta}{I} = m_T g \,sen\,\theta \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right)$$

$\Rightarrow$ Per trovare l'angolo massimo per avere solo rotolamento deve essere:

$$F_a \le F_{a_{max}} \Rightarrow m_T g \,sen\,\theta \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right) \le \mu_s m_T g \cos\theta$$

$$\Rightarrow tg\,\theta \le \mu_s \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right) \Rightarrow \theta \le tg^{-1}\left[\mu_s \left(1 - \frac{m_T r^2}{I}\right)^{-1}\right] = 43{,}5°$$

Esercizio

Ho equilibrio dei momenti di inerzia rispetto all'asse di rotazione

$$m \cancel{g} R = m_a \cancel{g} \left(R + \frac{\ell}{2}\right) \cos\theta \Rightarrow m = \frac{m_a}{R}\left(R + \frac{\ell}{2}\right)\cos\theta = 4{,}24\,Kg$$

- Dopo che il filo si spezza

$\Rightarrow$ Ho conservazione di energia

$$E_{m,iniz.} = E_{m,fin.}$$

$$U_i + \cancel{K_i}^{\,0} = \cancel{U_f}^{\,0} + K_f \Rightarrow m_A g \left(R + \frac{\ell}{2}\right) sen\,\theta = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{con } I = I_D + I_A$$

$$I_D = \frac{1}{2} m_D R^2$$

$$I_A = \frac{1}{12} m_A \ell^2 + m_A \left(R + \frac{\ell}{2}\right)^2$$

Sostituisco e trovo

$$\omega = \sqrt{\frac{2 m_A g \left(R + \frac{\ell}{2}\right) sen\,\theta}{I}} = 5{,}12\,rad/s$$

Per la reazione vincolare

$$m_{tot} \vec{a}_{cm} = \vec{R}_{est.} \qquad \text{con } \vec{R}_{est.} = m_{tot}\vec{g} + \vec{F}_v$$

F_v: forza vincolare

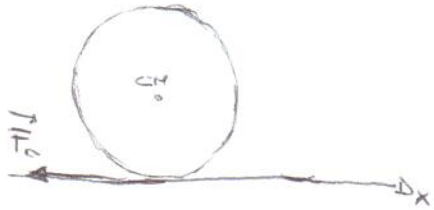
$a_{cm} = -\omega^2 d$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{tot} a_x = F_{v_x} \\ m_{tot} a_y = F_{v_y} - m_{tot} g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{v_x} = -m_{tot}\omega^2 d = -23{,}6\,N \\ F_{v_y} = m_{tot} g - m_{tot}\alpha d = 64\,N \end{cases}$$

$a_x = -\omega^2 d$

$a_y = -\alpha d = -\frac{m_{tot} g}{I} d$

Esercizio



L'unica forza in gioco è la forza di attrito

$$\begin{cases} \vec{F}_a = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{F}_a \vec{R} = I_{CM} \cdot \vec{\alpha}_{CM} \end{cases} \qquad \begin{cases} -F_a = m a_{CM} \\ F_a R = I_{CM} \alpha_{CM} \end{cases} \qquad \text{con } I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} V_{CM} = V_0 + a_{CM} t = V_0 - \frac{F_a}{m} t \\ \omega_{CM} = \omega_0 + \alpha_{CM} t = \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t \end{cases}$$

- Quando il disco si arresta V_{CM} e ω_{CM} sono nulle

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0 - \frac{F_a}{m} t = 0 \\ \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{V_0 m}{F_a} \\ \omega_0 + \frac{\cancel{F_a} R}{I_{CM}} \cdot \frac{V_0 m}{\cancel{F_a}} = \omega_0 + \frac{2 \cancel{R} V_0 \cancel{m}}{\cancel{m} R^{\cancel{2}}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = -2\frac{V_0}{R}$$

- Per il secondo punto devo imporre

$$\begin{cases} V_{CM} = -\frac{4}{9} V_0 = V_0 - \frac{F_a}{m} t \\ \omega_{CM} = \frac{V_{CM}}{R} = \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{13}{9} V_0 \frac{m}{F_a} \\ \omega_0 + \frac{F_a R}{I_{CM}} t = -\frac{4}{9}\frac{V_0}{R} \end{cases}$$

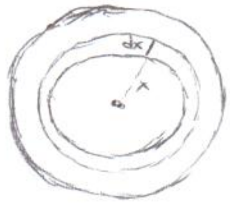
$\Rightarrow$ Sostituisco t nella seconda equazione e trovo

$$\omega_0 = -\frac{10}{3}\frac{V_0}{R}$$

Esercizio

Considero il disco formato da tanti anelli concentrici di raggio x e spessore dx

- Densità superficiale degli anelli: $\sigma = \frac{Massa}{Area} = \frac{M}{\pi R^2}$



L'area coperta dall'anello sarà

$ds = 2\pi x\, dx \Rightarrow dm = \sigma\, ds = 2\pi \sigma x\, dx$

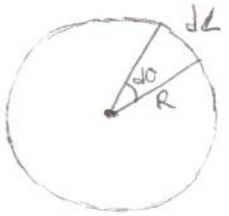
- Il momento di inerzia di un anello rispetto a un asse perpendicolare al piano dell'anello e passante per il suo baricentro è:

$dI = dm\, x^2 \rightarrow$ Per il disco faccio l'integrale

$$\Rightarrow I = \int_0^R dI = \int_0^R dm\, x^2 = \int_0^R 2\pi\sigma x^3 dx = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4 \quad \text{ma } \sigma = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} M R^2$$

- Per l'anello invece...



$dL = R\, d\theta$ con $d\theta$ in radianti

$\Rightarrow dm = \sigma\, dL = \sigma R\, d\theta \Rightarrow m = \int_0^{2\pi} dm = 2\pi\sigma R$

$$dI = dm\, R^2 = \sigma R^3 d\theta \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} dI = \sigma R^3 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sigma R^3 = m R^2$$