Esercizio 1

Un blocco di massa M=4.0 kg è sospeso, in equilibrio statico, ad una molla ideale di costante elastica K=500 N/m. Un proiettile di massa m=50 g viene sparato verticalmente dal basso (alla velocità di 150 m/s) contro il blocco, nel quale rimane incastrato.

- Di quanto è, inizialmente , allungata la molla?
- Quale è la velocità del sistema immediatamente dopo l'urto?
- Si trovi l'ampiezza del moto armonico semplice risultante.

Esercizio 2

Su un piano scabro, inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale, è posto in quiete un corpo (assimilabile ad un punto materiale) di massa m_1=1 kg. Il coefficiente di attrito statico tra corpo m_1 e piano è μ_{1s}=0.7, il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo e il piano è μ_{1d}=0.4. Un altro corpo di massa m_2=m_1 viene lanciato dalla sommità del piano con velocità v_0=0.05 m/s (parallela al piano stesso). Il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo m_2 e il piano è μ_{2d}=0.3. Dopo un tempo t=0.9 s il corpo 2 urta in modo completamente anelastico il corpo 1.

Si determinino:

- La forza di attrito statico tra corpo m_1 e piano;
- La distanza percorsa lungo il piano da m_2 prima di urtare m_1;
- L'accelerazione del sistema dopo l'urto.

Esercizio 3

Un palla rigida di massa m=0.5 kg è agganciata ad una fune lunga L=0.8 m., fissata all'altra estremità. La palla viene abbandonata quando la fune è tesa e orizzontale. Giunta nel punto più basso della traiettoria, la palla colpisce elasticamente e istantaneamente un blocco rigido di massa M=3 kg, inizialmente fermo su una superficie scabra. Si calcolino:

- la velocità della palla immediatamente dopo l'urto;
- la velocità del blocco immediatamente dopo l'urto;
- Supponendo che il blocco si metta in moto con velocità v2f, quanto deve valere il coefficiente di attrito dinamico tra piano e corpo affinché quest'ultimo si arresti dopo aver percorso una distanza d=74cm.

Esercizio 4

Si supponga che un corpo venga lanciato dalla superficie terrestre con una velocità iniziale $v = \sqrt{R_T g}$

- verificare che la velocità è inferiore alla velocità di fuga;
- determinare l'altezza massima raggiunta.

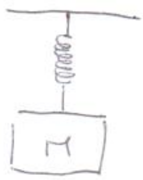
Esercizio 5

Due stelle di massa M e m, poste ad una distanza d, ruotano su orbite circolari attorno al loro centro di massa. Mostrare che ogni stella ha un periodo dato da $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(M+m)} d^3$

Esercizio 6

Due veicoli spaziali identici di massa 3250 Kg viaggiano su una stessa orbita circolare ad un'altezza di 270 Km sopra la superficie terrestre. Il veicolo A precede il veicolo B di 105 s. In un certo punto P il pilota di B accende per breve tempo un razzo diretto in avanti riducendo la velocità dello 0,95%. Trovare energia, periodo e semiasse maggiore di B prima e dopo la correzione di velocità e stabilire in quale successione i due veicoli passeranno nuovamente in P.

Esercizio 1



$\vec P + \vec F_e = 0$

$P - F_e = 0 \Rightarrow Mg - K\Delta x = 0$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{Mg}{K} = 7,84 \cdot 10^{-2}\,m$

Conservazione quantità di moto

$m\vec v_p = (m+M)\vec V \Rightarrow m v_p = (m+M)V$

$\Rightarrow V = v_p \frac{m}{m+M} = 1,85\,m/s$

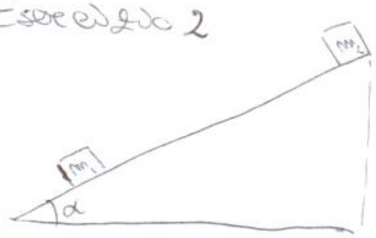
Equazioni del moto armonico semplice

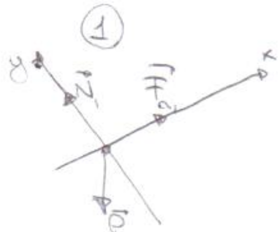
$\begin{cases} x(t) = A\,sen(\omega t + \varphi_0) \\ v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases} \Rightarrow A\ t=0\ ha: \begin{cases} x(0) = A\,sen(\varphi_0) = 0 \\ v(0) = A\omega\cos(\varphi_0) = V \end{cases}$

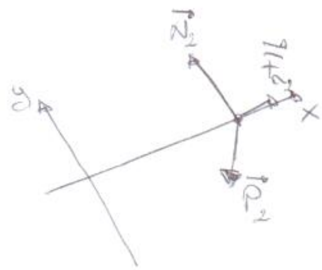
con φ_0: fase iniziale $= 0$ (la molla parte da ferma)

$\Rightarrow A = \frac{V}{\omega} = \frac{V}{\sqrt{K/(m+M)}} = 1,07 \cdot 10^{-1}\,m$

Esercizio 2







$\vec P_1 + \vec F_{a_1} = 0$

$-m_1 g\,sen\alpha + F_{a_1} = 0 \Rightarrow F_{a_1} = m_1 g\,sen\alpha = 4,9\,N$

Per il corpo 2

$\vec P_2 + \vec F_{a_2} = m_2 \vec a$

$-m_2 g\,sen\alpha + \mu_{d_2} N_2 = m_2 a \Rightarrow a = \frac{\mu_{d_2} N_2 - m_2 g\,sen\alpha}{m_2} = \frac{\mu_{d_2} m_2 g\cos\alpha - m_2 g\,sen\alpha}{m_2} = -2,35\,m/s^2$

$d = v_0 t + \frac{1}{2}|a|t^2 = 9,98 \cdot 10^{-1}\,m$

- Per ciascun corpo vale

$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g\,sen\alpha + \mu_{d_1} m_1 g\cos\alpha \\ m_2 a = -m_2 g\,sen\alpha + \mu_{d_2} m_2 g\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$ Sommo membro a membro con $m_1 = m_2 = m$

$\Rightarrow 2ma = -2mg\sin\alpha + g\cos\alpha\, m\,(\mu_{d_1} + \mu_{d_2})$

$\Rightarrow a = -g\sin\alpha + g\cos\alpha\,\dfrac{(\mu_{d_1} + \mu_{d_2})}{2} = -1{,}93\ m/s^2$

Esercizio 3

Conservazione energia meccanica

$E_{m\,iniz.} = E_{m\,fin.}$

$U_i + \cancel{K_i}^{\,0} = \cancel{U_f}^{\,0} + K_f$

$mgL = \frac{1}{2} m v_{1i}^2 \Rightarrow v_{1i} = \sqrt{2gL} = 3{,}96\ m/s$

v_{1i} velocità pallina prima dell'urto col blocco

- Urto elastico: si conserva quantità di moto e energia cinetica

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + M v_{2f} \\ \frac{1}{2} m v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} M v_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} - M v_{2f}}{m_1}$$

$\Rightarrow$ sostituisco nella seconda equazione e trovo

$v_{2f} = \dfrac{2m}{m+M} v_{1i} = 1{,}13\ m/s \Rightarrow v_{1f} = \dfrac{m-M}{m+M} v_{1i} = -2{,}83\ m/s$

- Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica

$\frac{1}{2} M v_{2f}^2 = L_{attr.} = \mu_d N d = \mu_d M g d \Rightarrow \mu_d = \dfrac{v_{2f}^2}{2gd} = 0{,}13$

Esercizio 4

$v = \sqrt{R_T g}$ con $g = G\dfrac{m_T}{R_T^2} \Rightarrow v = \sqrt{\cancel{R_T}\, G\dfrac{m_T}{R_T^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\dfrac{G m_T}{R_T}}$

$v_f = \sqrt{\dfrac{2Gm_T}{R_T}} \Rightarrow v < v_f$

- Sulla superficie terrestre

$E_1 = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - G\dfrac{m\, m_T}{R_T} = \dfrac{1}{2} G \dfrac{m\, m_T}{R_T} - G\dfrac{m\, m_T}{R_T} = -\dfrac{1}{2} G \dfrac{m\, m_T}{R_T}$

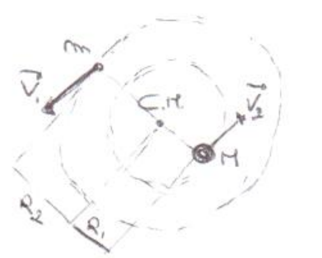
$\Rightarrow$ Quando arriva nel punto più alto $\Rightarrow K = 0$

$\Rightarrow E_2 = U = -G\dfrac{m\, m_T}{R_T + h}$

$\Rightarrow$ L'energia si conserva $\Rightarrow E_1 = E_2$

$-\dfrac{\cancel{G}}{2}\dfrac{\cancel{m}\,\cancel{m_T}}{R_T} = -\dfrac{\cancel{G}\,\cancel{m}\,\cancel{m_T}}{R_T + h} \Rightarrow \dfrac{R_T + h - 2R_T}{2R_T(R_T + h)} = 0 \Rightarrow h = R_T$

Esercizio 5



$d = R_1 + R_2$

- Per la massa M: $\vec{F} = \cancel{M\vec{a}} = M\vec{a}_c$

$$\Rightarrow \frac{G m M}{d^2} = M a_c = \frac{M V_2^2}{R_2} = \frac{M}{R_2}\left(\frac{2\pi R_2}{T}\right)^2$$

- Per la massa m

$$\frac{G m M}{d^2} = \frac{m V_1^2}{R_1} = \frac{m}{R_1}\left(\frac{2\pi R_1}{T}\right)^2$$

$\Rightarrow$ semplifico e sommo le equazioni

$$G(m+M)T^2 = 4\pi^2 d^2 (R_1 + R_2) = 4\pi^2 d^3$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m+M)} d^3$$

Esercizio 6

- Prima della riduzione della velocità

$$E = K + U = -\frac{G}{2}\frac{m M_T}{R} \quad \text{con } R = R_T + h = 6640\ \text{km}$$

$$= -9{,}76 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G M_T}} = 5380\ \text{s}$$

Visto che ho moto circolare uniforme $\Rightarrow K = -E = 9{,}76 \cdot 10^{10}$ J

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2K}{m}} = 7{,}75 \cdot 10^3\ \text{m/s}$$

- Dopo la riduzione della velocità $\Rightarrow V' = (1 - 0{,}95\%) V = 7{,}68 \cdot 10^3$ m/s

Subito dopo la riduzione U non varia $\Rightarrow U = U'$

$$\Rightarrow E' = K' + U' = \frac{1}{2} m V'^2 + U = -9{,}94 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

$$\Rightarrow R' = -\frac{G m M_T}{E'} = 6520\ \text{km}$$

$$\Rightarrow T' = \sqrt{\frac{4\pi^2 R'^3}{2E'}} = 5240\ \text{s}$$

Il periodo di B è diminuito di 140 s rispetto quello iniziale B, che era passato dopo 105 s ~~da~~ rispetto ad A, ora passerà in ? 35 s prima di A