LAVORO ED ENERGIA. FORZE CONSERVATIVE

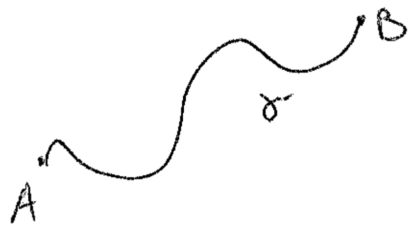
Formulario:

Quando il punto materiale sul quale agisce la forza $\vec{F}$ subisce uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ per definizione la forza compie lavoro.

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_i F_i \, ds_i = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = |\vec{F}|\,|d\vec{s}| \cos\theta$$

è un prodotto scalare quindi il lavoro L è uno scalare

il lavoro è l'integrale lungo la traiettoria di spostamento:



$$L_\gamma(A \to B) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \left[F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz\right]$$

È facile ricavare l'energia associata (En. cinetica)

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{a} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m\,d\vec{v}\,\frac{d\vec{s}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

integriamo tra A e B come prima.

$$\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = \int_A^B m v \, dv$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right)$$

Teorema forze vive

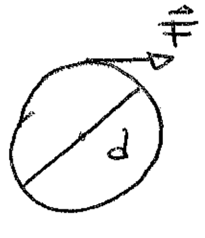
$$= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \Delta E_c$$

Es 1:

Sulla puleggia di una ruota motrice agisce una forza tangenziale di $|\vec{F}| = 294\,N$

1) Calcolare il lavoro che la forza compie ogni 100 giri della puleggia. il diametro della puleggia è di $d = 400\,mm$

1)



$d = 0{,}4\,m$

$|\vec{F}| = 294\,N$

il lavoro è definito come

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \text{se la forza è costante}$$

$$= \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s}$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{s}$$

la forza la conosciamo, ci manca lo spostamento.
La circonferenza della puleggia è

$$C = 2\pi r$$
$$= \pi d$$

Quindi

$$S = 100\pi d$$
$$= 125{,}6\ m$$

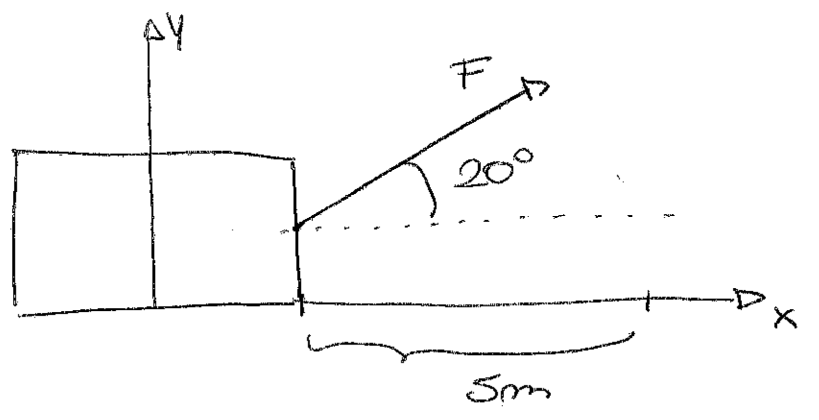
Quindi

$$\mathcal{L} = F \cdot S$$
$$= 294\ N \cdot 125{,}6\ m$$
$$= 36\,926\ J \qquad 1J = 1N \cdot 1m$$

Es 2:

Una forza deve compiere un lavoro di $\mathcal{L} = 784\ J$ spostando un blocco di $5\ m$.
La forza è applicata in direzione inclinata di $20°$ rispetto alla linea di azione

1) Determinare l'intensità della forza



il moto avviene lungo x quindi il lavoro

$$\mathcal{L} = \vec{F}_x \cdot \vec{S}$$

essendo entrambi lungo x posso considerare i moduli

$$= |\vec{F}_x| \cdot |\vec{S}| \cdot \underbrace{\cos\theta}_{1}$$

$$= F_x \cdot S$$

$$\mathcal{L} = F\cos\theta \cdot S$$

$$\rightarrow F = \frac{\mathcal{L}}{S \cdot \cos\theta} = \frac{784\,J}{5m \cdot \cos 20°} = 166\,N$$

Es 3

Calcolare il lavoro compiuto da un motore di un'automobile di massa $m = 950\,kg$ per passare da 36 a 90 $\frac{Km}{h}$.

$$36\,\frac{km}{h} = 10\,\frac{m}{s}$$

$$90\,\frac{Km}{h} = 25\,\frac{m}{s}$$

dal teorema delle forze vive so che

$$\mathcal{L} = \Delta E = E_{cB} - E_{cA}$$

$$E_{cB} = \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2}\, 950\,kg \cdot \left(25\,\frac{m}{s}\right)^2 = 296{,}875\,J$$

$$E_{cA} = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2}\, 950\,kg \left(10\,\frac{m}{s}\right)^2 = 47{,}500\,J$$

$$\mathcal{L} = E_{cB} - E_{cA} = 296{,}875\,J - 47500\,J = 2{,}49 \cdot 10^5\,J$$

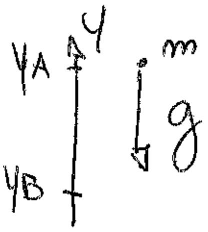
LAVORO E ENERGIA — FORZA PESO e FORZA ELASTICA

Conoscendo l'espressione generale del lavoro

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Vediamo due casi particolari

FORZA PESO



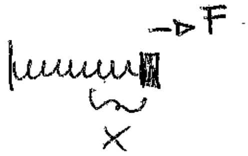
$$\vec{F}_p = -m\vec{g}$$

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{s}$$
$$= -mg\,(y_B - y_A)$$
$$= mg\,y_A - mg\,y_B$$
$$= U_A - U_B$$

l'energia potenziale

$$U = mgy + \text{cost}$$

FORZA ELASTICA



$$\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$$

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s}$$
$$= -K \int_A^B x\, dx$$

assumo il moto lungo x

$$= -\frac{1}{2} K \left(x_B^2 - x_A^2\right)$$
$$= \frac{1}{2} K \left(x_A^2 - x_B^2\right)$$
$$= U_A - U_B$$

l'energia potenziale

$$U_{el} = \frac{1}{2} K x^2 + \text{cost}$$

Conservazione dell'energia meccanica

Uguagliamo le relazioni trovate per l'energia potenziale e l'energia cinetica

$$\mathcal{L} = E_{cB} - E_{cA} = U_A - U_B$$

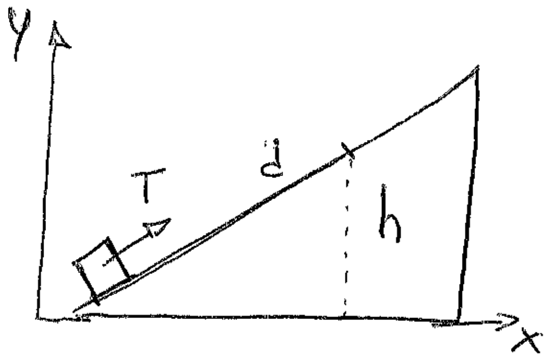
$$\rightarrow E_{cA} + U_A = E_{cB} + U_B$$

l'energia meccanica si conserva

Es 1:

Una cassa di massa $m = 15\,kg$ è trascinata in salita su un piano inclinato per $d = 5,7\,m$ a velocità costante fino ad una altezza $h = 2,5\,m$

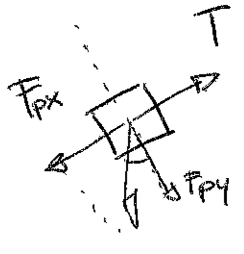
1) Calcolare il lavoro fatto dalla tensione del filo



Una volta capito cosa sono le energie è semplice affrontare il problema.
La cassa cambia quota da $h_1 = 0$ a $h_2 = 2,5\,m$
Quindi; considerando che il moto avviene a v = costante.

$$\mathcal{L} = -mg(h_1 - h_2)$$
$$= mgh = 368\,J$$

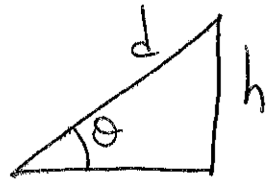
Si poteva fare in un altro modo



$$T = F_{px} = F_p \sin\theta$$
$$= mg \sin\theta$$

$$\mathcal{L} = F_{px} \cdot d$$
$$= d \cdot mg \sin\theta$$

Ci manca l'angolo θ



$$h = d \sin\theta \;\rightarrow\; \sin\theta = \frac{h}{d}$$

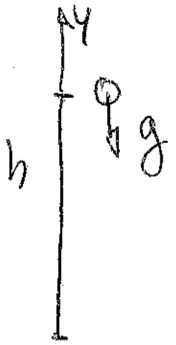
Quindi

$$\mathcal{L} = d\,mg\sin\theta = mg\frac{h}{d}d = mgh$$

è uguale!!

<u>Es2:</u>

Calcolare la velocità finale di una pallina che cade da 3 m di altezza.



$\rightarrow E_1 = E_{c_1} + U_1$ $\rightarrow$ la palla cade da ferma quindi $v_1 = 0$

$$E_{c_1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

$\rightarrow E_2 = E_{c_2} + U_2$ $\rightarrow$ la palla tocca terra quindi $h_2 = 0$

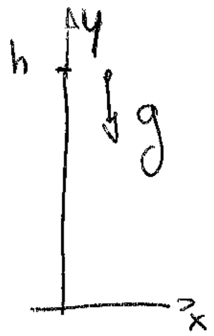
$$U_2 = mgh_2 = 0$$

$$E_{c_1} + U_1 = E_{c_2} + U_2$$

$$\rightarrow U_1 = E_{c_2}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \;\rightarrow\; v_2 = \sqrt{2gh} = 7{,}67\,\frac{m}{s}$$

Si poteva risolvere in un altro modo, usando la cinematica



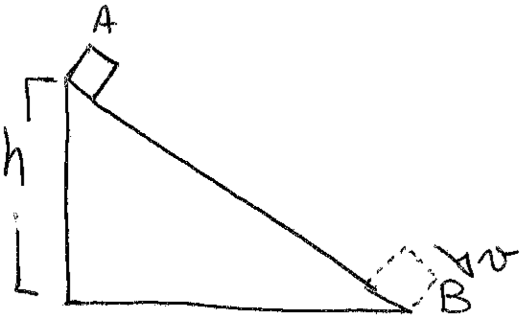
$$\begin{cases} y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v = v_0 - g t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - \frac{1}{2} 9{,}8\, t^2 & \rightarrow \quad t = 0{,}783\,s \\ v = -9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}783\,s = 7{,}67 \frac{m}{s} \end{cases}$$

Es 3:

Un blocco di massa $m = 5\,kg$ scivola su un piano inclinato da una altezza $h = 5\,m$

1) calcolare la velocità alla fine del piano inclinato

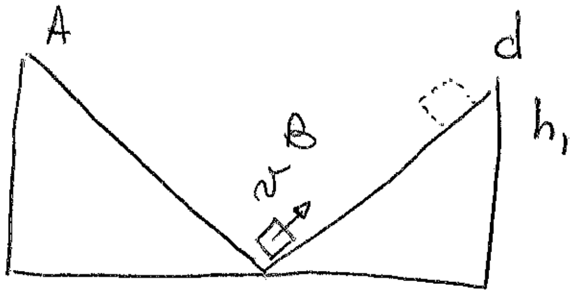


il moto può essere studiato nei 2 punti chiave la partenza A e l'a B.

$$\begin{cases} E_A = E_{cA} + U_A \\ E_B = E_{cB} + U_B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_A = U_A = mgh \\ E_B = E_{cB} = \frac{1}{2} m v_B^2 \end{cases}$$

$$v_B = \sqrt{2gh} = 9{,}9 \frac{m}{s}$$

Se alla fine del primo piano inclinato si trova un secondo piano inclinato uguale al primo con pendenza contraria, fino a che altezza la massa risale sul secondo piano?



Se non ci sono forze di attrito l'energia si conserva

Quindi

$$\begin{cases} E_A = U_A \\ E_B = E_{cB} \\ E_d = \cancel{E_{cd}} + U_d \end{cases}$$

si ferma quindi

$$E_A = E_B = E_d$$

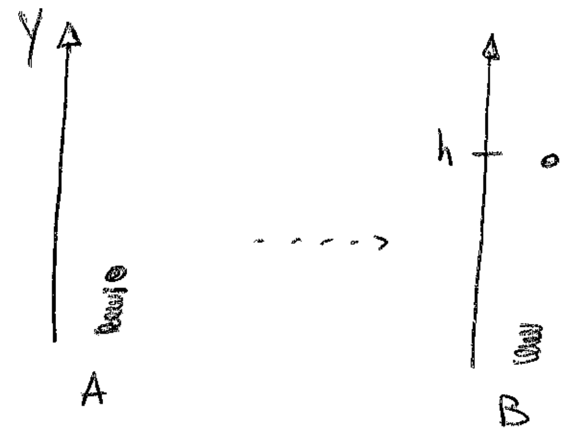
$\rightarrow U_d = mgh_1 = U_A = mgh$

$\rightarrow h_1 = h$ la stessa altezza

Es4:

Un dispositivo di lancio è costituito da una molla di costante elastica $K = 100\,N/m$ che agisce su una pallina di mass $m = 0{,}1\,kg$ la molla viene compressa di $\Delta x = 0{,}2\ m$ a che altezza h arriva la pallina?

2) Quale K_1 dovrebbe avere la molla se comprimendosi di 10 cm spinge la pallina fino a $h_1 = 1m$



$$\begin{cases} E_A = E_B \\ E_A = E_{cA} + U_A \\ E_B = E_{cB} + U_B \end{cases}$$

vediamolo nel caso più generico possibile, abbiamo 2 componenti dell'energia potenziale, la gravità e la molla

$$\begin{cases} E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} k \Delta x_A^2 + mgh_A \\ E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k \Delta x_B^2 + mgh_B \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_A = \frac{1}{2} k \Delta x^2 = 2\ J \\ E_B = mgh \end{cases}$$

$$E_A = E_B$$

$$\hookrightarrow mgh = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$h = \frac{2J}{mg} = 2{,}04\,m$$

2) stessa cosa ma vogliamo trovare K_1

$$\frac{1}{2}K_1\,\Delta x^2 = mgh_1 = 0{,}981\,J$$

$$\to K_1 = \frac{2mgh_1}{\Delta x^2} = \frac{2\cdot 0{,}981\,J}{(0{,}2)^2\,m^2} = 49{,}05\,\frac{N}{m}$$