# GRAVITAZIONE:

Leggi di Keplero

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L_s}{2m} \qquad F = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

$$T^2 = k a^3 = \frac{4\pi^2}{Gm} a^3 \qquad G = 6.674 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

## Es 1

Considerando le orbite circolari e i pianeti come punti materiali
Calcolare le velocità areolari della Terra e di Saturno

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L_s}{2m} = \frac{rmv}{2m} = \frac{1}{2} r v$$

La velocità con cui si muove un pianeta in moto circolare uniforme è

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Quindi

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi r^2}{T}$$

Usiamo $r_{sat} = 1,426 \cdot 10$ Km $T_{sat} = 103 \cdot 10^7 s$

$r_{terra} = 150 \cdot 10^6$ Km $T_{terra} = 3,15 \cdot 10^7 s$

terra

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi r_{terra}^2}{T_{terra}} = \frac{\pi \cdot 2,25 \cdot 10^{16} m^2}{3,15 \cdot 10^7 s} = 2,25 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s}$$

Saturno

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\pi r_{sat}^2}{T_{sat}} = \frac{\pi \cdot 2,03 \cdot 10 \; m^2}{103 \cdot 10^7 s} = 6,21 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s}$$

Es2:

determinare la distanza dalla superficie terrestre di un satellite geostazionario in orbita circolare.

Geostazionario vuol dire che il satellite vede sempre la stessa porzione di sup. terrestre, cioè che ha periodo di rivoluzione = periodo di rotazione terrestre

$$T = 1 \text{ giorno} = 86400 \, s$$

Sappiamo che

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm} a^3$$

$$\rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{Gm}{4\pi^2} T^2}$$

$$= 4,224 \cdot 10^7 m$$

$$= 42240 \text{ Km}$$

Pag. 2

Ma questa è la distanza dal centro del moto che è il centro della Terra
Quindi

$$h = a - r_t$$
$$= 4{,}224 \cdot 10^{7} m - 6{,}340 \cdot 10^{6} m$$
$$= 3{,}587 \cdot 10^{7} m$$

calcoliamo anche la velocità

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$
$$= 3072 \frac{m}{s}$$

Es 3:

Si supponga di lanciare un oggetto dalla sup. terrestre con $v_0 = \sqrt{R_T g}$

1) verificare se la $v_0$ è inferiore alla velocità di fuga

2) determinare l'altezza massima raggiunta

1)

$$v_0 = \sqrt{R_T g} \qquad |g| = G \frac{m}{r^2}$$
$$= \sqrt{R_T \frac{G m}{R_t^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{G m}{R_t}}$$

Vediamo se è più grande della velocità di fuga.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m_T m}{r} = \text{costante}$$

Se vogliamo la velocità di fuga $E = 0$

$$\frac{1}{2} m v^2 = G \frac{m_T m}{r}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 G m_T}{r}}$$

Quindi $v_0 < v$

2) Quando l'oggetto parte ha una energia

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G m_T m}{r}$$

Consideriamo il punto iniziale come l'origine del moto quindi

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

nel punto finale tutta l'energia cinetica è diventata potenziale

$$E_2 = \frac{G m_T m}{r^2} h = E_1$$

$$= \frac{G m_T m}{r_T^2} h = \frac{1}{2} m \frac{G m_T}{r_t}$$

$$= h = \frac{r_t}{2}$$

Es 3:

Un buco nero ha massa $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg
determinare la distanza d dal suo centro
alla quale la velocità di fuga è la
velocità della luce.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m_b m}{r} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m c^2 = G \frac{m_b m}{r}$$

$$\rightarrow c = \sqrt{\frac{2 G m_b}{r}}$$

$$= 3 \text{ Km}$$