Esercizi generali:

Es 1:

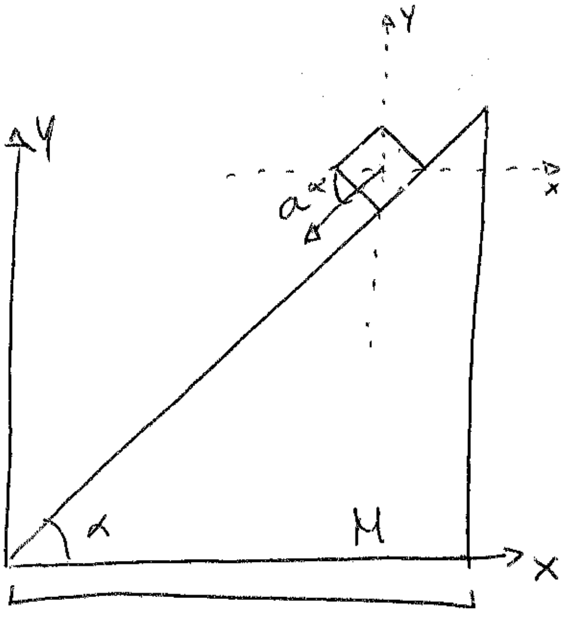
Una persona di massa $m = 60\,kg$ si trova fermo alla sommità di una scala lunga $l = 4\,m$ e inclinata $\alpha = \frac{\pi}{4}$

La scala è un blocco di massa $M = 300\,kg$ in grado di scorrere senza attrito su un piano verticale

All'istante $t = 0$ la persona inizia a scendere lungo la scala mantenendo una acc costante $|\vec{a}| = 1\,\frac{m}{s^2}$

1) determinare l'equazione oraria del moto della persona rispetto al suolo

2) determinare il lavoro compiuto dalla persona per percorrere tutta la scala.
Valutarlo sia rispetto al sistema di rif. (SDR) solidale al suolo, sia rispetto al SDR solidale al blocco.



La scala è un piano inclinato e la persona è una massa che si muove con a costante

il SDR xy è solidale con il terreno. (S)

indichiamo con X le componenti relative alla scala e con x quelle relative alla persona

Dal momento che non ci sono forze esterne al sistema sappiamo che:

1)

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0$$

Spostiamoci sul sistema (SDRNI) quindi l'uomo
Sappiamo dalla teoria che l'acc nel sistema di rif non inerziale (S') è composizione dell'acc nel sistema a riposo meno l'acc di trascinamento
Quindi

$$\ddot{x} = \ddot{X} - a\cos\alpha$$

Sostituiamo (mettiamo a sistema)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0 \\ \ddot{x} = \ddot{X} - a\cos\alpha \end{cases} \rightarrow m\ddot{X} - ma\cos\alpha + M\ddot{X} = 0$$

$$\rightarrow \ddot{X} = \frac{m}{m+M} a\cos\alpha$$

e viceversa

$$\ddot{x} = -\frac{M}{m+M} a\cos\alpha$$

per trovare la legge oraria integriamo $\ddot{x}$ e $\ddot{X}$ rispetto al tempo

$$\dot{x}(t) = \int \ddot{x}\, dt = -\frac{M}{m+M} a t \cos\alpha$$

E integriamo nuovamente

$$X(t) = \int \dot{X}(t)\,dt = -\frac{M}{2(m+M)}\,at^2\cos\alpha$$

il moto avviene in 2D quindi dobbiamo guardare cosa succede sull'asse y.
La condizione della scala fa sì che si possa trascurare la acc. di gravità.
(Si riesce a scendere una scala solo se si genera acc.)

$$\ddot{y} = -a\sin\alpha$$

$$\dot{y}(t) = \int \ddot{y}\,dt = -at\sin\alpha$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}at^2\sin\alpha$$

2) calcoliamo il lavoro rispetto al (SDRI)

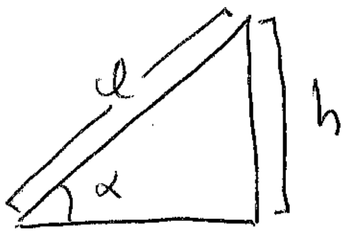
$$\mathcal{L}_{SDRI} = E_c + U = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 + \frac{1}{2}m\dot{X}(t)^2 - mgh$$

l'energia potenziale in gioco è quella gravitazionale

Attenzione la U è negativa perché sta aiutando nella discesa.

Ci servono h, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ e $\dot{X}(t)$

Calcoliamoli.



$$h = \ell \sin\alpha$$

per trovare la velocità abbiamo bisogno del tempo.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{M}{m+M}\, a t \cos\alpha \\ \dot{X}(t) = \dfrac{m}{m+M}\, a t \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -a t \sin\alpha \end{cases}$$

il tempo lo troviamo da

$$y(t) = -\frac{1}{2} a t^2 \sin\alpha \qquad \text{come al solito}$$

$$\to h = -\frac{1}{2} a t^2 \sin\alpha$$

$$\to \ell \sin\alpha = -\frac{1}{2} a t^2 \sin\alpha$$

$$\to t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}}$$

Quindi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{M}{m+M}\sqrt{2\ell a}\cos\alpha = -1{,}67\ \dfrac{m}{s} \\ \dot{y}(t) = -\sqrt{2\ell a}\sin\alpha = -2\ \dfrac{m}{s} \\ \dot{X}(t) = -\dfrac{m}{M}\,\dot{x}(t) = 0{,}33\ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Sostituiamo e otteniamo:

$$\mathcal{L}_{SDRI} = -1445\ J$$

Ci manca il lavoro rispetto al SDRNI.
Cosa cambia:
il lavoro terrà conto della Forza esercitata dalla persona, della forza peso e della velocità relativa.

$$\mathcal{L}_{SDRNI} = \frac{1}{2} m \left(v_r(t)\right)^2 + U + \mathcal{L}_{apparente}$$

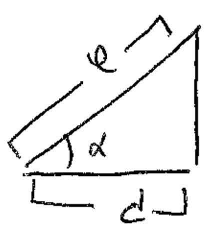
Attenzione come prima il lavoro della forza peso aiuta quindi è negativo lo stesso vale per il lavoro compiuto dall'acc. apparente

Ci rimane da trovare $v_r(t)$ e $\mathcal{L}$ apparente

$$v_r(t) = at \overset{!}{=} \sqrt{2\ell a}$$

$$\mathcal{L}_{SDRNI} = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{2\ell a}\right)^2 - mg\ell \sin\alpha - mAd$$

con $d = \ell \cos\alpha$

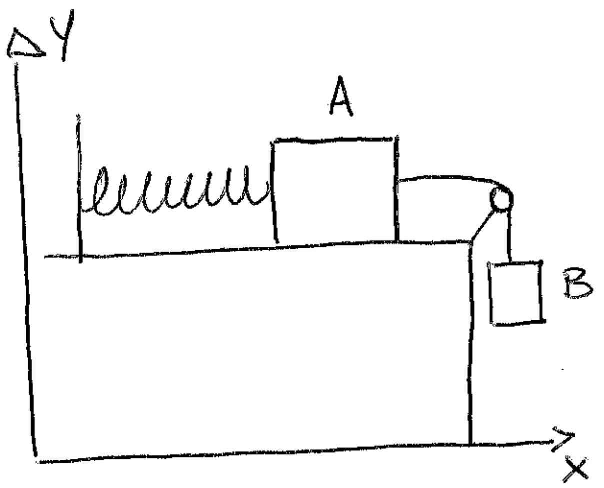


$$\mathcal{L}_{SDRNI} = -1445\ J$$

È lo stesso

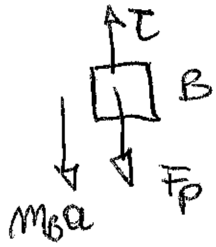
Es 2:

Nel dispositivo in figura il corpo A di massa $m_A = 2kg$ è poggiato su un piano orizzontale liscio ed è collegato ad un corpo B di massa $m_B = 2kg$ e ad una molla con $k = 200 \frac{N}{m}$
La molla è fissata all'altro estremo
il corpo B viene abbassato di un tratto Δh lungo la verticale e lasciato libero di muoversi
Si calcoli il periodo τ delle oscillazioni del sistema.



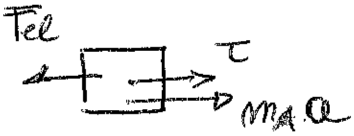
Ci sono 2 masse quindi analizziamone una alla volta.

m_B)



$$F_p - \tau = m_B a$$

m_A)



$$\tau - F_{el} = m_A a$$

il filo è uno solo quindi a è in comune

$$\begin{cases} m_B g - \tau = m_B a \\ -K x_A + \tau = m_a a \end{cases} \rightarrow m_B g - K x_A - m_a a = m_B a$$

$$\rightarrow (m_A + m_B) a = m_B g - K x_A$$

Quindi

$$(m_A + m_B) \frac{d^2 x}{dt^2} = m_B g - K x_A$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con periodo

$$t = 2\pi\omega$$

e con

$$\omega = \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}}$$

Quindi

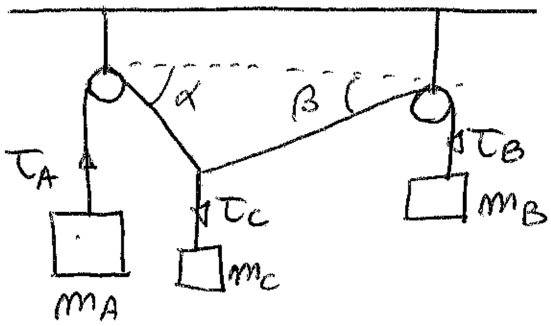
$$t = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} = 0{,}89 \text{ s}$$

<u>Es 3:</u>

La situazione in figura è di equilibrio, gli attriti sono trascurabili.

Calcolare m_A, m_B sapendo che $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

$m_C = 6 \text{ kg}$



Come sempre analizziamo la situazione, è un problema di statica, quindi le forze si equivalgano, (la somma o risultante è zero)

In questo caso è meglio parlare di tensioni

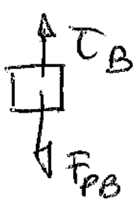
Quindi

$$\tau_A + \tau_B + \tau_C = 0$$

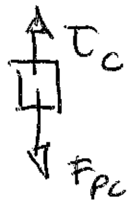
ora analizziamo ogni singola massa

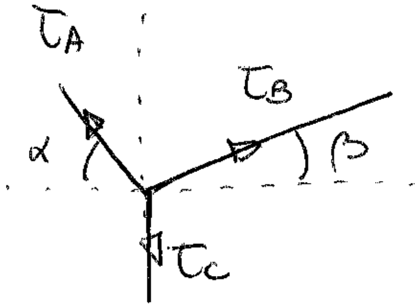
A) 

non ci dicono nulla di nuovo.

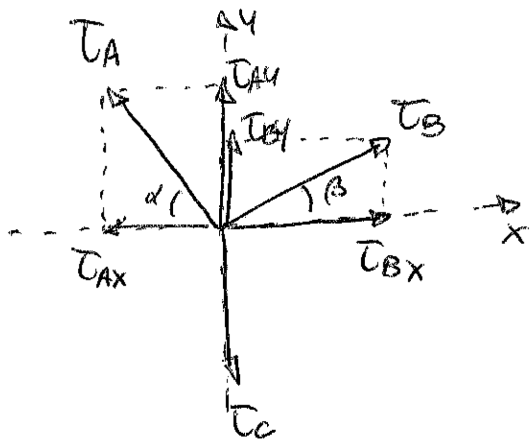
B) 

Quindi analizziamo il punto in cui le forze agiscono

C) 



Sappiamo i valori delle tensioni e ora proiettiamole sul nodo



Quindi:

$$\begin{cases} x)\ \tau_{Ax} = \tau_{Bx} \\ y)\ \tau_c = \tau_{Ay} + \tau_{By} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tau_A \cos\alpha = \tau_B \cos\beta \\ \tau_c = \tau_A \sin\alpha + \tau_B \sin\beta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tau_A = \tau_B \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\ \tau_c = \tau_A \sin\alpha + \tau_A \dfrac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\beta} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tau_B = \tau_A \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{1}{2}\tau_c \\ \tau_A = \dfrac{\tau_c}{\cos\alpha \operatorname{tg}\beta + \sin\beta} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,\tau_c \end{cases}$$

$$\tau_c = m_c g$$

$$\tau_A = \sqrt{\frac{3}{2}}\, m_c g$$

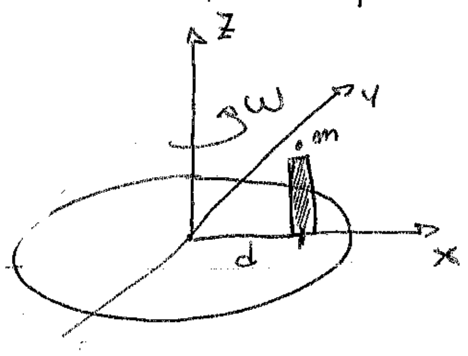
$$\rightarrow m_A = \sqrt{\frac{3}{2}}\, m_c = 5{,}2\,kg$$

$$\tau_B = \frac{1}{2}\tau_C$$
$$= \frac{1}{2} m_C g$$
$$\rightarrow m_B = \frac{1}{2} m_C = 3\ kg$$

Es 4:

Una piattaforma orizzontale ruota in senso antiorario con velocità angolare ω
Ad una distanza d dal centro si trova una torre di altezza h dalla cui sommità si lascia cadere un corpo di massa m.
si studi il moto del corpo in un sistema di rif solidale al suolo in 2 casi

1) il corpo viene lasciato con velocità nulla rispetto al suolo
2) " " " " " " " rispetto alla piattaforma.



il SDR xyz è solidale col terreno, ruota solo la piattaforma

la posizione del corpo è

$$\begin{cases} x(0) = d \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h \end{cases}$$

1) Se viene semplicemente lasciato cadere con v nulla il moto è uniformemente acc lungo z.

Quindi:

$$\begin{cases} z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y(t) = 0 \\ x(t) = d \end{cases}$$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ tempo di volo

2) in questo caso c'è una velocità, il testo dice velocità nulla rispetto alla piattaforma, quindi velocità angolare ω rispetto al suolo.

$$\begin{cases} x(0) = d \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \omega d \end{cases}$$

Quindi ho un moto uniforme lungo y e unif. accelerato lungo z. È un moto parabolico.

il tempo di volo è lo stesso

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Quindi

$$\begin{cases} x(t_1) = d \\ y(t_1) = \omega d \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ z(t_1) = 0 \end{cases}$$