Moti piani (cinematica 2D)

I moti piani si descrivono come composizione di moti rettilinei, l'idea è di proiettare in ogni istante il punto della traiettoria sugli assi e di studiare separatamente i 2 moti

in 2 dimensioni

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$$

il vettore accelerazione

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$$

riassumendo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_x(t) \\ v_y = v_y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \end{cases}$$

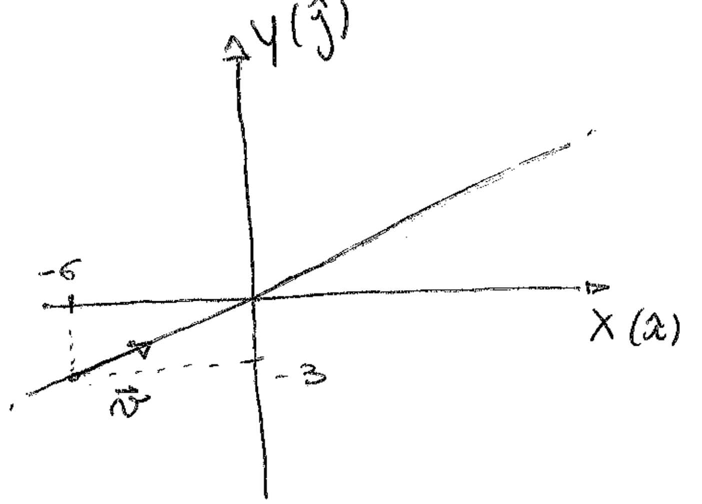
Es 1:

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo la traiettoria $x - 2y = 0$

Sapendo che il punto si muove con $\bar{v} = 4{,}20\ \frac{m}{s}$ lungo la traiettoria e che nell'istante t_0 si trova

$$(t_0) = (-6; -3)$$

determinare le coordinate per ogni valore di t.

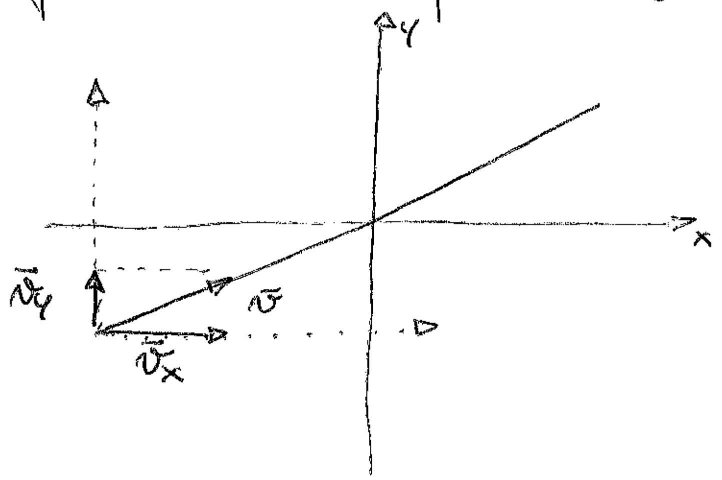


il moto è in 2D quindi scrivo già un sistema

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x t \\ \vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y t \end{cases}$$

con $\vec{v}_x$ intendo la proiezione di $\vec{v}$ lungo x.

facciamo le proiezioni:



l'equazione della traiettoria

$$x - 2y = 0$$
$$\to 2y = x$$
$$\to y = \frac{x}{2}$$

mi dice che le quantità su y sono la metà rispetto a quelle su x.

Quindi

$$v_x = 2v_y$$

conosco questa relazione e il modulo del vettore somma

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$
$$\to |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_x|^2 + |\vec{v}_y|^2}$$

$$\begin{cases} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_x = 2v_y \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v^2 = 5v_y^2 \\ v_x = 2v_y \end{cases} \rightarrow \quad v_y = \frac{v}{\sqrt{5}} = 1{,}88\ \frac{m}{s}$$

$$v_x = 2v_y = 3{,}76\ \frac{m}{s}$$

Quindi

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x t \\ y(t) = y(t_0) + v_y t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = -6 + 3{,}76\,t \\ y(t) = -3 + 1{,}88\,t \end{cases}$$

<u>Es 2</u>:

Un punto materiale si muove dal punto $P(t_0) = (2{,}5\ ,\ 1{,}2)$ con velocità iniziale $v_x(t_0) = 2{,}1\ \frac{m}{s}$ e $v_y(t_0) = 0\ \frac{m}{s}$. $t_0 = 0$ tempo iniziale.

Il punto si muove con accelerazione costante

$a_x = -1{,}2\ \frac{m}{s^2}$ $\quad a_y = 0{,}20\ \frac{m}{s^2}$

1) determinare la posizione all'istante $t_1 = 5{,}1\,s$

2) determinare la velocità all'istante t_1

1) il punto materiale si muove su un piano quindi il moto è uniformemente accelerato

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_x(t_0)\cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}_x t^2 \\ \vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \vec{v}_y(t_0)\cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}_y t^2 \end{cases}$$

Tutte le grandezze vettoriali, come sempre, dal momento che sono scomposte su assi ortogonali possono essere trattate come scalari

$$\begin{cases} x(t) = 2{,}5\,m + 2{,}1\,\frac{m}{s}\cdot t - 0{,}6\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \\ y(t) = 1{,}2\,m + 0{,}1\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \end{cases}$$

Se considero $t = t_1$

$$\begin{cases} x(t_1) = -2{,}4\,m \\ y(t_1) = 3{,}8\,m \end{cases}$$

2) Per le componenti della velocità abbiamo la legge oraria:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + a_x t \\ v_y(t) = v_y(t_0) + a_y t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_x(t_1) = 2{,}1\,\frac{m}{s} - \frac{1}{2}\,\frac{m}{s^2}\,t_1 = -4\,\frac{m}{s} \\ v_y(t_1) = \quad \cdot t_1 = 1{,}02\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

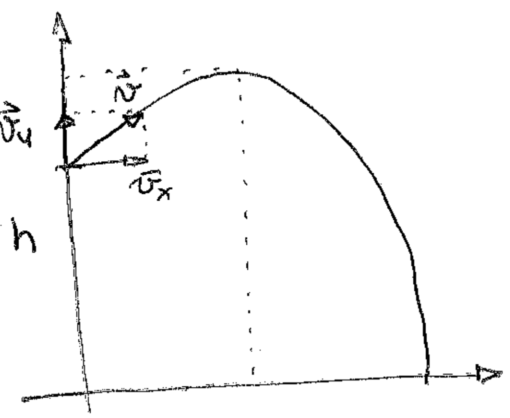
$$v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = 4{,}12\,\frac{m}{s}$$

Moto parabolico:

Es 1:

Una punta viene gettata da una altezza $h = 2m$
Con velocità iniziale $\vec{v} = (3,2\ \hat{i} + 2,4\ \hat{j})\ \frac{m}{s}$

1) altezza massima raggiunta
2) tempo di volo
3) distanza orizzontale dal punto di lancio al punto di atterraggio
4) la velocità d'impatto

1) 

Scriviamo subito il sistema

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x(t_0) \cdot t \\ \vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y(t_0) \cdot t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \vec{v}_x(t) = \vec{v}_x(t_0) \\ \vec{v}_y(t) = \vec{v}_y(t_0) - \vec{g}t \end{cases}$$

Voglio sapere l'altezza massima.

$$y_{max} = y(t_1) = h + v_y(t_0) \cdot t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

Cosa mi manca? t_1, quindi penso che il momento in cui raggiunge l'altezza massima è il momento in cui $\vec{v}_y = 0$

$$v_y(t_1) = 0 = v_y(t_0) - gt_1$$

Metto a sistema:

$$\begin{cases} y(t_1) = h + v_y(t_0) \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ 0 = v_y(t_0) - g t_1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y(t_1) = h + v_y(t_0) \frac{v_y(t_0)}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_y(t_0)\, v_y(t_0)}{g^2} \\ t_1 = \frac{v_y(t_0)}{g} \end{cases}$$

$$\rightarrow y(t_1) = h + \frac{v_y^2(t_0)}{2g} = 2{,}3\,m$$

2) il tempo di volo coincide con l'istante (t_2) in cui $y(t_2) = 0$

$$y(t_2) = 0 = h + v_y(t_0) \cdot t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$\rightarrow t_2 = \frac{v_y(t_0) + \sqrt{v_y^2(t_0) + 2gh}}{g}$$ la soluzione positiva.

$$= \frac{2{,}4 \frac{m}{s} + \sqrt{(2{,}4)^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 2}\ \frac{m}{s}}{9{,}8\ \frac{m}{s^2}}$$

$$= 0{,}93\ s$$

3) La distanza orizzontale percorsa è un moto uniforme che dura il tempo t_2 di volo.

$$X(t_2) = v_x(t_0) \cdot t_2 = 3{,}2\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}93\,s = 3\,m$$

4) La velocità d'impatto al tempo t_2 è la somma dei vettori velocità lungo gli assi al tempo t_2

$$v(t_2) = |\vec{v}(t_2)| = \sqrt{v_x^2(t_2) + v_y^2(t_2)}$$

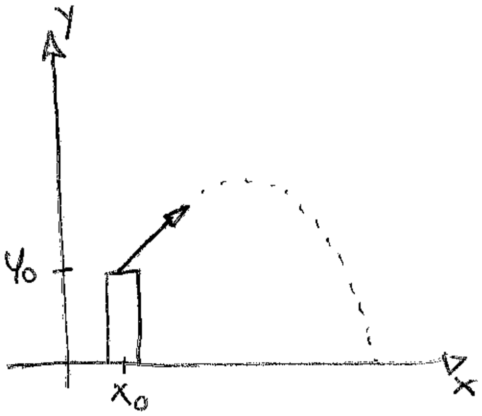
$$\begin{cases} v_x(t_2) = v_x(t_0) \\ v_y(t_2) = v_y(t_0) - g\,t_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x(t_2) = 3{,}2\,\frac{m}{s} \\ v_y(t_2) = 2{,}4\,\frac{m}{s} - (9{,}8 \cdot 0{,}93)\frac{m}{s} = -6{,}7\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

Quindi

$$v(t_2) = \sqrt{(2{,}4)^2 + (-6{,}7)^2}\,\frac{m}{s} = 7{,}4\,\frac{m}{s}$$

Es 2: trovare l'equazione della traiettoria di un moto parabolico nel caso più generale possibile

1)



usiamo il solito sistema

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)\cdot t \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) \\ v_y(t) = v_y(t_0) - gt \end{cases}$$

utilizziamo un formalismo più compatto.

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x(t) = x \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_x(t_0) = v_{0x} \\ v_x(t) = v_x \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} v_y(t_0) = v_{0y} \\ v_y(t) = v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = y_0 + \dfrac{v_{0y}(x-x_0)}{v_{0x}} - \dfrac{1}{2} g \left[\left(\dfrac{x-x_0}{v_{0x}}\right)\right]^2 \end{cases}$$

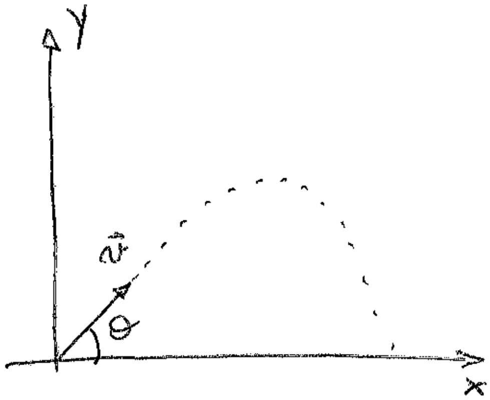
$$\rightarrow y = y_0 + \frac{v_{0y}\, x}{v_{0x}} - \frac{v_{0y}\, x_0}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} - \frac{1}{2} g \frac{x_0^2}{v_{0x}^2} + g \frac{x x_0}{v_{0x}^2}$$

equazione generale della traiettoria

2) Semplificarla in caso di $y_0 = x_0 = 0$

$$y = \frac{v_{0y}\, x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v_{0x}^2} g$$

3) trovare la traiettoria in funzione dell'angolo θ con il quale l'oggetto è lanciato rispetto al suolo.



$\vec{v}$ è il vettore velocità, possiamo scomporla per ottenere θ.

$|\vec{v}_x| = |\vec{v}_0| \cos\theta$

$|\vec{v}_y| = |\vec{v}_0| \sin\theta$

Sostituiamo questi valori all'interno della traiettoria.

$$y = \frac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2 \cos^2\theta}$$

$$= x \, tg\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

3) trovare l'espressione generica della gittata

La gittata è la distanza lungo x che l'oggetto percorre quando tocca terra alla fine del moto.

Quindi $y = 0$

$$0 = x \, tg\theta - \frac{1}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

$$\to tg\theta - \frac{1}{2} \frac{x}{v_0^2 \cos^2\theta} = 0$$

$$\to x = 2 tg\theta \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}$$

$$= \frac{2 \sin\theta \, v_0^2 \cos^{\cancel{2}}\theta}{g \cancel{\cos\theta}}$$

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$ gittata

1) trovare la formula generale per calcolare la gittata massima raggiunta

la formula appena ricavata

$$x = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

è massima quando $\sin(2\theta) = 1$

Quando è massima?

Quando $\theta = 45°$

verifichiamolo

$$\sin 2\theta = 1$$

$$\rightarrow 2\theta = \arcsin(1)$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\arcsin(1)}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

Es 3:

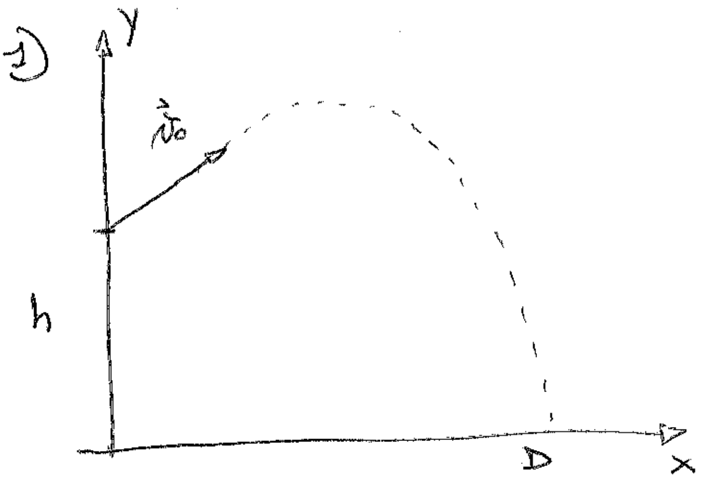
Un cannone spara con una v_0 iniziale avente componenti $v_{0x} = \frac{4}{5} v_0$ e $v_{0y} = \frac{3}{5} v_0$
Il bersaglio si trova ad una distanza $D = 5800\,m$ in una valle più bassa di $h = 150\,m$

1) v_0 in modo che il cannone colpisca il bersaglio

2) l'istante in cui il bersaglio viene colpito

3) la velocità della palla quando colpisce il bersaglio

1)



$$\begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} D = \frac{4}{5} v_0 t \\ 0 = h + \frac{3}{5} v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

dalla prima

$$\begin{cases} t = \frac{5D}{4 v_0} \\ h + \frac{3}{5} v_0 \frac{5}{4 v_0} D - \frac{1}{2} g \left(\frac{5D}{4 v_0}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad h + \frac{3}{4} D - \frac{25 D^2}{32 v_0^2} g = 0 \qquad (1)$$

Vogliamo v_0 quindi:

$$\frac{25 D^2}{32 v_0^2} g = h + \frac{3}{4} D$$

$$25 D^2 g = \left[h + \frac{3}{4} D\right] 32 v_0^2$$

$$\to v_0^2 = \frac{25 D^2 g}{\left(h + \frac{3}{4} D\right) 32}$$

$$v_0^2 = \frac{25}{32} \frac{D^2 g}{\frac{4h + 3D}{4}}$$

$$= \frac{25}{32} \cdot \frac{4 D^2 g}{4h + 3D}$$

$$= \frac{25}{8} \frac{D^2 g}{4h + 3D}$$

$$v_0 = \frac{5}{2} D \sqrt{\frac{g}{8h + 6D}} = 239 \frac{m}{s}$$

2) Sostituisco v_0 nella prima eq. del mio sistema

$$t_1 = \frac{5}{4} D \cdot \left(\frac{5}{2} D \sqrt{\frac{g}{8h + 6D}}\right)^{-1}$$

$$= \sqrt{\frac{4h + 3D}{2g}} = 30{,}3 \text{ s}$$

3) Per determinare la velocità finale ho bisogno del secondo sistema di equazioni quello per la velocità:

$$\begin{cases} v_x = \frac{4}{5} v_0 \\ v_y = \frac{3}{5} v_0 - g t \end{cases}$$

Quindi all'istante t_1

$$\begin{cases} v_x(t_1) = \frac{4}{5} v_0 \\ v_y(t_1) = \frac{3}{5} v_0 - \frac{5}{4}\frac{D}{v_0} g \end{cases}$$

Quindi

$$v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} v_0^2 + \frac{9}{25} v_0^2 + \frac{25}{16}\frac{D^2}{v_0^2} g^2 - \frac{3}{2} D g}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + \frac{25}{16}\frac{D^2}{v_0^2} g^2 - \frac{3}{2} D g}$$

Se uno riprende ciò che abbiamo fatto al punto 1

$$h = \frac{25}{32}\frac{D^2}{v_0^2} g - \frac{3}{4} D$$

$$\rightarrow \frac{25}{16}\frac{D^2}{v_0^2} g^2 - \frac{3}{2} D g = 2gh$$

Quindi

$$v(t_1) = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

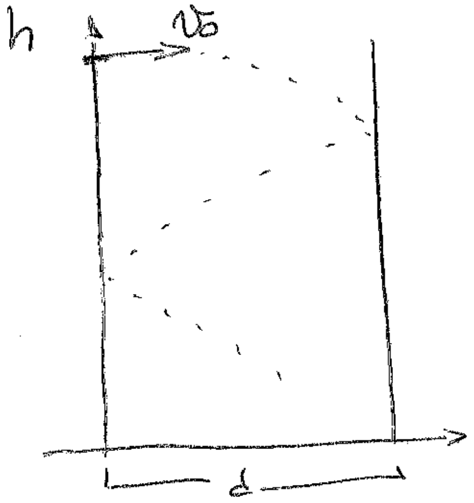
$$= 245 \ \frac{m}{s}$$

Es4:

Una pallina di gomma viene lanciata orizzontalmente con velocità $v_0 = 10\frac{m}{s}$ dalla sommità di una parete alta $h = 5m$.
Di fronte alla parete alla distanza $d = 0,6m$ si trova un'altra parete identica alla prima considerando il caso ideale (una volta che rimbalza la pallina cambia solo verso)

1) il tempo t_1 impiegato dalla pallina per arrivare al suolo e il numero di urti

2) in quale punto e con quale velocità, direzione e verso la pallina urta il pavimento



1) Considerando il caso ideale non c'è nessuna differenza nel tempo di caduta tra questo moto e un moto parabolico qualunque.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t_1 \\ y = y_0 + v_{0y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g t_1 \end{cases}$$

$v_{0x} = 10 \frac{m}{s}$

$v_{0y} = 0 \frac{m}{s}$

Quindi:

$$y = h - \frac{1}{2} g t_1^2$$

il moto lungo y è di caduta libera.

$$\rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1\,s$$

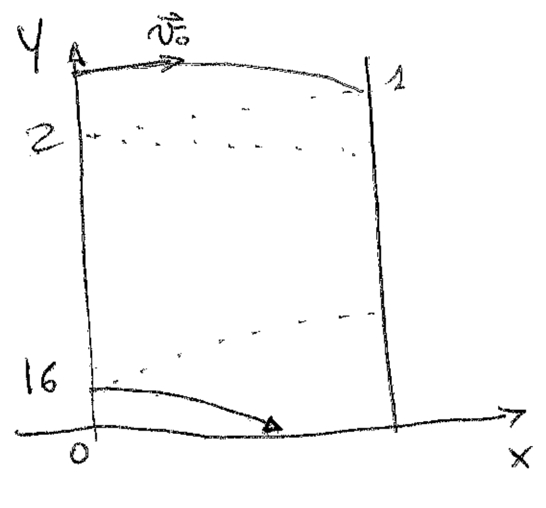
il numero di urti equivale al numero di volte che la pallina percorre la distanza d nel tempo t_1 considerando il moto solo lungo x.

$$x = v_{0x} t_1$$

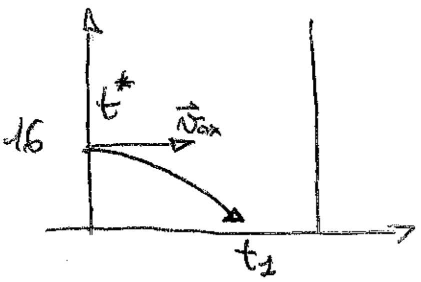
$$\rightarrow n d = v_{0x} t_1$$

$$\rightarrow n = \frac{v_{0x} t_1}{d} = \frac{10\,m}{0{,}6\,m} = 16{,}66 \text{ volte}$$

Quindi rimbalza 16 volte e non riesce a fare il 17 rimbalzo



2) Per capire in quale punto e con che velocità arriva la pallina dobbiamo studiarne il moto dal 16 rimbalzo in poi.



la componente della velocità lungo x non cambia mai. (sono vettori e se l'unica accelerazione è lungo y non cambia nulla su x che è ortogonale)

devo solo trovare lo spazio x(t) percorso tra t^* e t_1

$$X = v_{0x}(t_1 - t^*)$$

mi serve t^* che è il tempo in cui compie 16 rimbalzi

$$nd = v_{0x} t^*$$

$$\rightarrow 16d = v_{0x} t^*$$

$$\rightarrow t^* = \frac{16d}{v_{0x}} = 0{,}96\,s$$

Quindi

$$X = v_{0x}(1s - 0{,}96s) = 10\frac{m}{s} \cdot 0{,}04s = 0{,}4\,m$$

questa è la distanza dall'origine alla quale tocca terra

Quanto è la velocità finale

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

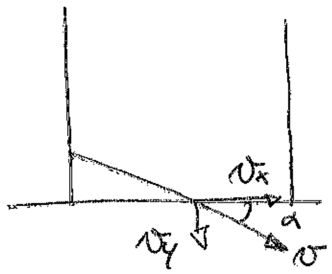
facciamo un passo alla volta riprendiamo il sistema di eq. per la velocità

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = 10 \frac{m}{s} \\ v_y = -gt_1 = -9{,}8 \frac{m}{s} \end{cases}$$

Quindi

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-9{,}8)^2} \ \frac{m}{s} = 14 \ \frac{m}{s}$$

direzione



$$v_y = v \sin\alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \arcsin \frac{v_y}{v} = -45^\circ$$ rispetto al disegno.