CINEMATICA

Formulario:

a) Moto uniforme

$$s(t) = s_0 + vt \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

b) Moto uniformemente vario

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad v(t) = v_0 + at$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

c) Moto vario

$$s = s(t) \qquad v(t) = \frac{ds}{dt} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Considerando che tutte le grandezze in gioco sono vettori.

$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$$
$$= dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

Quindi

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

ribaltando la cosa è ovvio:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{a}\,dt$$

Es1:

Un veicolo inizialmente fermo accelera con $a_1 = 0{,}9 \frac{m}{s^2}$

Dopo $\tau_1 = 4 min$ l'acc. si annulla e il veicolo resta in moto uniforme per $\tau_2 = 10 min$.

Dopo questo tempo il veicolo inizia a rallentare con $a_2 = 1{,}8 \frac{m}{s^2}$

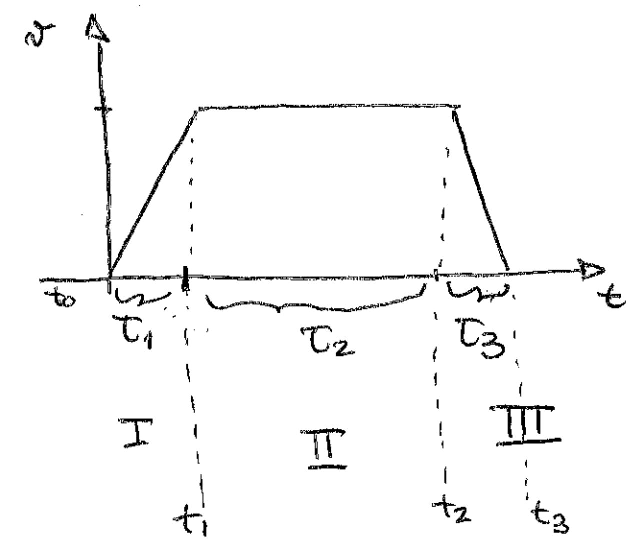
a) calcolare il tempo τ_3 impiegato dal veicolo per fermarsi

b) calcolare velocità media e acc. media sull'intero percorso.

un poco di ripasso:

$$\begin{cases} a = \frac{dv}{dt} \\ v = \frac{ds}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \\ \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = v_0 + at \\ S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

a) facciamo uno schema di ciò che succede:



$$\begin{cases} \tau_1 = t_1 - t_0 \\ \tau_2 = t_2 - t_1 \\ \tau_3 = t_3 - t_2 \end{cases}$$

I) la velocità iniziale è nulla

$v_0 = 0 \frac{m}{s}$

$v(t_1) = a_1(t_1 - t_0)$

$= 0{,}9 \frac{m}{s^2} \cdot \tau_1$

$$v(t_1) = 0{,}9\,\frac{m}{s^2} \cdot 240\,s$$
$$= 216\,\frac{m}{s} \quad = 777{,}6\,\frac{Km}{h}$$

Percorre uno spazio

$$S(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9\,\frac{m}{s^2} \cdot 57600\,s^2$$
$$= 25920\,m \quad = \quad 25{,}92\,km$$

II) Qui la velocità rimane costante quindi il moto è uniforme

$$S(t_2) = v(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$$
$$= v(t_1)\,\tau_2$$
$$= 216\,\frac{m}{s} \cdot 600\,s$$
$$= 129\,600\,m \quad = \quad 129{,}6\,Km$$

III) So quale è la velocità iniziale (perché è la stessa che ha nel tratto precedente)
So che decelera quindi per ricavarmi il tempo

$$v(t_3) = v(t_2) - a_2(t_3 - t_2)$$
$$0 = 216\,\frac{m}{s} - 1{,}8\,\frac{m}{s^2}\,\tau_3$$
$$\rightarrow \tau_3 = \frac{216\,\frac{m}{s}}{1{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 120\,s \quad = \quad 2\,min$$

$$S(t_3) = v(t_2)\,\tau_3 - \frac{1}{2} a_2 \tau_3^2$$
$$= 216\,\frac{m}{s} \cdot 120\,s - 0{,}5 \cdot 1{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (120)^2 s^2 \quad = \quad 12960\,m = 12{,}96\,Km$$

b) la velocità media è il percorso totale fratto il tempo totale impiegato.

$$v_m = \frac{25920\,m + 129600\,m + 12960\,m}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}$$

$$= \frac{168480\,m}{600 + 240 + 120} = 175,5\ \frac{m}{s} = 48,75\ \frac{Km}{h}$$

l'accelerazione media è il medesimo concetto applicato alla velocità:

$$a_m = \frac{a_1\tau_1 - a_2\tau_3}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = \frac{0,9 \cdot 240 - 1,8 \cdot 120}{\dots} = 0$$

risultato ovvio perché all'inizio e alla fine la velocità è la stessa, cioè nulla.

Es 2:

Una ragazza si muove da casa in bicicletta alla velocità costante di $36 \frac{km}{h}$

1) Scrivere la legge oraria
2) determinare la posizione dopo $t_1 = 2$ min e mezzo
3) dopo quanto tempo avrà percorso 10 km.

1)
$$v_A = \frac{36 \frac{km}{h}}{3{,}6} = 10 \frac{m}{s}$$

la legge oraria dato che il moto è uniforme

$$x_A(t) = 10 \frac{m}{s} t$$

2) dato che 2 min e 30 secondi sono $\underline{150\,s}$

$$x_A(t_1) = 10 \frac{m}{s} \cdot 150\,s = 1500\,m$$

3) la distanza finale sono 10 km = 10'000 m
quindi:

$$10000\,m = 10 \frac{m}{s} \cdot t_2$$

$$\rightarrow t_2 = \frac{10000\,m}{10 \frac{m}{s}} = 1000\,s = 16\,m\,40\,s$$

Es 3:

Il fratello della ragazza dopo 4 min dalla sua partenza comincia a seguirla alla velocità costante di $12 \frac{m}{s}$

1) in quale istante il fratello raggiunge la ragazza

2) distanza percorsa fino al momento dell'incontro

1) $4\,min = 240\,s$

l'istante in cui parte il ragazzo non è 0 ma $t_* = 240\,s$

Quindi

$$x_B(t) = 12\frac{m}{s}(t - t_*)$$
$$= 12\frac{m}{s}(t - 240\,s)$$

la condizione per cui si incontrano è che

$$x_A(t) = x_B(t)$$
$$\rightarrow 10\frac{m}{s}\,t = 12\frac{m}{s}(t - 240\,s)$$
$$\rightarrow 2t = 12\frac{m}{s} \cdot 240\,s$$
$$\rightarrow t = 1440\,s = 24\,min$$

2) la distanza che percorrono è la stessa in quanto partono dallo stesso punto.
Possiamo usare la legge oraria di uno dei 2 a piacimento

$$x_A(t) = 10\frac{m}{s} \cdot 1440\,s = 14400\,m = 14{,}4\,Km$$

Es 4:

data $\vec{r}(t) = kt(\hat{i}) - bt^2(\vec{j})$

1) ricavare $\vec{v}$ e $\vec{a}$

2) trovare la traiettoria per $k=4$ $b=1$

1) sappiamo che $\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ quindi facciamo la derivata

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = k(\hat{i}) - 2bt(\hat{j})$$

Sappiamo anche che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ quindi deriviamo ancora

$$\vec{a} = -2b(\hat{j})$$

2) dai versori capisco che il moto si svolge su 2 direzioni. Grazie alla proprietà dei vettori so che direzioni $\perp$ sono indipendenti:

$$\begin{cases} x(t) = kt \\ y(t) = -bt^2 \end{cases}$$ ricavo t dalla prima

$t = \frac{x}{k}$ e sostituisco nella seconda

$$y = -b\frac{x^2}{k^2} = -\frac{1}{16}x^2$$

Es 5:

Un camion si muove lungo una strada con $v_0 = 90 \frac{km}{h}$ quando a 85 metri di distanza vede una transenna.
L'autista frena con decelerazione pari a $3,8 \frac{m}{s^2}$

1) istante in cui il camion si ferma
2) a quanta distanza dalla transenna si ferma
3) a quanta distanza " " la sua velocità si è dimezzata.

1) il camion ha velocità iniziale e subisce una decelerazione:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 - at \end{cases}$$

l'informazione del testo è che il camion si ferma $\rightarrow$ velocità finale $= 0$

$$v(t_1) = 0 = v_0 - a t_1$$

$$\rightarrow 0 = 25 \frac{m}{s} - 3,8 \frac{m}{s^2} t_1$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{25}{3,8} s = 6,58 s$$

$v_0 = 90 \frac{Km}{h} = 25 \frac{m}{s}$

$t_1 = \frac{v_0}{a}$

2) lo spazio percorso prima di fermarsi è

$$x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 = 25 \cdot 6,58 - 0,5 \cdot 3,8 \cdot (6,58)^2 = 82,2 m$$

ande se abbiamo trovato il risultato facciamo i conti fatti bene.

$$\begin{cases} x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2 \\ t_1 = \frac{v_0}{a} \end{cases}$$

$$\rightarrow x(t_1) = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2}$$

$$= \frac{v_0^2}{2a} = 82,2 m$$

Quindi si ferma ad una distanza di

$$85 - 82,2 = 2,8 m$$

3) Stessa cosa del punto 1 solo che invece che cercare quando $v(t)=0$ cerchiamo quando $v(t) = \frac{1}{2} v_0$

$$v(t_2) = \frac{1}{2} v_0 = v_0 - a t_2$$

$$\rightarrow t_2 = \frac{v_0}{2a}$$

Sostituiamo nell'equazione dello spazio

$$x(t_2) = v_0 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2$$

$$= \frac{v_0 v_0}{2a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{4a^2}$$

$$= \frac{3 v_0^2}{8a} = 61,7 m$$

Es 6:

Un punto materiale si muove con legge oraria

$$x(t) = t^2 - 5t + 2$$

1) Velocità media nell'intervallo compreso tra t e $t+\Delta t$

2) La velocità istantanea al generico istante t

1) $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$

$$= (t+\Delta t)^2 - 5(t+\Delta t) + 2 - (t^2 - 5t + 2)$$

$$= \cancel{t^2} + 2t\Delta t + \Delta t^2 - \cancel{5t} - 5\Delta t + \cancel{2} - \cancel{t^2} + \cancel{5t} - \cancel{2}$$

$$= \Delta t\,(2t - 5 + \Delta t)$$

La velocità media per definizione è

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta t\,(2t - 5 + \Delta t)}{\Delta t} = 2t - 5 + \Delta t$$

2) La velocità istantanea è da definizione il limite $\Delta t \to 0$ di quella media

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 5 + \Delta t)$$

$$= 2t - 5$$

Es 7:

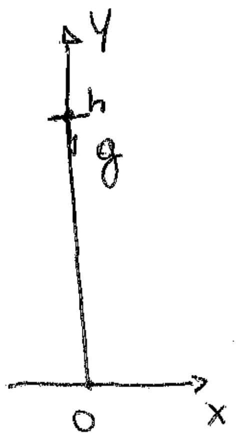
Un punto materiale viene lasciato cadere da una altezza h

1) determinare il tempo impiegato ad arrivare al suolo

2) la velocità di impatto col suolo

3) calcolare considerando $h = 8\,m$

1)



In questi esercizi è conveniente prendere come 0 il suolo (origine degli assi) che in questo caso sarà il punto finale del moto quindi $x(t)$

$$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\to 0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\to t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2) dato che la velocità iniziale è zero sappiamo che

$$v(t) = v_0 + at$$

$$= 0 - gt$$

$$v(t) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= -\sqrt{2gh}$$

3) con $h = 8m$ $\quad g = 9{,}8\,\frac{m}{s}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 8\,m}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}} = 1{,}28\,s$$

$$v = -\sqrt{2gh} =$$

$$= -\sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\,8\,m} = -12{,}5\,\frac{m}{s}$$

Es 8:

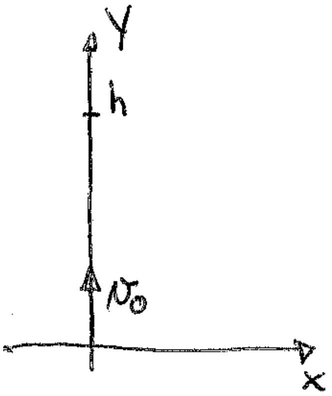
Un punto materiale viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0.

1) determinare l'istante in cui il punto materiale raggiunge l'altezza massima h.

2) determinare l'istante di ricaduta a terra e la velocità d'impatto

3) Si consideri in particolare il caso con $v_0 = 4.15 \frac{m}{s}$

1) In questo caso abbiamo una velocità iniziale



Quindi $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$\rightarrow x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

e $v(t) = v_0 + at$

$= v_0 - gt$

Quindi abbiamo un sistema

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_0 - gt \end{cases}$$

l'istante in cui raggiungo la massima altezza è anche quello in cui la velocità $v(t_1) = 0$

Quindi:

$$\begin{cases} 0 = v_0 - g t_1 \\ h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{v_0}{g} \\ h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} \end{cases}$$

Quindi $h = \frac{v_0^2}{2g}$

2) l'istante di ricaduta a terra è individuato dal fatto che il punto torna a terra

$$x(t_2) = 0$$
$$0 \overset{!}{=} v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$
$$\rightarrow t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2t_1$$

ha 2 soluzioni
la prima è $t_2 = 0$
che corrisponde all'istante iniziale

La velocità con cui tocca il suolo è

$$v(t_2) = v_0 - g t_2 = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0$$

è uguale a quella di partenza ma cambiata di segno. (direzione opposta)

3)

$$t_1 = \frac{4{,}15 \frac{m}{s}}{9{,}8 \frac{m}{s^2}} = 0{,}423\ s$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(4{,}15)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = 0{,}878\ m$$

$$t_2 = 2t_1 = 0{,}846\ s$$

$$v(t_2) = -4{,}15 \frac{m}{s}$$