

## ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

- Vettori liberi e vettori applicati

- Vettore libero:

- individuato da una **direzione orientata** ed una **lunghezza**
    - non ha un'ubicazione fissa nello spazio:
    - può essere traslato sia lungo la sua retta d'azione che parallelamente

*Due **vettori liberi** sono uguali se hanno ugual **modulo, direzione e verso**.*

- Vettore applicato:

- Va specificato anche il **punto** dello spazio nel quale va applicato

*Due **vettori applicati** sono uguali se hanno ugual **modulo, direzione, verso e punto di applicazione***

- Operazioni sui vettori liberi

- Componente di un vettore a secondo una direzione orientata u:

$$a_u = a \cos \phi$$

- Rappresentazione cartesiana dei vettori:

- Terna levogira, sinistrorsa o destra
    - $a_x = a \cos \alpha$ ,  $a_y = a \cos \beta$ ,  $a_z = a \cos \gamma$  da cui:  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$
    - $a = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}$

- Somma di vettori  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ :

- Costruzione della poligonale dei vettori
    - Il risultante si ottiene unendo l'origine del primo vettore con l'estremo dell'ultimo vettore
    - Componenti cartesiane della somma = somma delle componenti
    - Gode delle proprietà **commutativa ed associativa**
    - NOTA: **le rotazioni finite NON sono vettori** (nonostante presentino direzione e verso)

- Differenza di vettori  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ :

- Somma di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  considerato in senso opposto

- Prodotto di uno scalare per un vettore

- $\mathbf{b} = m \mathbf{a}$
    - Dalla somma e dal prodotto con uno scalare:
      - $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$

Esistono due diversi tipi di prodotto tra due vettori:

- Prodotto scalare o prodotto interno
  - e' lo **scalare** definito da  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = a_b b = a b_a$
  - gode della proprietà commutativa
  - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
  - espressione cartesiana:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
- Prodotto vettoriale o prodotto esterno
  - e' il **vettore libero**  $\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  definito da:
  - **modulo**:  $p = ab \sin \phi$  (area parallelogramma definito da a e b)
  - **direzione** ortogonale al piano dei vettori dati
  - **verso** tale che a, b e p formino una terna destra
  - **non gode della proprietà commutativa**
  - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
  - espressione cartesiana ( determinante matrice a tre righe):
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

## ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati I)

- **Vettori applicati**

- *Quanto segue si riferisce a vettori applicati e non ha senso per vettori liberi, ma quanto esposto per i vettori liberi può essere esteso anche a quelli applicati.*
- *Come regola generale si può affermare che vettori ottenuti come risultato di operazioni su vettori applicati sono vettori liberi.*

- **Momento di un vettore rispetto ad un polo.**

- Dato il vettore  $(\mathbf{a}, P)$  ed un punto  $O$ , si dice momento polare di  $\mathbf{a}$  rispetto al polo  $O$  il vettore libero definito:

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{a}$$

- Se  $\mathbf{a}$  è non nullo,  $\mathbf{m}_O$  si annulla se e solo se la sua retta di applicazione passa per  $O$ .
- Se  $\mathbf{a}$  applicato in  $P$ , viene applicato in qualunque altro punto  $P'$  della retta di applicazione di  $\mathbf{a}$ , il suo momento polare non cambia:

$$\mathbf{OP} \times \mathbf{a} = (\mathbf{OP}' + \mathbf{P}'\mathbf{P}) \times \mathbf{a} = \mathbf{OP}' \times \mathbf{a}$$

*Agli effetti del calcolo del momento ogni vettore può essere spostato sulla propria retta d'azione*

- **Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta orientata.**

- Dati il vettore  $(\mathbf{a}, P)$  e la retta  $r$  orientata secondo il versore  $\mathbf{u}$ . Si dice momento assiale di  $\mathbf{a}$  rispetto alla retta orientata  $r$  ( $m_r$ ) la componente secondo  $r$  del momento polare  $\mathbf{m}_O$  di  $\mathbf{a}$  calcolato rispetto ad un polo  $O$  appartenente ad  $r$ :

$$m_r = \mathbf{m}_O \cdot \mathbf{u}$$

*Il momento assiale è lo stesso qualunque sia la posizione sulla retta  $r$  del punto  $O$  rispetto al quale si calcola  $\mathbf{m}_O$ .*

## ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati II)

- Risultante e momento risultante di un sistema di vettori applicati.

Assegnato un sistema S di N vettori applicati  $(\mathbf{a}_1, P_1), (\mathbf{a}_2, P_2) \dots (\mathbf{a}_N, P_N)$  ed un punto O.

- Si definisce risultante il vettore libero R:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{a}_k$$

- Si definisce momento risultante del sistema rispetto ad O il vettore libero  $\mathbf{M}_O$ :

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Nota:

- Il *momento risultante* di un sistema di vettori in genere **non** è dato dal *momento del risultante*: il risultante è infatti un vettore libero e risulta impossibile definirne il momento rispetto ad un qualunque polo.

- Se però tutti i vettori sono applicati nello stesso punto P:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP} \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_N) = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$$

(Teorema di Varignon)

- Variazione del momento risultante di un sistema di vettori applicati al variare del polo

Con riferimento al polo O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Con riferimento al polo O'

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{O'P}_N \times \mathbf{a}_N$$

$$\text{ma } \mathbf{OP}_k = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}_k$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO'} \times (\sum \mathbf{a}_k) + \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{O'P}_N \times \mathbf{a}_N$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO'} \times \mathbf{R}$$

- Il *momento risultante* di un sistema di vettori **rispetto al polo O** è uguale al *momento risultante* dello stesso sistema **rispetto al polo O'**, aumentato del *momento del risultante* del sistema applicato in O.
- Ne consegue che il momento risultante di un sistema di vettori è **indipendente dal polo** se e solo se **è nullo il risultante del sistema**.
- Un esempio di vettori applicati a risultante nullo è **la coppia di vettori**.

## ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati III)

- Operazioni elementari su un sistema di vettori applicati (non alterano  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}$ ).
  - a) Aggiunta od eliminazione di una coppia di braccio nullo
  - b) Sostituzione di più vettori applicati in un medesimo punto  $P$  col vettore somma applicato in  $P$ , oppure sostituzione di un vettore  $\mathbf{a}$  applicato in  $P$  con due o più vettori applicati in  $P$  ed aventi come risultante  $\mathbf{a}$ .
- Due sistemi di vettori  $S$  ed  $S'$  si dicono riducibili o equivalenti se e' possibile passare dal primo al secondo con le sole operazioni elementari a) e b), poiche' le due operazioni descritte non alterano ne' il risultante ne' il momento risultante
  - Esempio: applicazione di a) due volte equivale al trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione
- Sistemi equivalenti di vettori applicati  
Un sistema di vettori applicati e' caratterizzato da due vettori:
  - Risultante  $\mathbf{R}$
  - Momento risultante  $\mathbf{M}$(entrambi vettori liberi).  
La riduzione di un sistema di vettori ad uno equivalente che sia il piu' semplice possibile può essere sintetizzata come segue:
  - $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M} = 0$  il sistema e' riducibile a zero
  - $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M} \neq 0$  il sistema e' equivalente ad una coppia di momento  $\mathbf{M}$
  - $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{M}_A = 0$  o  $\mathbf{R} \times \mathbf{M} = 0$  il sistema è equivalente ad un solo vettore: il risultante applicato in  $A$  od in un punto generico della retta passane per  $A$  ed avente direzione  $\mathbf{R}$ .  
Rientrano in questo caso:
    - Vettori concorrenti in un punto  
Il sistema è riducibile a  $\mathbf{R}$  applicato in  $P$ .
    - Vettori complanari non paralleli  
E' riducibili con operazioni elementari ad a vettori concorrenti in un punto
    - Vettori paralleli  
Il sistema e' riducibile ad  $\mathbf{R}$  applicato in un punto particolare  $C$  detto centro.
  - $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{M} \neq 0$  il sistema non e' riducibile ne' ad un solo vettore ne' ad una coppia:

- Valgono i seguenti teoremi:
    - a) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a tre vettori applicati in tre punti non allineati
    - b) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a due vettori di cui uno applicato in un punto prefissato scelto ad arbitrio
    - c) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile al risultante applicato in un punto piu' una coppia
- Il terzo teorema e quello di piu' vasta applicazione nella dinamica e nella statica dei sistemi rigidi.

## ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati IV)

### Centro di un sistema di vettori paralleli

Un sistema  $S$  di vettori paralleli e' *equivalente* al risultante applicato in un punto particolare detto *centro  $C$  del sistema di vettori*.

Risultante:

$$\mathbf{R} = \sum a_k \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \text{versore}$$

Momento risultante del sistema rispetto ad un polo  $O$  generico:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \left( \sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}_O \perp \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$$

Esiste  $C$  tale che il momento rispetto al punto  $O$  di  $\mathbf{R}$  applicato in  $C$  e' uguale al momento risultante  $\mathbf{M}_O$  (dimostrazione nel corso di meccanica razionale).

$$\mathbf{OC} \times \mathbf{R} = \left( \sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

Da cui:

$$\mathbf{OC} \times \sum a_k \mathbf{u} = \left( \sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{OC} \times \sum a_k = \sum a_k OP_k \rightarrow \mathbf{OC} = \sum a_k OP_k / \sum a_k$$