

## CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE I

*Si occupa di dare una descrizione quantitativa degli aspetti geometrici e temporali del moto indipendentemente dalle cause che lo producono.*

- Il moto di un punto risulta completamente determinato quando se ne conoscono:
  - Traiettoria:
    - Curva che rappresenta il luogo dei punti descritti dal punto materiale:  $y = y(x)$
  - Legge oraria del moto  $P = P(t)$
- Il compito della cinematica consiste nel determinare le espressioni del **vettore velocità, vettore accelerazione, forma della traiettoria.**

### Descrizione cartesiana del moto

- Caso unidimensionale (lineare)
  - Moto di un punto su una retta
- **Vettore posizione  $x$** 
  - individua la posizione di un punto sulla traiettoria (retta)
- **Vettore spostamento  $\Delta x = x_f - x_i$** 
  - individua lo spostamento di un punto tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$ .
- **Vettore velocità**
  - **Velocità media**  $v_m = \Delta x / \Delta t$ 
    - Pendenza della curva  $x-t$
  - **Velocità istantanea**  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t = d/dt x$ 
    - Tangente della curva  $x-t$
- **Vettore accelerazione**
  - $\Delta v = v_1 - v_2$  variazione di velocità tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$
  - **Accelerazione media**  $a_m = \Delta v / \Delta t$
  - **Accelerazione istantanea**  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v / \Delta t = dv/dt = d^2x/dt^2$ 
    - Tangente della curva  $v_x-t$
    - Concavità della curva  $x-t$

## CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE II

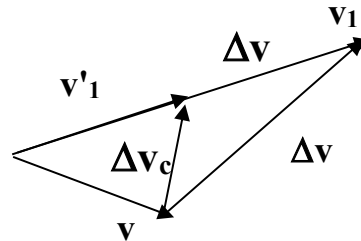
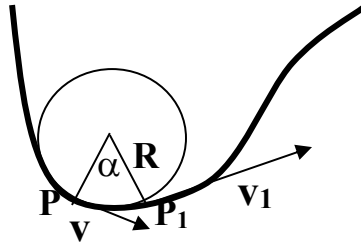
### *Moto in due e tre dimensioni.*

#### • *Descrizione vettoriale e cartesiana*

- **Vettore posizione  $\mathbf{r}$**  individua la posizione di un punto sulla traiettoria
- **Vettore spostamento  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$**  individua lo spostamento di un punto tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$ .
- **Vettore velocità media**  $\mathbf{v}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$
- **Vettore velocità istantanea**  $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{r} / \Delta t = d/dt \mathbf{r}$  (tangente alla traiettoria)
  - Tramite le coordinate cartesiane:
    - $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$
    - $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = (dx/dt) \mathbf{i} + (dy/dt) \mathbf{j} + (dz/dt) \mathbf{k}$
- **Vettore accelerazione**
- $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$  variazione di velocità tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$
- **Accelerazione media**  $\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$
- **Accelerazione istantanea**  $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ 
  - Tramite le coordinate cartesiane:
    - $\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$
    - $\mathbf{v} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$   
 $= (dv_x/dt) \mathbf{i} + (dv_y/dt) \mathbf{j} + (dv_z/dt) \mathbf{k}$   
 $= (d^2x/dt^2) \mathbf{i} + (d^2y/dt^2) \mathbf{j} + (d^2z/dt^2) \mathbf{k}$

## CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE III

- Significato geometrico dell'accelerazione*



$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}_\tau + \Delta \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v}_\tau / \Delta t + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v}_c / \Delta t = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_c$$

$$\mathbf{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} dv_s / dt = d^2s/dt^2 \boldsymbol{\tau}$$

$$\Delta s = \alpha R \rightarrow \Delta v_c = v \alpha = v \Delta s / R$$

$$\mathbf{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \mathbf{v}_c / \Delta t = v^2 / R \Delta \mathbf{v} / \Delta t = v^2 / R \mathbf{n}$$

*Il vettore accelerazione è dato dalla somma di due termini che individuano:*

- variazioni di velocità in modulo (acc. tangenziale)*
- variazioni di velocità in direzione (acc. centripeta).*

## CINEMATICA ROTAZIONALE

Analoga alla cinematica lineare:

definisce le grandezze che utilizzeremo per descrivere il moto.

- **Definizione parametri** (analoghi a  $s$ ,  $v$ ,  $a$  del moto rettilineo)
  - Posizione angolare:  $\theta = s/r$
  - Velocità angolare:  $\omega = d\theta/dt$
  - Accelerazione angolare:  $\alpha = d\omega/dt$
- $\theta$  (*spostamenti angolari finiti*) **non sono vettori** perché non godono della proprietà commutativa dell'addizione
- $\omega, \alpha$  invece **sono grandezze vettoriali**: è quindi necessario definirne **direzione e verso**. (Caso del corpo rigido  $\rightarrow$  regola mano destra)
- **Relazione tra grandezze angolari e lineari** ( $r$  = distanza dall'asse di rotazione)
  - $v = ds/dt = r d\theta/dt = r \omega$ 
    - notazione vettoriale:  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$
  - $a_t = dv/dt = r d\omega/dt = r \alpha$ . (accelerazione tangenziale)
  - $a_r = v^2/r = r\omega^2$  (accelerazione centripeta)
- **Moto angolare uniformemente accelerato**:
  - $\omega = \omega_0 + \alpha t$  ( $\alpha$  costante)
  - $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + 1/2 \alpha t^2$

## MOTO ARMONICO SEMPLICE

*Moto del punto P proiezione su un qualunque diametro di un punto P che si muove di moto circolare uniforme.*

- $x(t) = R \cos(\omega t + \delta)$ 
  - $\delta$  fase iniziale (fase dell'oscillazione per  $t=0$ ) (radianti)
  - $R$  ampiezza (il punto si muove tra  $x = R$  e  $x = -R$ ) (metri)
  - $\omega = 2\pi/T$  pulsazione (radianti/sec)
  - $T = 2\pi/\omega$  periodo (intervallo più breve per il quale il moto si ripete) (secondi)
  - $\nu = 1/T$  frequenza (numero di cicli nell'unità di tempo) (cicli/sec (Hertz))
- $v_x = dx/dt = -\omega R \sin(\omega t + \delta)$
- $a_x = d^2x/dt^2 = dv_x/dt = -\omega^2 R \cos(\omega t + \delta)$
- equazione del moto armonico:

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

## CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

Un corpo (sistema di punti materiali) si dice **rigido o indeformabile** quando si mantiene inalterata nel tempo la distanza tra una coppia di punti comunque scelti.

I tipi di moto di corpo rigido sono:

- **Moto traslatorio**

*Il segmento orientato relativo ad un qualunque coppia di particelle si mantiene costante in modulo ed orientamento*

- Le particelle descrivono traiettorie uguali ottenibili l'una dall'altra per traslazione
- Ad ogni istante tutti i punti del sistema possiedono la stessa velocità e la stessa accelerazione

- **Moto rotatorio**

*Il moto di un corpo rigido si dice rotatorio attorno ad un asse se le posizioni di due dei suoi punti si mantengono inalterate nel tempo*

- Ogni particella del sistema descrive una circonferenza il cui centro giace sull'asse di rotazione

- **Moto rototraslatorio**

*Scelto in modo arbitrario un punto A il moto più generale del sistema consiste in una traslazione con velocità  $v_A$  ed in una successione di rotazioni elementari con velocità  $\omega$  attorno agli assi di istantanea rotazione passanti per A.*

- La velocità di un generico punto P è uguale alla somma della velocità di traslazione del punto A e della velocità lineare che compete a P nel moto relativo di rotazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$



## CENNI DI CINEMATICA RELATIVA

*Si propone di studiare le grandezze cinematiche del moto di un corpo puntiforme da sistemi di riferimento diversi.*

**Caso 1:** il riferimento  $O'$  si muove di moto traslatorio rettilineo rispetto al riferimento fisso.

- Legge degli spostamenti:

$$r(O) = v_0 t + r(O')$$

- Legge delle velocità

$$v_a = v_0 + v_r$$

|               |                                                                        |
|---------------|------------------------------------------------------------------------|
| $v_a = v(O)$  | velocità assoluta (rispetto riferimento fisso)                         |
| $v_r = v(O')$ | velocità relativa (rispetto riferimento mobile)                        |
| $v_0 =$       | velocità di trascinamento (riferimento mobile rispetto a quello fisso) |

- Legge delle accelerazioni

$$a_a = a_0 + a_r$$

|               |                                                             |
|---------------|-------------------------------------------------------------|
| $a_a = a(O)$  | acc. assoluta (rispetto riferimento fisso)                  |
| $a_0 =$       | acc. di trascinamento (rif. mobile rispetto a quello fisso) |
| $a_r = a(O')$ | accelerazione relativa (rispetto riferimento mobile)        |

**Caso particolare importante:** se due sistemi di riferimento si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro si ha  $a_0 = 0 \rightarrow a_a = a_r$  (sistemi di riferimento inerziali o galileiani).

**Caso 2:** il riferimento mobile si muove di moto generico rispetto al sistema di riferimento fisso

- Legge delle accelerazioni

$$a_a = a_0 + a_r + a_{cc}$$

|          |                                           |
|----------|-------------------------------------------|
| $a_{cc}$ | accelerazione complementare o di Coriolis |
|----------|-------------------------------------------|

$$a_{cc} = 2 v \times \omega_0$$