DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI – I

Il problema della dinamica dei sistemi di punti

Il problema principale della dinamica dei sistemi consiste nel determinare il moto di ogni singolo elemento note che siano le forze agenti su di esso.
La soluzione completa del problema dinamico è di difficile attuazione per cui ci si limita a studiare alcune proprietà generali del moto per poi applicarle a sistemi di punti particolari quali ad esempio i corpi rigidi.

Individuato il sistema, risulta conveniente dividere le forze agenti sul generico elemento del sistema in base alla loro origine e cioè in forze interne ed esterne.

Singola particella: notazione

Nello studio della dinamica del punto abbiamo introdotto alcune grandezze caratteristiche del moto di una singola particella:

m_k	massa del k-esimo punto materiale
$\vec{r}_k$	vettore posizione rispetto all'origine O degli assi coordinati
$\vec{v}_k$	vettore velocità
$\vec{a}_k$	vettore accelerazione
$\vec{p}_k$	vettore quantità di moto
$\vec{f}_k^{(i)}$	risultante delle forze interne agenti sul k-esimo punto materiale
$\vec{f}_k^{(e)}$	risultante delle forze esterne agenti sul k-esimo punto materiale

In generale l'equazione del moto per la k-esima particella si scrive:

$$m\vec{a}_k = \vec{f}_k^{(e)} + \vec{f}_k^{(i)}$$

Sistemi di particelle (o di punti materiali)

Se il sistema è composto da N particelle, avremo N equazioni vettoriali che daranno luogo a 3N equazioni scalari. La soluzione di questo problema è difficile, tuttavia dal punto di vista applicativo spesso è sufficiente conoscere l'evoluzione di alcune grandezze collettive senza dover studiare il moto di ogni singola particella. L'evoluzione di queste proprietà dinamiche globali può essere affrontato ricorrendo ad alcuni teoremi fondamentali che verranno introdotti nel corso.

Le grandezze globali si ottengono generalizzando ed estendendo le definizioni introdotte nello studio della dinamica del punto.

Notazione

Massa totale: $M = \sum m_k$

Quantità di moto risultante $\vec{P} = \sum \vec{p}_k$

Risultante delle forze esterne $\vec{R}^{(e)} = \sum \vec{f}_k^{(e)}$

Momento angolare risultante rispetto al polo O $\vec{L}_O = \sum \vec{l}_{Ok} = \sum \vec{r}_k \times \vec{p}_k$

Momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O $\vec{M}_O^{(e)} = \sum \vec{m}_{Ok} = \sum \vec{r}_k \times \vec{f}_k$

Energia cinetica totale $K = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2$

Lavoro delle forze interne: $W^{(i)} = \sum \int \vec{f}_k^{(i)} \cdot d\vec{r}_k$

Lavoro delle forze esterne: $W^{(e)} = \sum \int \vec{f}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k$

Nota:

Nelle definizioni per i sistemi non compaiono né $\mathbf{R}^{(i)}$, risultante delle forze interne, né $\mathbf{M}_O^{(i)}$, momento risultante delle forze interne rispetto al polo O. Queste quantità sono infatti nulle come conseguenza del terzo principio della termodinamica. Al tempo stesso è presente $W^{(i)}$, ovverosia il lavoro delle forze interne, che come vedremo contribuisce alla dinamica del sistema

LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI

I. Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Variazione quantità di moto della k-esima particella nel tempo:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{f}_k^{(e)} + \vec{f}_k^{(i)}$$

Variazione della quantità di moto dell'intero sistema:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum (\vec{f}_k^{(e)} + \vec{f}_k^{(i)})$$

Ed essendo $\sum \vec{f}_k^{(i)} = 0$ segue:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}^e$$

Che costituisce la prima Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi:
La derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale di un sistema meccanico è uguale al risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

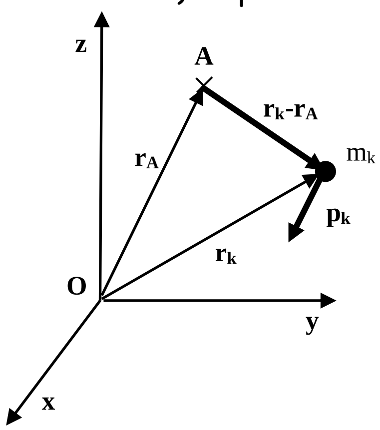
- Principio di Conservazione della Quantità di Moto Totale

Se $\vec{R}^e = 0$ segue $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

Che va sotto il nome di Principio di Conservazione della Quantità di Moto Totale:
Se il risultante delle forze esterne agenti è uguale a zero, oppure se il sistema è isolato, la quantità di moto totale rimane costante.

II. Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Dato un sistema di punti materiali calcoliamo il momento angolare risultante (o momento risultante della quantità di moto) rispetto ad un punto A generico



Per la singola particella vale:

$$\vec{l}_k = (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{p}_k$$

Il momento angolare risultante rispetto al polo A vale:

$\vec{L}_A = \sum \vec{l}_k = \sum (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{p}_k$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\sum \vec{l}_k}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{p}_k + \sum (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \frac{d}{dt}\vec{p}_k$$

Essendo:

$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k$, $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$, $\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{f}_k$ e tenendo conto che v_k e p_k sono paralleli, si ottiene:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \times \vec{P} + \vec{M}_A$$

Dove $\vec{M}_A = \sum (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{f}_k$ è il momento totale delle forze agenti rispetto ad A (interne ed esterne): $\vec{M}_A = \vec{M}_A^{(i)} + \vec{M}_A^{(e)}$. Essendo poi, $\vec{M}_A^{(i)} = 0$, otteniamo infine:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)} - \vec{v}_A \times \vec{P}$$

Che costituisce la seconda Equazione Cardinale della dinamica dei sistemi:

Ad ogni istante la derivata rispetto al tempo del momento angolare risultante (o momento risultante della quantità di moto) di un sistema calcolato rispetto ad un punto A è uguale al momento risultante delle sole forze esterne, calcolato rispetto allo stesso punto, diminuito del prodotto $\vec{v}_A \times \vec{P}$.

Nelle applicazioni più importanti, che analizzeremo nel seguito del corso, si verifica $\vec{v}_A \times \vec{P} = 0$ ed in questo caso l'equazione assume la forma semplificata:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)}$$

- Teorema di conservazione del Momento angolare risultante

Se $\vec{M}_A^{(e)} = 0$ segue $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = 0$ e quindi $\vec{L}_A = \cos t$

Che rappresenta il teorema di conservazione del Momento angolare risultante (o del momento risultante della quantità di moto):

Se per il punto A vale la relazione $\vec{v}_A \times \vec{P} = 0$ ed il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nullo rispetto al punto A, il vettore momento angolare risultante (o momento risultante della quantità di moto) calcolato rispetto allo stesso punto rimane costante

Se poi in particolare il sistema è isolato si ha anche $\vec{R}^e = 0$ da cui segue l'annullamento delle forze esterne rispetto a qualunque polo cosicché **L** rimane costante rispetto a qualunque polo scelto.

III Teorema dell'energia cinetica per un sistema di punti materiali

L'energia cinetica di un sistema è definita: $K = \frac{1}{2}\sum m_k v_k^2$.

La sua rapidità di variazione si ottiene calcolando la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{dK}{dt} = \sum m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k = \sum \vec{f}_k \cdot \vec{v}_k$$

mentre la variazione elementare risulta:

$$dK = \sum \vec{f}_k \cdot \vec{v}_k \, dt = \sum \vec{f}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum \delta W_k = \delta W$$

Sommando tutti i contributi di questo tipo su uno spostamento finito si ottiene:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = W$$

Che esprime il Teorema dell'Energia Cinetica per un sistema meccanico:
La variazione di energia cinetica di un sistema meccanico in un qualsiasi spostamento è uguale al lavoro compiuto nello spostamento da *tutte* le forze agenti.

Si noti che alla variazione di energia cinetica contribuiscono tutte le forze e non solo quelle esterne, come accade per le variazioni di quantità di moto e del momento della quantità di moto.

IV Principio di conservazione dell'energia meccanica per un sistema di punti materiali

Se tutte le forze agenti sul sistema sono conservative, l'energia meccanica totale del sistema si conserva mantiene costante nel tempo.