

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

- Vettori liberi e vettori applicati

- Vettore libero:

- individuato da una **direzione orientata** ed una **lunghezza**
 - non ha un'ubicazione fissa nello spazio:
 - può essere traslato sia lungo la sua retta d'azione che parallelamente

*Due **vettori liberi** sono uguali se hanno ugual **modulo, direzione e verso**.*

- Vettore applicato:

- Va specificato anche il **punto** dello spazio nel quale va applicato

*Due **vettori applicati** sono uguali se hanno ugual **modulo, direzione, verso e punto di applicazione***

- Operazioni sui vettori liberi

- Componente di un vettore a secondo una direzione orientata u:

$$a_u = a \cos \phi$$

- Rappresentazione cartesiana dei vettori:

- Terna levogira, sinistrorsa o destra
 - $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a \cos \beta$, $a_z = a \cos \gamma$ da cui: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$
 - $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

- Somma di vettori $\mathbf{a} + \mathbf{b}$:

- Costruzione della poligonale dei vettori
 - Il risultante si ottiene unendo l'origine del primo vettore con l'estremo dell'ultimo vettore
 - Componenti cartesiane della somma = somma delle componenti
 - Gode delle proprietà **commutativa ed associativa**
 - NOTA: **le rotazioni finite NON sono vettori** (nonostante presentino direzione e verso)

- Differenza di vettori $\mathbf{a} - \mathbf{b}$:

- Somma di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ considerato in senso opposto

- Prodotto di uno scalare per un vettore

- $\mathbf{b} = m \mathbf{a}$
 - Dalla somma e dal prodotto con uno scalare:
 - $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$

Esistono due diversi tipi di prodotto tra due vettori:

- Prodotto scalare o prodotto interno
 - e' lo **scalare** definito da $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = a_b b = a b_a$
 - gode della proprietà commutativa
 - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
 - espressione cartesiana:
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
- Prodotto vettoriale o prodotto esterno
 - e' il **vettore libero** $\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ definito da:
 - **modulo**: $p = ab \sin \phi$ (area parallelogramma definito da a e b)
 - **direzione** ortogonale al piano dei vettori dati
 - **verso** tale che a, b e p formino una terna destra
 - **non gode della proprietà commutativa**
 - gode della proprietà distributiva rispetto alla somma
 - espressione cartesiana (determinante matrice a tre righe):
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati I)

- **Vettori applicati**

- *Quanto segue si riferisce a vettori applicati e non ha senso per vettori liberi, ma quanto esposto per i vettori liberi può essere esteso anche a quelli applicati.*
- *Come regola generale si può affermare che vettori ottenuti come risultato di operazioni su vettori applicati sono vettori liberi.*

- **Momento di un vettore rispetto ad un polo.**

- Dato il vettore $(\mathbf{a}, P)$ ed un punto O , si dice momento polare di $\mathbf{a}$ rispetto al polo O il vettore libero definito:

$$\mathbf{m}_O = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{a}$$

- Se $\mathbf{a}$ e' non nullo, $\mathbf{m}_O$ si annulla se e solo se la sua retta di applicazione passa per O .
- Se $\mathbf{a}$ applicato in P , viene applicato in qualunque altro punto P' della retta di applicazione di $\mathbf{a}$, il suo momento polare non cambia:

$$\overrightarrow{OP} \times \mathbf{a} = (\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}) \times \mathbf{a} = \overrightarrow{OP'} \times \mathbf{a}$$

Agli effetti del calcolo del momento ogni vettore puo' essere spostato sulla propria retta d'azione

- **Momento di un vettore applicato rispetto ad una retta orientata.**

- Dati il vettore $(\mathbf{a}, P)$ e la retta r orientata secondo il versore $\mathbf{u}$. Si dice momento assiale di $\mathbf{a}$ rispetto alla retta orientata r (m_r) la componente secondo r del momento polare $\mathbf{m}_O$ di $\mathbf{a}$ calcolato rispetto ad un polo O appartenente ad r :

$$m_r = \mathbf{m}_O \cdot \mathbf{u}$$

Il momento assiale e lo stesso qualunque sia la posizione sulla retta r del punto O rispetto al quale si calcola $\mathbf{m}_O$.

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati II)

- Risultante e momento risultante di un sistema di vettori applicati.

Assegnato un sistema S di N vettori applicati $(\mathbf{a}_1, P_1), (\mathbf{a}_2, P_2) \dots (\mathbf{a}_N, P_N)$ ed un punto O.

- Si definisce risultante il vettore libero R:
$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{a}_k$$
- Si definisce momento risultante del sistema rispetto ad O il vettore libero $\mathbf{M}_O$:
$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Nota:

- Il *momento risultante* di un sistema di vettori in genere **non** è dato dal *momento del risultante*: il risultante è infatti un vettore libero e risulta impossibile definirne il momento rispetto ad un qualunque polo.
- Se però tutti i vettori sono applicati nello stesso punto P:
$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \mathbf{OP} \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_N) = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$$

(Teorema di Varignon)

- Variazione del momento risultante di un sistema di vettori applicati al variare del polo

Con riferimento al polo O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{OP}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{OP}_N \times \mathbf{a}_N$$

Con riferimento al polo O'

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{O'P}_N \times \mathbf{a}_N$$

$$\text{ma } \mathbf{OP}_k = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}_k$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO'} \times (\sum \mathbf{a}_k) + \mathbf{O'P}_1 \times \mathbf{a}_1 + \mathbf{O'P}_2 \times \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{O'P}_N \times \mathbf{a}_N$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO'} \times \mathbf{R}$$

- Il *momento risultante* di un sistema di vettori **rispetto al polo O** è uguale al *momento risultante* dello stesso sistema **rispetto al polo O'**, aumentato del *momento del risultante* del sistema applicato in O.
- Ne consegue che il momento risultante di un sistema di vettori è **indipendente dal polo** se e solo se **è nullo il risultante del sistema**.
- Un esempio di vettori applicati a risultante nullo è **la coppia di vettori**.

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati III)

- Operazioni elementari su un sistema di vettori applicati (non alterano $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}$).

- a) Aggiunta od eliminazione di una coppia di braccio nullo
 - b) Sostituzione di più vettori applicati in un medesimo punto P col vettore somma applicato in P , oppure sostituzione di un vettore $\mathbf{a}$ applicato in P con due o più vettori applicati in P ed aventi come risultante $\mathbf{a}$.
- Due sistemi di vettori S ed S' si dicono riducibili o equivalenti se e' possibile passare dal primo al secondo con le sole operazioni elementari a) e b), poiche' le due operazioni descritte non alterano ne' il risultante ne' il momento risultante
 - Esempio: applicazione di a) due volte equivale al trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione

- Sistemi equivalenti di vettori applicati

Un sistema di vettori applicati e' caratterizzato da due vettori:

- Risultante $\mathbf{R}$
- Momento risultante $\mathbf{M}$

(entrambi vettori liberi).

La riduzione di un sistema di vettori ad uno equivalente che sia il piu' semplice possibile può essere sintetizzata come segue:

- $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M} = 0$ il sistema e' riducibile a zero
- $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M} \neq 0$ il sistema e' equivalente ad una coppia di momento $\mathbf{M}$
- $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{M}_A = 0$ o $\mathbf{R} \times \mathbf{M} = 0$ il sistema è equivalente ad un solo vettore: il risultante applicato in A od in un punto generico della retta passane per A ed avente direzione $\mathbf{R}$.
Rientrano in questo caso:
 - Vettori concorrenti in un punto
Il sistema è riducibile a $\mathbf{R}$ applicato in P .
 - Vettori complanari non paralleli
E' riducibili con operazioni elementari ad a vettori concorrenti in un punto
 - Vettori paralleli
Il sistema e' riducibile ad $\mathbf{R}$ applicato in un punto particolare C detto centro.
- $\mathbf{R} \neq 0, \mathbf{M} \neq 0$ il sistema non e' riducibile ne' ad un solo vettore ne' ad una coppia:

- Valgono i seguenti teoremi:
 - a) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a tre vettori applicati in tre punti non allineati
 - b) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile a due vettori di cui uno applicato in un punto prefissato scelto ad arbitrio
 - c) Un sistema qualunque di vettori applicati e' sempre riducibile al risultante applicato in un punto piu' una coppia
- Il terzo teorema e quello di piu' vasta applicazione nella dinamica e nella statica dei sistemi rigidi.

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE (vettori applicati IV)

Centro di un sistema di vettori paralleli

Un sistema S di vettori paralleli e' *equivalente* al risultante applicato in un punto particolare detto *centro C del sistema di vettori*.

Risultante:

$$\mathbf{R} = \sum a_k \mathbf{u} \quad \mathbf{u} = \text{versore}$$

Momento risultante del sistema rispetto ad un polo O generico:

$$\mathbf{M}_O = \sum \mathbf{m}_k = \left(\sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}_O \perp \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$$

Esiste C tale che il momento rispetto al punto O di $\mathbf{R}$ applicato in C e' uguale al momento risultante $\mathbf{M}_O$ (dimostrazione nel corso di meccanica razionale).

$$OC \times \mathbf{R} = \left(\sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

Da cui:

$$OC \times \sum a_k \mathbf{u} = \left(\sum a_k OP_k \right) \times \mathbf{u}$$

$$OC \times \sum a_k = \sum a_k OP_k \rightarrow OC = \sum a_k OP_k / \sum a_k$$