

## DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI - II

### Centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali risulta utile introdurre il concetto di centro di massa:

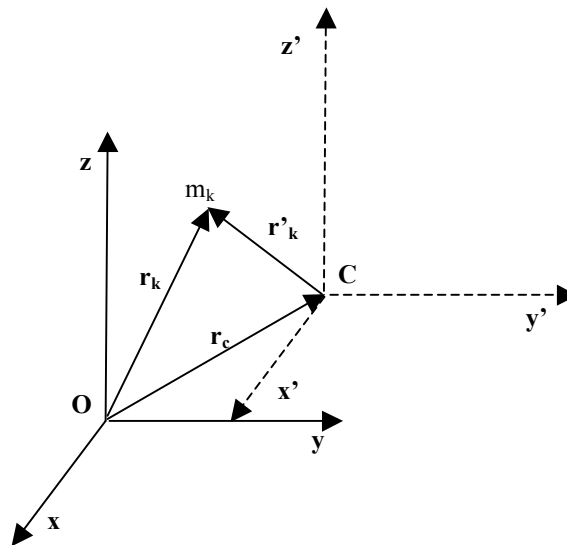
$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$

### Riferimento del centro di massa:

Onde mettere in evidenza le proprietà dinamiche del centro di massa risulta utile introdurre, oltre al riferimento *inerziale* del laboratorio un sistema di riferimento in moto traslatorio rispetto al precedente e con origine nel punto C. Questo riferimento è dotato di moto traslatorio con la stessa velocità del centro di massa (ed in genere non è un riferimento inerziale).

I vettori posizione e velocità della k-esima particella nel laboratorio e nel centro di massa sono legate dalle relazioni:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{r}'_k, \quad \vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}'_k$$



## **CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO**

Esistono tre metodi per calcolare il centro di massa di un corpo rigido:

### **Metodo della simmetria**

- Se il corpo omogeneo ha un piano di simmetria, il centro di massa giace su quel piano
- Se il corpo ha un asse di simmetria il centro di massa si trova su quell'asse.
- Se il corpo possiede un punto di simmetria il centro di massa coincide con quel punto.

### **Metodo della suddivisione**

Se un corpo può essere suddiviso in più parti, per ciascuna delle quali sia nota la posizione del centro di massa, e la massa, allora il centro di massa di tutto l'insieme si calcola come per un sistema di punti materiali, collocati nei vari centri di massa

### **Metodo della supplementazione**

Quando un corpo omogeneo ha delle cavità, o dei fori si trova la posizione del centro di massa di tutto il corpo considerato senza fori o cavità e la posizione del centro di massa del foro, che può essere considerato un corpo omogeneo con massa negativa! Poi si procede con il metodo della suddivisione.

## PROPRIETA' DINAMICHE DEL CENTRO DI MASSA

### 1. ESPRESSIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE

(I proprietà dinamica del centro di massa)

Da  $\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$  si ottiene:  $M \vec{r}_C = \sum m_k \vec{r}_k$  che derivata rispetto al tempo dà:

$M \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum m_k \vec{v}_k = \sum \vec{p}_k = \vec{P}$ . Ed essendo:  $\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C$  risulta:

$$\vec{P} = M \vec{v}_C$$

Cioè:

La quantità di moto totale di un sistema di punti materiali è uguale alla massa totale del sistema per la velocità del centro di massa.

In altre parole:

La quantità di moto risultante di un sistema di massa complessiva  $M$  è la stessa di un punto materiale di massa  $M$  in moto con la velocità del centro di massa.

Nel riferimento del centro di massa si ha:  $\vec{P}' = \sum m_k \vec{v}'_k = \sum m_k \vec{v}_k - M \vec{v}_C = 0$

In accordo con il fatto che rispetto al riferimento del centro di massa il punto  $C$  è in quiete.

### 2. TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

(II proprietà dinamica del centro di massa)

Derivando rispetto al tempo l'equazione  $\vec{P} = M \vec{v}_C$ , otteniamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_C$$

La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un sistema è uguale al prodotto della massa complessiva per l'accelerazione del centro di massa.

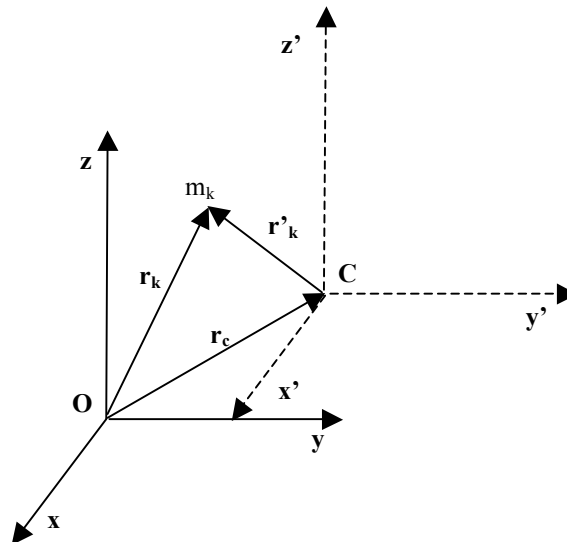
Possiamo ora scrivere la **prima equazione cardinale** in funzione delle grandezze dinamiche del centro di massa:

$$M \vec{a}_C = \vec{R}^{(e)}$$

Il moto del centro di massa è equivalente a quello di un punto materiale di massa uguale alla massa complessiva del sistema sottoposto ad una forza uguale alla risultante delle forze esterne applicate.

### 3. MOMENTO ANGOLARE RISULTANTE (III proprietà dinamica del centro di massa)

Vogliamo ricavare la relazione che intercorre tra il momento angolare calcolato nel laboratorio e quello calcolato nel riferimento del centro di massa assumendo  $C$  come polo.



Sia  $L'_C$  il momento angolare risultante rispetto al centro di massa calcolato nel S.R. del centro di massa e  $L_C$  il momento rispetto al centro di massa calcolato nel S.R. del laboratorio, si ottiene:

$$\vec{L}'_C = \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}'_k = \sum \vec{r}'_k \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_C) = \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_k - \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_C = \vec{L}_C - 0 = \vec{L}_C$$

$$\text{essendo } \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_C = \sum m_k \vec{r}'_k \times \vec{v}_C \text{ e } \sum m_k \vec{r}'_k = M \vec{r}_C = 0$$

Cioè:

**Assumendo  $C$  come polo, il momento angolare risultante (o momento risultante della quantità di moto) nel laboratorio è uguale al momento risultante delle quantità di moto relative al centro di massa.**

Inoltre siccome nel sistema del centro di massa  $\vec{P}' = 0$ , il vettore  $\vec{L}'_C$  **è indipendente dal polo** ed è lecito parlare di **Momento Angolare intrinseco** senza dover specificare il polo.

Il momento angolare rispetto all'origine si può scrivere come:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{P}$$

ed essendo  $\vec{L}_C = \vec{L}'_C$ , si può scrivere nella forma:

$$\vec{L}_O = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times \vec{P}$$

Il momento della quantità di moto, calcolato nell'origine  $O$  del laboratorio è uguale, alla somma del momento di quantità di moto calcolato nel sistema del centro di massa e del momento rispetto ad  $O$  della quantità di moto  $P$  applicata in  $C$ .

#### 4. SECONDA EQUAZIONE CARDINALE RIFERITA AL CENTRO DI MASSA (IV proprietà dinamica del centro di massa)

Tenendo presente che  $\vec{P} = M \vec{v}_C$  la seconda equazione cardinale può essere scritta:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)} - \vec{v}_A \times M \vec{v}_C$$

Dove  $A$  è un punto generico non necessariamente in quiete nel sistema del laboratorio.

Vediamo ora in quali condizioni il termine  $\vec{v}_A \times M \vec{v}_C$  si annulla ed è possibile scrivere l'equazione nella forma semplificata:  $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{(e)}$ . Ciò è possibile in una delle situazioni seguenti:

- $\vec{v}_A = 0$  (il punto  $A$  è fisso)
- $\vec{v}_C = 0$  (il centro di massa è in quiete nel laboratorio)
- $A=C$  (si assume come polo il centro di massa)

Se appunto  $A=C$ , la seconda equazione cardinale diventa:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}$$

ed essendo  $\vec{L}_C = \vec{L}'_C$ , l'equazione si può scrivere:

$$\frac{d\vec{L}'_C}{dt} = \vec{M}_C^{(e)}$$

(Formula utile nella soluzione dei problemi.)

Esso esprime il teorema del momento angolare risultante rispetto al centro di massa:  
Se si assume  $C$  come polo, la derivata rispetto al tempo del momento risultante della quantità di moto misurate nel laboratorio o nel sistema del centro di massa, è uguale al momento risultante rispetto a  $C$  delle forze esterne applicate.

## 5. ENERGIA CINETICA NEL LABORATORIO E NEL CENTRO DI MASSA (V proprietà dinamica del centro di massa)

Ci si propone di mettere in relazione l'energia cinetica  $K$  riferita al sistema del laboratorio con quella riferita al centro di massa  $K'$ .

Ricordando:  $\vec{v}_k = \vec{v}_C + \vec{v}'_k$  che elevata al quadrato dà:  $v_k^2 = v_C^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}'_k + v'^2_k$  dalla definizione segue:

$$K = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \vec{v}_C \cdot \sum m_k \vec{v}'_k + \frac{1}{2} \sum m_k v'^2_k$$

Ed essendo  $\sum m_k \vec{v}'_k = \vec{P}' = 0$  e  $K' = \frac{1}{2} \sum m_k v'^2_k$  si può scrivere:

$$K = \frac{1}{2} M v_C^2 + K'$$

che va sotto il nome di teorema di König:

L'energia cinetica di un sistema materiale in moto rispetto al sistema del laboratorio è uguale alla somma dell'energia cinetica del centro di massa, nel quale si supponga concentrata l'intera massa, calcolata rispetto al laboratorio, aumentata dell'energia cinetica del sistema rispetto al centro di massa.