Presentazione dei calcoli e delle misure

- **La fisica studia i fenomeni naturali, con osservazioni sceintifiche, misure di grandezze e verifiche di leggi.**

  La misura fornisce un numero ed una unità di misura.

- **Le leggi fisiche sono descritte attraverso relazioni tra le grandezze, risultato di misure dirette o indirette, pertanto spesso frutto di calcolo tra numeri e unità di misura.**

  Questione dell'unità di misura: analisi dimensionale.

- **Un numero è costituito da varie cifre, è opportuno chiarire il significato del numero di cifre che compaiono in un numero**

Precisione nei calcoli

- **Qual è la differenza tra i seguenti modi di presentare un risultato:**

  $1\,203\,000 \qquad 1.203 \cdot 10^6 \qquad 1.203000 \cdot 10^6$

Quante cifre significative hanno i suddetti numeri?

4 4 7

Nel primo numero gli zeri sono necessari, e quindi non sappiamo se sono significativi oppure no.

Nel terzo numero gli zeri non necessari sono riportati per esprimere la precisione con 7 cifre significative.

Quando si vuole segnalare che le cifre significative sono sette, si deve scrivere $1.203000 \cdot 10^6$

Presentazione dei dati e cifre significative

Cifra significativa = una cifra che non sia uno zero iniziale o finale (contano se seguono il punto decimale)

300 ? ◆ **Non possiamo dire se gli zeri sono significativi.**

$3.00 \cdot 10^2$ ◆ **3 cifre significative.**

$3 \cdot 10^2$ ◆ **1 cifre significative.**

1ª cifra a sinistra più significativa ← 10.456782 → **1ª cifra a destra meno significativa**

Moltiplicazione o divisione $0.67 \cdot 16.789 = 10.91285 \approx 11$

Si arrotonda tutto con il numero di cifre del meno preciso.

Somma o sottrazione $10.6 + 0.000032 = 10.600032 \approx 10,6$

Cifra decimale più a sin. $8.5675\ \text{kg} - 8.556\ \text{kg} = 0.0115\ \text{kg} = 0.012\ \text{kg}$

$8.4\ \text{m} + 3.2\ \text{m} + 6.2\ \text{m} - 1.1\text{m} = 16.7$ Una cifra sign. in più.

Rappresentazione ... in Tabella

Rappresentazione di dati in Tabelle

È molto utile per riportare le misure, per il loro utilizzo nei calcoli o per confronti, ma non è evidente *la* relazione tra le grandezze.

Si deve segnalare nella didascalia, che nella prima colonna si riporta il calore fornito ad 1 kg di acqua e nella seconda invece la temperatura misurtata.

Q [kcal]	*T* [°C]
0	-20
1	-18
5	-10
10	0
90	0
110	20
150	60
170	80
190	100
390	100
590	100
730	100
735	110
739,5	120

Esercizio 3.2

Es. 2 : Quanta energia serve per trasformare un Kg di ghiaccio di H_2O (- 20 °C) in vapore acqueo a 120 °C?
Se potessimo usare tutta l'energia di un cocacola che per 330 ml fornisce 42.0 kcal o 176 kJ, quanta cocacola servirebbe?.

Q [kcal]	T [°C]
0,0	-20
0,0	-20
0,0	-20
10,0	0,0
10,0	0,0
110	100
150	140
170	160
190	180
390	100
590	100
730	100
735	110
739,5	120

c_{gh}= 0.500 kcal/(kg °C)

$\{Q=mc_{gh}\,\Delta T$

L_{fus}=80 kcal/kg

$\{Q=mL_{fus}$

$\{Q=mc_{acq}\,\Delta T$

c_{acq}= 1.0 kcal/(kg °C)

$\{Q=mL_{ev}$

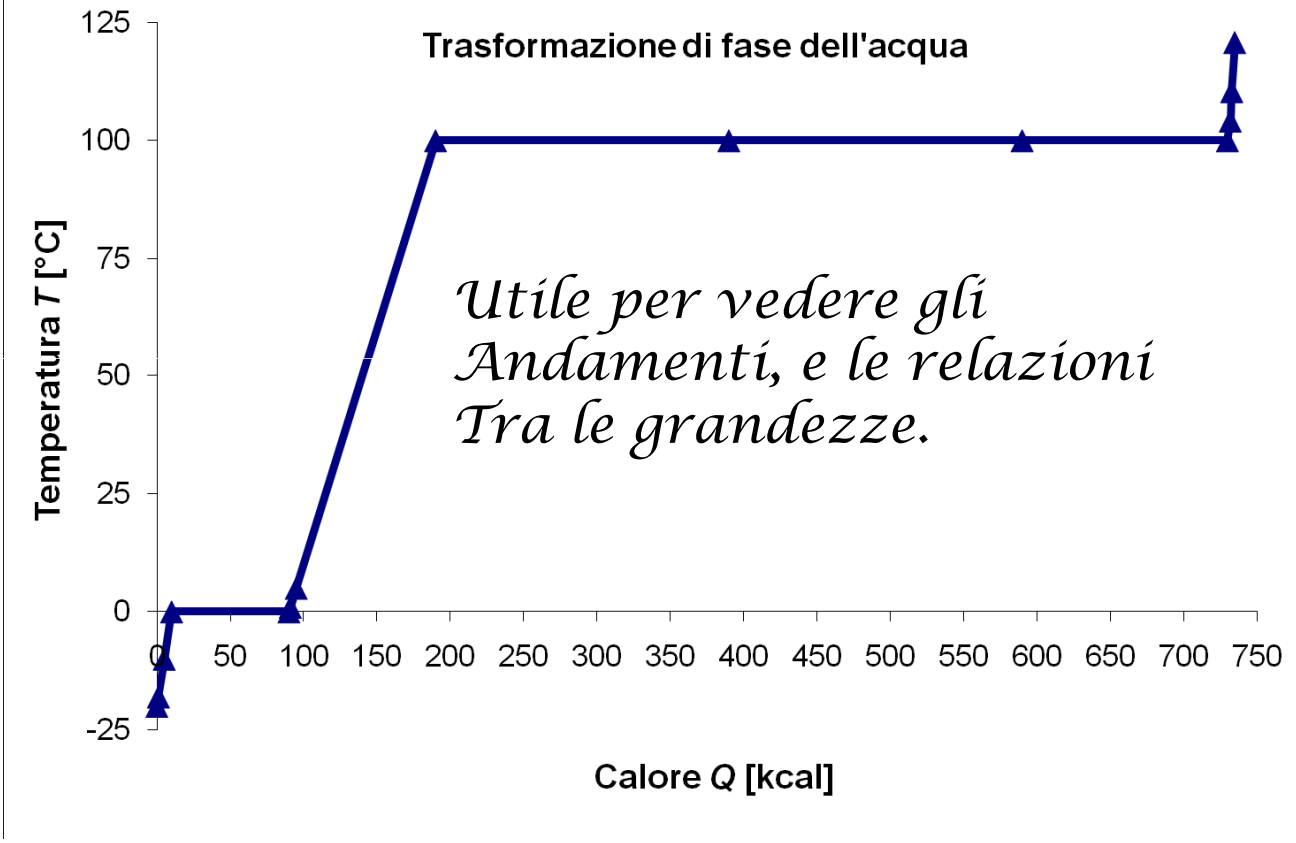
L_{ev}=540 kcal/kg

$\{Q=mc_{vap}\,\Delta T$

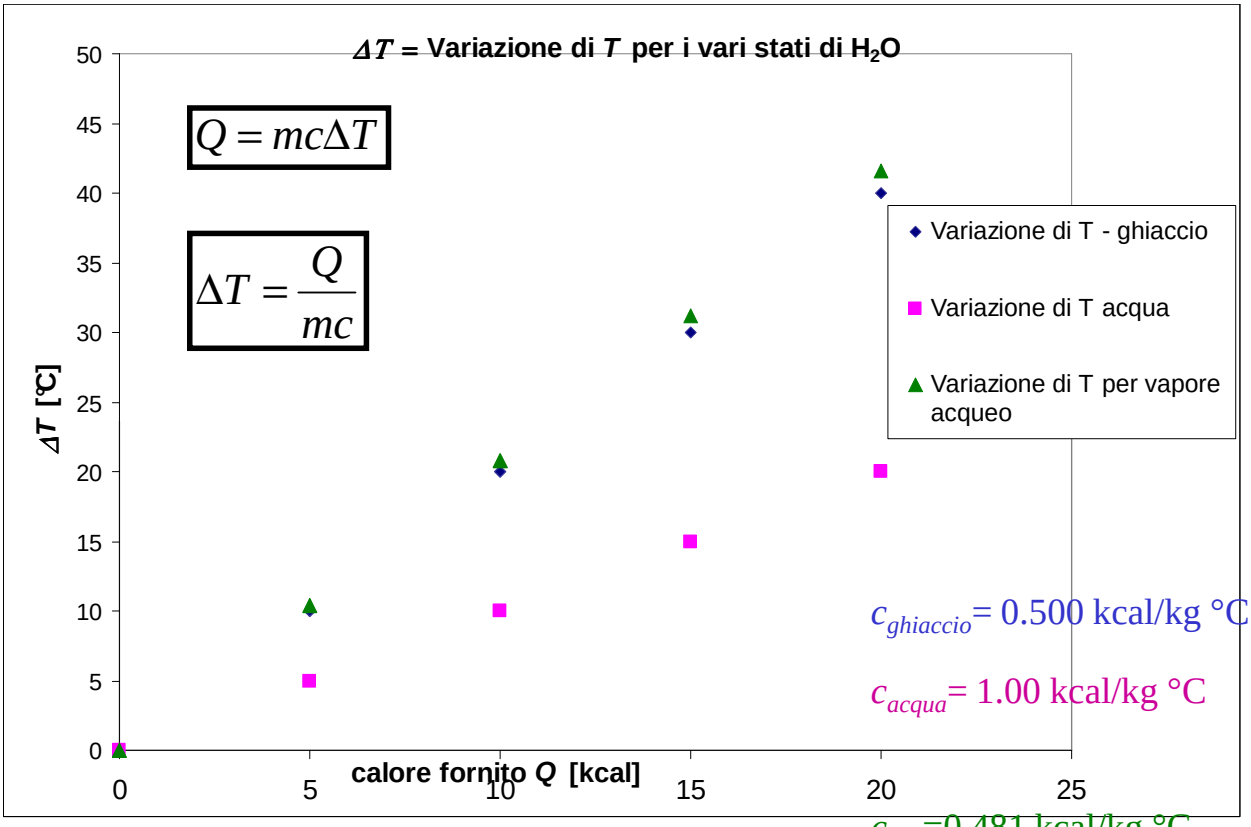
c_{vap}= 0.48 kcal/(kg °C)

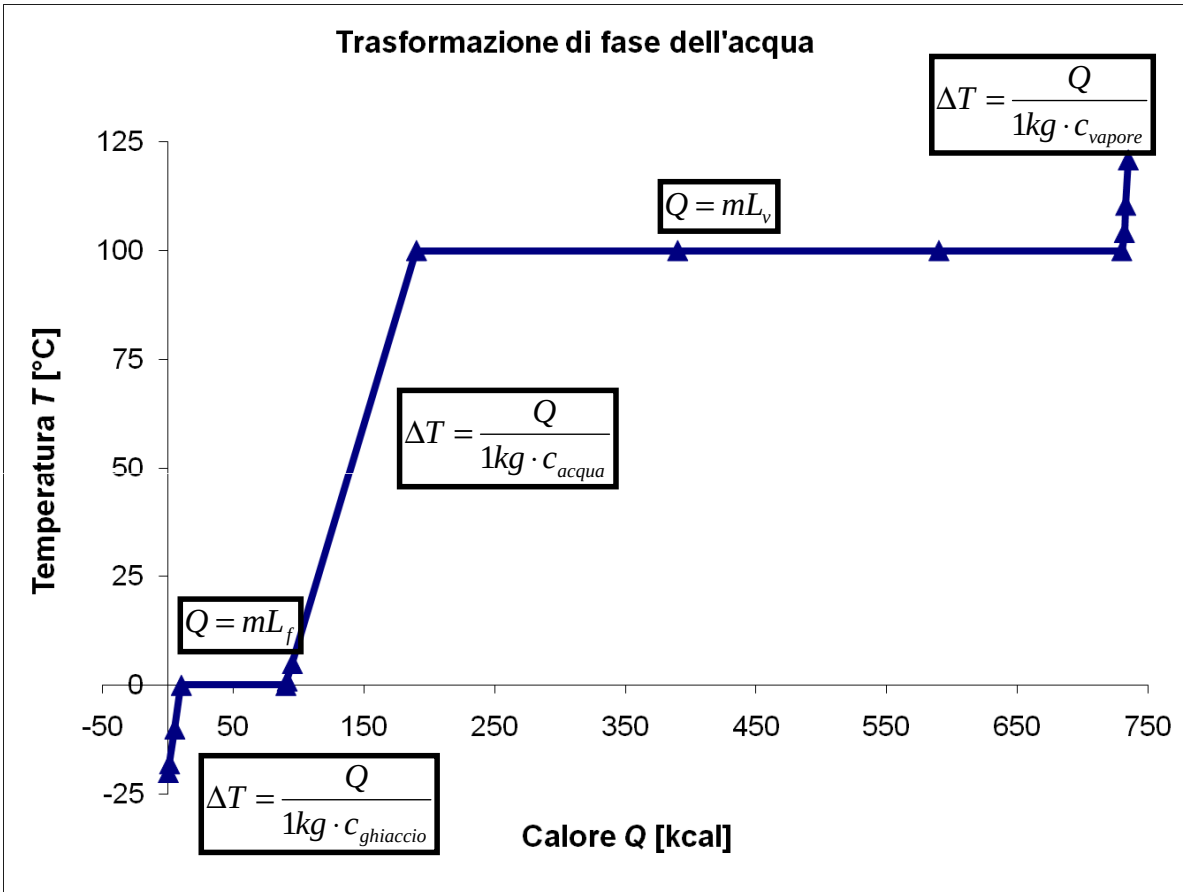
5,8 l di cocacola

Rappresentazione ...Grafica



Derivazione di leggi fisiche





Rappresentazione funzionale

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot (T_f - T_i)$$

Descrive la variazione di temperatura (T) di un corpo di massa m e calore specifico c se si fornisce o si asporta calore.

$c_{ahiaccio}$=0.500 kcal/(kg °C) c_{acqua}=1.00 kcal/(kg °C) c_{vapore}=0.481 kcal/(kg °C)

$$Q = mL$$

Legge che descrive il calore necessario per far cambiare di stato un corpo di massa m

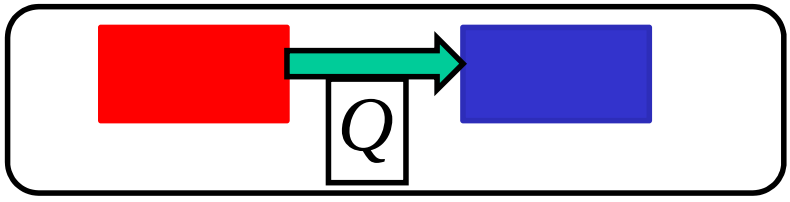
L_f = 79,6 kcal/kg Calore latente di fusione del ghiaccio o congelamento dell'acqua

L_v = 539 kcal/kg Calore latente di evaporazione dell'acqua o condensazione del vapore acqueo.

Rappresentazione di immediata lettura e utilizzo per ricavare altre relazioni o leggi

Derivazione di altre relazione

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = m \cdot c \cdot (T_f - T_i)$$



m_1, c_1, T_1 m_2, c_2, T_2

Il calore si propaga dal corpo 1 di massa m_1, calore specifico c_1 e temperatura T_1 al corpo 2 di massa m_2, calore specifico c_1 e temperatura T_2, dove $T_1 > T_2$ ad una temperatura di equilibrio T_{eq}.

Ricavare la temperatura di T_{eq}.

Cifre significative nel caso di misurazioni

- **Una grandezza è descritta da un numero ed una unità di misura (campione).**
- **Ogni misura avrà una precisione, ovvero avremo anche delle incertezze (o errori).**
- **Si hanno**
  - ***Incertezze* (errori) *sistematiche* (letture di scale, calibrazioni …)**
  - ***Incertezze* (errori) *casuali* (non siamo in grado di attribuire l'errore o isolarlo).**

- **Bisogna sapere anche propagare le incertezze, nel caso di misurazioni indirette, e quindi che risultano da relazioni tra grandezza misurate a loro volta direttamente o indirettamente.**

Errori –incertezza di lettura - strumentali

- **Errori sulla lettura di scale (sensibilità di lettura)**

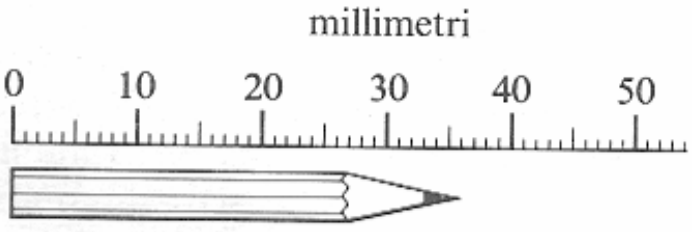


Figura 1.1. *La misura di una lunghezza con un righello.*

Migliore stima l = 36 mm

Intervallo 35.5 mm $\leq l \leq$ 36.5 mm

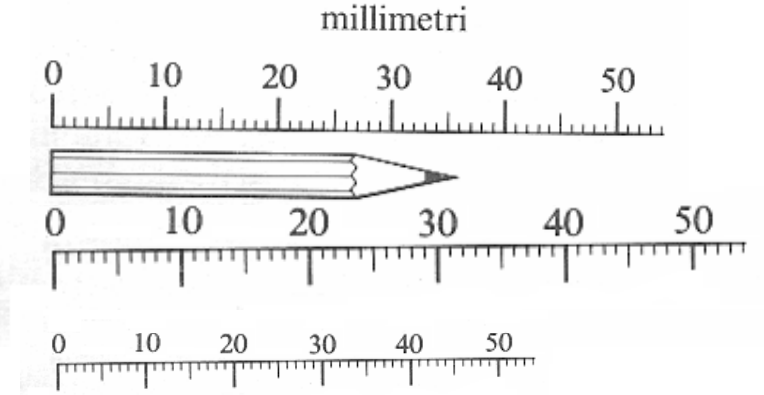
$l = 36 \pm 0.5$ mm ½ *del minimo misurabile*

Sul multimetro utilizzato per la lettura delle Termocoppie si legge 00 °C, pertanto minimo misurabile (risoluzione) 1 °C l'errore di lettura sarà 0.5 °C. $T = T \pm 0.5$ ° C

Indicheremo l'errore di lettura con ε, ed in pedice la grandezza: ε_T

Errori di calibrazione - strumentali

Errori di calibrazione o taratura



- **L'errore è sempre nello stesso verso (sottostima).**
- **sovrastima**

- **Gli strumenti vanno quindi calibrati, con altri strumenti o mediante procedure di calibrazione (o taratura).**

Vedi procedura di calibrazione della termocoppia.

$T_{cal} = aT_{mis} + b$

Se non si usa la curva di calibrazione tutte le misure saranno "errare" nello stesso verso (o sovrastima o sottostima).

Indicheremo questo tipo di errori con η, ed in pedice la grandezza: η_T

Questi errori vanno eliminati o corretti.

Errori statistici

Supponiamo di misurare 5 volte la T_{in} aula con il multimetro, ed ottenere i seguenti valori espressi in °C :

25, 24, 23, 25, 23, 26

La migliore stima risulta essere la media aritmetica:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n} = 24.33333 \quad °C$$

Se l'errore è casuale, la stima migliore dell'incertezza è:

$$\text{deviazione standard } \sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (T_i - \overline{T})^2}{n-1}} = 1.21106$$

$$T = \overline{T} \pm \sigma_T \qquad T = 24.3 \pm 1.2 \ °C$$

Approssimazioni

- **Di solito si arrotonda per eccesso l'incertezza ad una sola cifra significativa. Poi si accordano le cifre significative della misura in modo che quella meno significativa corrisponda all'errore.**
  Misura 25.03467 errore 0.0044672
  0.004467
  0.00447
  0.0045
  0.005

La cifra meno significativa della misura deve concordare con quella dell'errore

0.005

- **Misura 25.03467 ± 0.005**
  25.0347
  25.035

- **La misura si riporta quindi 25.035 ± 0.005**

- **Il problema si pone quando si ha un errore per il quale la cifra piu significativa vale 1 questo implica che arrotondare per esempio 1.3 ad 1 o 1.4 ad 1, porti ad una sottostima dell'errore, o arrotondare 1.5 o 1.6 a 2 una sovrastima.**
- **In queste situazioni si possono tenere 2 cifre significative.**

$\overline{T} = 24.33333 \ ^\circ C$

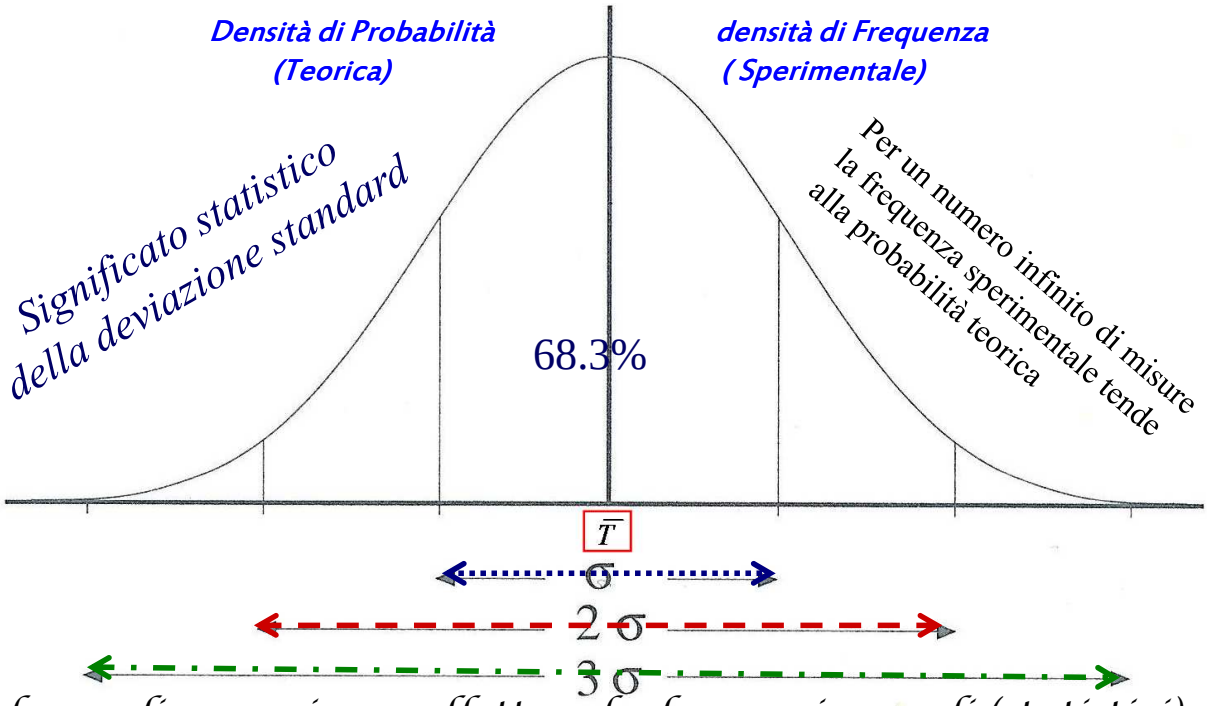
$\sigma_T = 1.21106 \ ^\circ C \approx 1.2 \ ^\circ C$

$\sigma_T = 1.2$ | $\overline{T} = 24.3$ | $3333 \ ^\circ C$

$\overline{T} = 24.3 \ ^\circ C$

- **Così riportiamo la misura come**

$T = 24.3 \pm 1.2 \ ^\circ C$



Nel caso di una misura affetta solo da errori casuali (statistici) che segue la distribuzione di Gauss ci aspettiamo:

68.3% di misure nell'intervallo $\mathcal{T}_m - \sigma_{\mathcal{T}} < \mathcal{T} < \mathcal{T}_m + \sigma_{\mathcal{T}}$

95.5% di misure nell'intervallo $\mathcal{T}_m - 2\sigma_{\mathcal{T}} < \mathcal{T} < \mathcal{T}_m + 2\sigma_{\mathcal{T}}$

99.7% di misure nell'intervallo $\mathcal{T}_m - 3\sigma_{\mathcal{T}} < \mathcal{T} < \mathcal{T}_m + 3\sigma_{\mathcal{T}}$

La distribuzione gaussiana

- **La distribuzione gaussiana (densità di probabilità riportata nel grafico precedente) deriva dall'assunzione che un determinato valore dell'errore abbia la stessa probabilità di comparire con il segno + o -.**
- **Se un'incertezza è casuale deve seguire tale andamento.**
- **Esiste una verifica detta del χ^2-*ridotto*, che permette a posteriori di verificare se una variabile è casuale e giustificare quindi l'utilizzo della deviazione standard come errore.**

Incertezza (errore) totale su una misura

Si assuma di aver eliminato tutti gli errori di calibrazione, rimangono comunque quelli dovuti alla sensibilità di lettura e quelli statistici?

L'incertezza totale si ottiene mediante la somma in quadratura:

$$\delta T_{tot} = \sqrt{(\sigma_T)^2 + (\varepsilon_T)^2}$$

$$\delta T_{tot} = \sqrt{(1.2)^2 + (0.5)^2} = 1.3\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Il valore da riportare $T = \overline{T} \pm \delta T_{tot}$

$$T = 24.3 \pm 1.3\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Esempio su più misure

La migliore stima è la media: $\overline{T} = 24{,}33333$ $\overline{T} = 24{,}3$

L'errore statistico della misura: $\sigma_T = 1{,}21106$ $\sigma_T = 1{,}2$

L'errore sistematico (sensibilità di lettura) $\varepsilon_T = 0{,}5$ $\varepsilon_T = 0{,}5$

L'errore totale $\delta T = 1{,}310216$ $\delta T = 1{,}3$

Non ha senso riportare tutte le cifre sopra in bordo nero, in genere si riporta la misura a seconda della precisione sulla base dell'errore approssimato (riquadro rosso).

La misura di T sarà derivata dalla curva di calibrazione

Per una singola misura T avremo

$$T = T \pm \varepsilon_T$$

Per misure multiple si ricaverà prima la temperatura calibrata per ogni singola misurazione , si farà la media dei valori calibrati eppoi:

$$T = \overline{T} \pm \delta T$$

Dove $$\delta T = \sqrt{(\sigma_T)^2 + (\varepsilon_T)^2}$$

Nota: se non si riesce ad eliminare l'errore sistematico η, ma Si conosce va sommato anche questo in quadratura.

$$\delta T = \sqrt{(\sigma_T)^2 + (\varepsilon_T)^2 + (\eta_T)^2}$$

Conclusioni e terminologia strumenti

- **Si utilizzano strumenti che riportano informazioni**
  - **Risoluzione**
  - **Accuratezza**
  - **L'accuratezza è l'errore che abbiamo indicato come η**
  - **Precisione**
- **Alcuni libretti di istruzioni confodono i termini,**
- **Per essere chiari meglio parlare di sensibilità dello strumento e sensibilità di lettura**
  - **Sensibilità dello strumento: minima variazione della grandezza**
  - **Sensibilità di lettura, minimo della scala di lettura.**

Per collegare i termini alle formule

Risoluzione massima o sensibilità dello strumento:
Sulla scala minima

$$\frac{1}{\varepsilon_T}$$

Risoluzione o sensibilità di lettura
dipende dalla scala:

$$\frac{1}{\varepsilon_T}$$

Prendiamo l'esempio del multimetro sulla scala dei volt
La sensibilità massima si ha sulla scala minima

200 mV *di fondo scala,*
unità fondamentale 1 mV

$$\varepsilon_T = 0.5 \text{ mV}$$

500 V *di fondo scala,*
unità fondamentale 1 V

$$\varepsilon_T = 0.5 \text{ V}$$

Accuratezza

- **Accuratezza =**

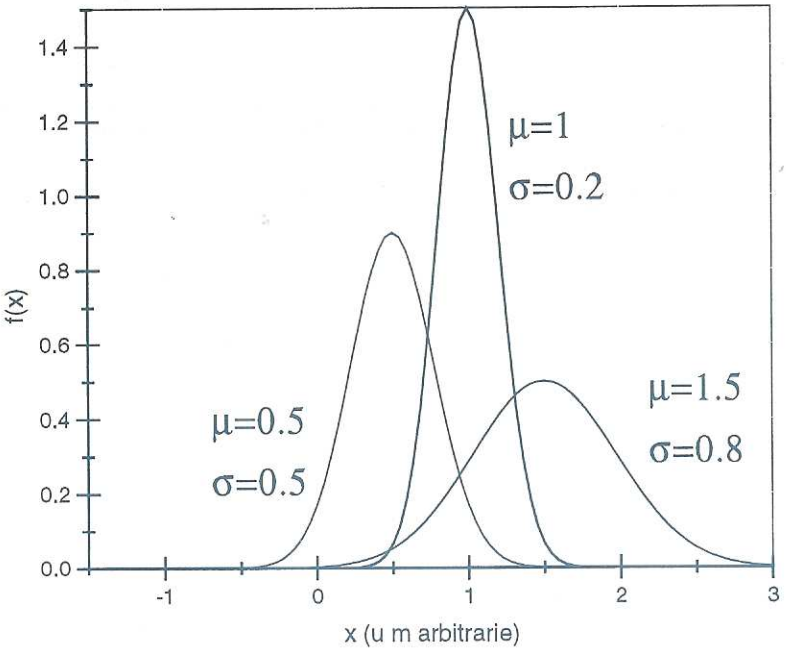
$$\frac{1}{|\eta|}$$

- **Precisione di una misura**

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}}$$

se è una singola misura coincide con la sensibilità di lettura
se si hanno grandezza affette da errori statistici allora
si ha il contributo di entrambi

Distribuzioni gaussiane



Le curve gaussiane sono funzioni di due parametri μ *(*valore centrale) e σ (larghezza della curva). Per misure ripetute la miglior stima di tali parametri sono rispettivamente media e deviazione standard del campione.

Accuratezza e precisione

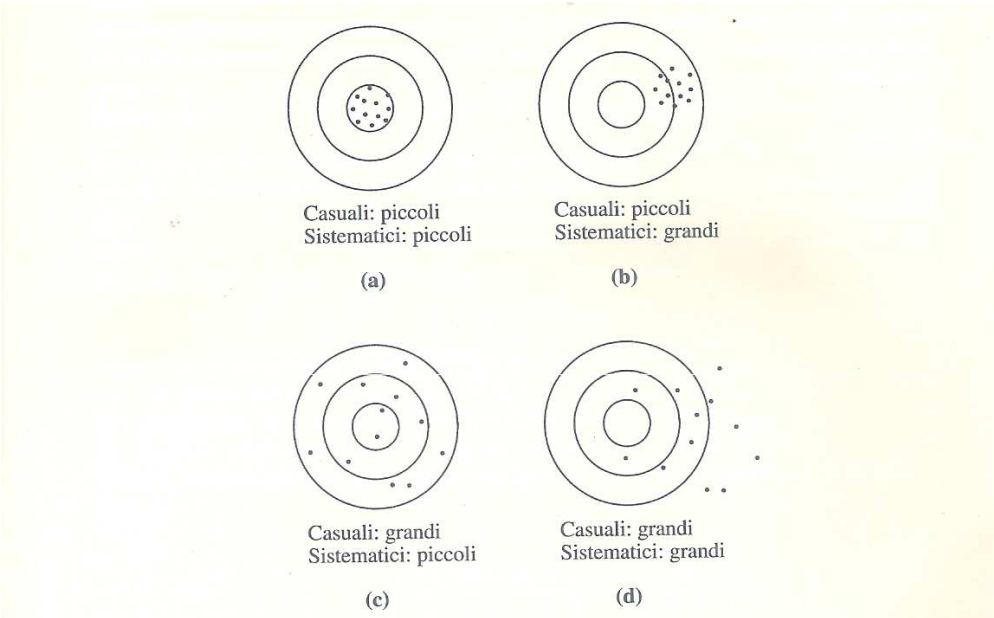
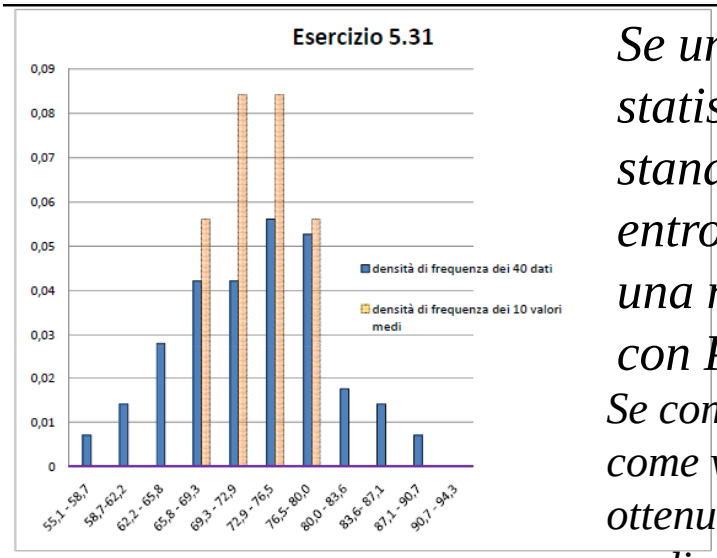


Figura 4.1. Errori casuali e sistematici nella pratica del tiro al bersaglio. (a) Poiché tutti i tiri arrivano vicini l'uno all'altro, possiamo dire che gli errori casuali sono piccoli. Poiché la distribuzione dei tiri è centrata nel centro del bersaglio, anche gli errori sistematici sono piccoli. (b) Gli errori casuali sono ancora piccoli, ma quelli sistematici sono più grandi – i tiri sono "sistematicamente" fuori centro verso destra. (c) Qui, gli errori casuali sono grandi, ma quelli sistematici sono piccoli, i tiri sono molto sparpagliati ma non sistematicamente fuori centro. (d) Qui, sia gli errori casuali che sistematici sono grandi.

Appendice: Deviazione standard della media



Se una grandezza è statistica, la deviazione standard ci fornisce l'intervallo entro cui pensiamo di trovare una nostra misura successiva con Probabilità apri al 68%..

$$\sigma_{\bar{T}} = \sigma_T / \sqrt{N}$$

Se confrontiamo la nostra misura come valore medio, con altre misure ottenute nello stesso modo, i valori medi seguono sempre una gaussiana ma con una deviazione più stretta data dalla deviazione standard della media.

Questo se la variabile è gaussiana, per fare la verifica del χ^2-ridotto sono necessarie almeno 100 misurazioni.

Continua

App.: propagazione degli errori, somme e sottrazioni

- **Se una misura di una grandezza *q* risulta dalla somma o differenza tra due grandezze (*x*, *y*) misurate con errori assoluti *δx δy, ovvero***

$$q = x + y, \text{ oppure } \quad q = x - y$$

migl sta per miglior stima

$$x = x_{migl} \pm \delta x \qquad y = y_{migl} \pm \delta y$$

Si dimostra che l'errore su *q* (δq) è dato dalla somma degli errori assoluti

$$\delta q = \delta x + \delta y$$

Se sono indipendenti tra loro (non esiste una relazione tra *x* e *y*) si può sommare in quadratura

$$\delta q = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$$

$$q_{migl} = x_{migl} + y_{migl}, \text{ oppure } \quad q_{migl} = x_{migl} - y_{migl}$$

$$q = q_{migl} \pm \delta q$$

App.: propagazione degli errori, prodotti o frazioni

- **Se una misura di una grandezza *q* risulta da prodotto o frazione tra due grandezze (*x*, *y*) misurate con errori assoluti *δx δy, ovvero***

$$x = x_{\text{migl}} \pm \delta x \qquad y = y_{migl} \pm \delta y \qquad q = x \cdot y, \ \text{o} \ q = \frac{x}{y}$$

Si dimostra che l'errore su *q* (δq) è dato dalla somma degli errori relativi

$$\frac{\delta q}{q} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

Se sono indipendenti tra loro (non esiste una relazione tra *x* e *y*) si può sommare in quadratura

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}$$

$$q_{migl} = x_{migl} \cdot y_{migl}, \text{ oppure } \quad q_{migl} = \frac{x_{migl}}{y_{migl}} \qquad q = q_{migl} \pm \delta q$$