La distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson (poissoniana) descrive fenomeni fisici per i quali nello schema *successo*-*insuccesso* ci si trovi nelle seguenti situazioni:

- Il numero di eventi possibili, o prove, n sia elevato (andamento al limite $n \rightarrow \infty$)
- p la probabilità di successo sia bassa (andamento al limite $p \rightarrow 0$)
- Il numero medio di eventi attesi, che indicheremo con μ, sia significativamente minore di $\sqrt{n}$

- Esempi o ambiti di utilizzo:

➢ **Decadimento dei nuclei radioattivi**

n atomi per mole 6.0225 $10^{23} \sim 10^{24}$

Ordine di grandezza dei decadimenti al secondo (successi) 10^{-4}-10^{4}

➢ **Nascite in un ospedale rispetto al numero di abitanti:**

A Ferrara nel 2010 in media circa 20 nascite per settimana su 10^{5} abitanti.

➢ **Qualsiasi procedimento di conteggio, sia rispetto ad un intervallo di tempo, in uno spazio, o rispetto a classi (vedi verifiche del chi-quadro).**

Questo argomento è trattato nel Cap. 13 di G. Ciullo "Introduzione al laboratorio di fisica"

Dalla binomiale alla poissoniana

La distribuzione di Poisson (poissoniana) si deriva quindi dalla binomiale come andamento al limite per

$$n \to \infty,$$
$$p \to 0$$

e esprimendo la speranza matematica, il numero medio di eventi attesi per la distribuzione ideale, che dobbiamo ancora formulare, come μ ma quindi partendo dalla binomiale

$$\mu = np.$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{B}_{n,p}(\nu) \overset{np=\mu}{=} \frac{\mu^{\nu}}{\nu!} e^{-\mu} = \mathscr{P}_{\mu}(\nu)$$

Dim. alla 

$$\text{dove } \mathscr{B}_{n,p}(\nu) = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} p^{\nu} q^{n-\nu}$$

dato che $p = \mu/n$ è sufficiente considerare l'andamento al limite infinito rispetto ad n.

Proprietà della distribuzione binomiale:

1) Normalizzazione della distribuzione
2) Speranza matematica = np
3) Varianza= npq

1) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathscr{P}_{\mu}(\nu) = 1$$

2) $$E[\nu] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \; \mathscr{P}_{\mu}(\nu) = \mu$$

Dimostriamo
1) e 2)
alla

3) $$V[\nu] = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu - \bar{\nu})^2 \; \mathscr{P}_{\mu}(\nu) = \mu$$

La dimostrazione della 3) la faremo, ma la lasciamo per i patiti di matematica.

Approssimazione di Poisson con Gauss:

La poissoniana all'aumentare di μ tende ad una gaussiana, con parametri:

$$X \equiv \mu \text{ e } \sigma = \sqrt{\mu}$$

Tale approssimazione risulta di utilizzo pratico, per μ elevati:
per esempio:
la probabilità di ottenere 78 conteggi nel caso in cui l'aspettativa, la media dei conteggi attesi, sia 68.

$$\mathscr{P}_{68}(78) = \frac{68^{78}}{78!} e^{-68} =$$

$$\mathscr{P}_{68}(78) = \frac{68^{78}}{78!} e^{-68} \underset{\text{a tre cifre}}{\overset{\text{arrotondo}}{\approx}} \frac{8.62 \;\, 10^{142}}{1.13^{115}} 2.94 \;\, 10^{-30} = 0.0234$$

$$G_{68,\sqrt{68}}(78) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(78-68)^2}{2\left(\sqrt{68}\right)^2}} \underset{\text{a tre cifre}}{\overset{\text{arrotondo}}{\approx}} 0.0232$$

L'approssimazione della poissoniana con una gaussiana, risulta ancora più utile, quando si vuole calcolare la probabilità di ottenere un numero di conteggi superiore a uno dato.

Utilizzando la gaussiana si ottiene per $P(\nu \geq 78)$:

$$G_{\mu,\sqrt{\mu}}(\nu \geq 78) \underset{z_{78}=\frac{78-68}{\sqrt{68}}}{\overset{z=\frac{\nu-\mu}{\sqrt{\mu}}}{=}} G_{0,1}(z \geq 1.21)$$

Dalla tabella dell'integrale normale (A.1):

$$G_{0,\,1}(z \geq 1.21) = G_{0,\,1}(0 \leq z \leq \infty) - G_{0,\,1}(0 \leq z \leq 1.21)$$

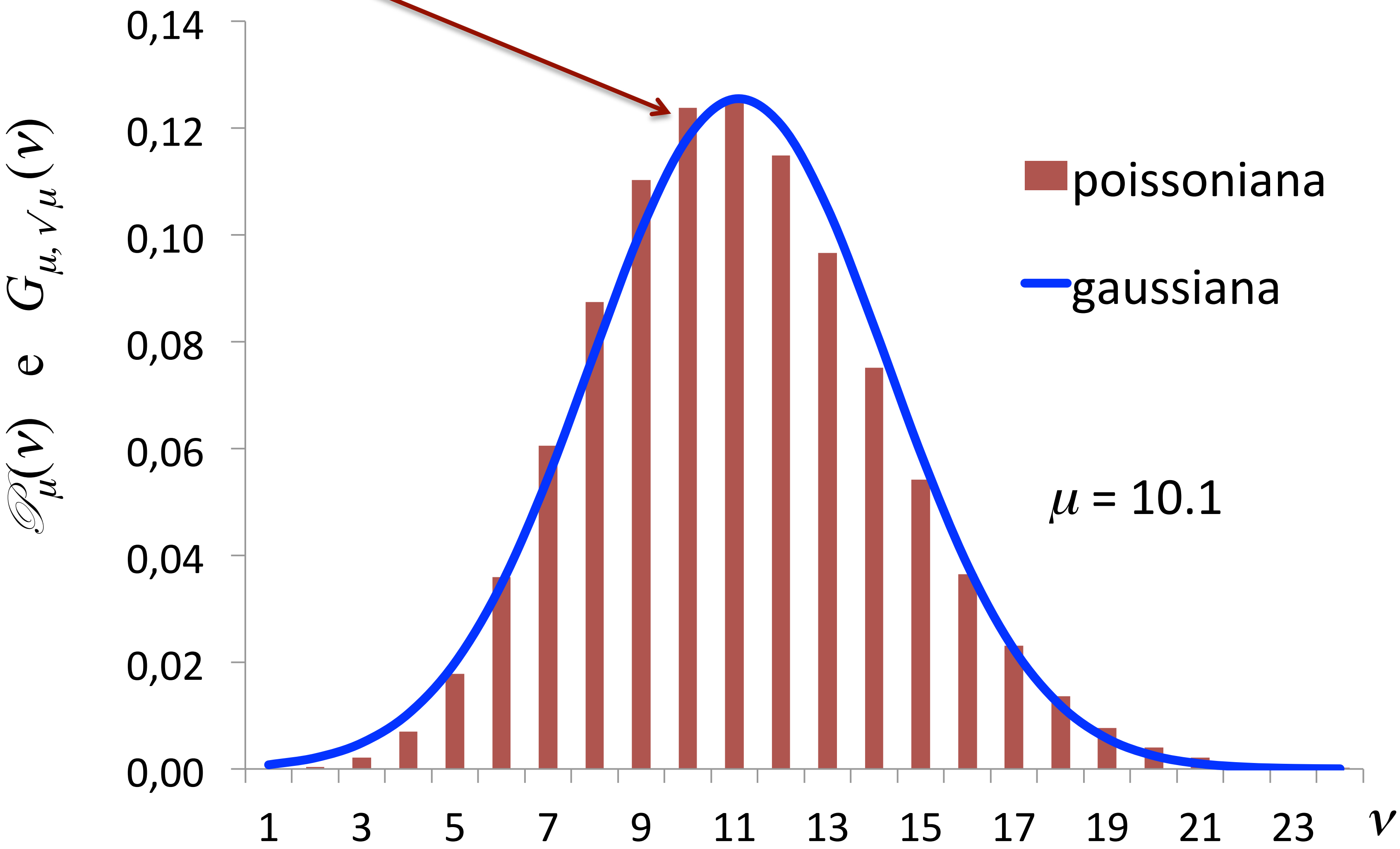
$$G_{0,\,1}(z \geq 1.21) = 0.5000 - 0.3849 = 0.1151$$

$$P(\nu \geq 78) \sim 11.5\ \%$$

Diversamente con la poissoniana dovremmo calcolare le probabilità per ogni singola ν a partire da 78 fino a un valore tale che probabilità sia trascurabile, e poi sommare tutti i risultati ottenuti. Si faccia attenzione che alcune calcolatrici, così come alcuni fogli elettronici, hanno delle limitazioni sul numero maggiore che riescono a elaborare, per cui non sarebbe possibile calcolare fattoriali o potenze elevate di numeri elevati.

L'approssimazione di Gauss per Poisson:

Possiamo osservare, empiricamente, grazie all'utilizzo di excel, come la **distribuzione di poisson**, sia già ben approssimata dalla gaussiana(…) corrispondente a partire da $\mu > 10$.



La verifica del χ^2 per Poisson con Gauss:

Un esperimento immediato per la verifica di Poisson sono i conteggi di radiazione Cosmica a naturale, mediante un contatore Geiger. Un sistema che se attraversato da una particella ionizzante, subisce una scarica in un gas rilevabile come impulso di corrente. Sono sistemi anche di utilizzo didattico e si possono acquisire al computer.

In tabella 13.1 sono riportate delle misure, 120, di conteggi del contatore Geiger in intervalli di tempo di 60 s.

Tabella 13.1 Numero di volte O_ν (occorrenze), che sono stati registrati ν conteggi, per un definito intervallo di tempo (un minuto) con un contatore Geiger

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
O_ν	0	0	1	2	6	2	5	13	8	18	17	5	12	12	6	5	3	4	1	0	0	0	0	0

Dalla tabella possiamo ricavare il valore medio osservato μ_O

$$\mu_O = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu F_\nu = \sum_{\nu=0}^{18} \nu F_\nu, \text{ dove } F_\nu = \frac{O_\nu}{N}$$

possiamo limitare la sommatoria all'ultimo valore per il quale contiamo qualcosa, dato che per il valori di ν in cui O_ν è nullo, otteniamo un contributo nullo.

Utilizzando la tabella otteniamo $\mu_O = 10.06$, che confrontando con l'incertezza $\sqrt{\mu_O} \sim 3.17$

Nel presentare il risultato forniremo come misura dei conteggi la media, arratondata secondo i soliti criteri rispetto all'incertezza.

$$\mu = 10 \pm 3$$

aggiungendo che sono i conteggi al minuto misurati.

Abbiamo a priori assunto che la distribuzione di Poisson fosse appropriata ai dati osservati.

Ora ne verifichiamo l'ipotesi e lo facciamo considerando la probabilità di Poisson che ci permette di fornire la aspettative per il corrispondente valore ν.

In generale abbiamo che E_ν, le aspettative per ν conteggi visto che la probabilità è la poissoniana sarà data da

$$E_\nu = N\, \mathscr{P}_\mu(\nu)$$

Per risolvere meglio l'organizzazione delle classi utilizziamo una cifra significativa in più rispetto a $\mu = 10.1$ e $\sigma = 3.2$, e otteniamo:

Tabella 13.2 Aspettative E_ν dei conteggi, dedotte dalla probabilità di Poisson, per il caso di 120 osservazioni N, $E_\nu = N\mathscr{P}_\mu(\nu)$, con una cifra decimale($E_\nu = 0.0$ riportati come 0)

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
E_ν	0	0	0.3	0.8	2.1	4.3	7.3	10.5	13.2	14.9	15	13.8	11.6	9	4.4	2.6	1.6	0.9	0.5	0.2	0.1	0.1	0	0

Per soddisfare il teorema delle somma di Pearson:

Tabella 13.2 Aspettative E_ν dei conteggi, dedotte dalla probabilità di Poisson, per il caso di 120 osservazioni N, $E_\nu = N\mathscr{P}_\mu(\nu)$, con una cifra decimale($E_\nu = 0.0$ riportati come 0)

ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
E_ν	0	0	0.3	0.8	2.1	4.3	7.3	10.5	13.2	14.9	15	13.8	11.6	9	4.4	2.6	1.6	0.9	0.5	0.2	0.1	0.1	0	0

Raggruppo in
Una classe

un'altra
classe

un'altra
classe

Uso per etichettare le classi il simbolo k

ν	0-6	7	8	9	10	11	12	13-14	15-23
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_k	14.9	10.5	13.2	14.9	15.0	13.8	11.6	15.5	10.6
O_k	16	13	8	18	17	5	12	18	13

Stimo i gradi di libertà :

ν	0-6	7	8	9	10	11	12	13-14	15-23
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_k	14.9	10.5	13.2	14.9	15.0	13.8	11.6	15.5	10.6
O_k	16	13	8	18	17	5	12	18	13

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{k=1}^{n_{classi}} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \Big/ d \, .$$

Calcolo gli E_k nella formula del χ^2-ridotto da: $N\mathscr{P}_k$

N lo calcolo da $N=\Sigma_k O_k$ (un vincolo).

$$\mathscr{P}_k = \mu^\nu/(\nu\,!)\, e^{-\mu}$$

Dove μ l'ho ottenuto dai dati : $\mu=\mu_O=\Sigma_\nu \nu\, O_\nu$ (un altro vincolo).

I gradi di libertà in questo caso risultano $d = n_{classic} - c$ = 9-2=7, χ_O^2-ridotto = 10.2/7 = 1.46, inoltre dato che $\chi_O^2 > E\,[\chi_O^2]= d$, allora faccio la verifica a destra.

$$P_d\left(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_O^2\right) = P_7\left(\tilde{\chi}^2 \geq 1.46\right)$$

Dalla tabella C.2 si osserva che è maggiore del 10 %, non possiamo rigettare l'ipotesi.

La verifica che abbiamo fatto è per vedere se i dati osservati seguono una poissoniana.

Si possono fare altre ipotesi per esempio un teorico stima, che visto il flusso di raggi cosmici e vista la sezione sensibile del rivelatore, i conteggi al minuto siano

$$\mu_{th} = 10.0 \qquad \text{(probl. 13.2)}$$

In questo caso la media dei conteggi non è stata stimata dai dati, ma fornita, per cui avremo un solo vincolo nel calcolo del χ^2-ridotto.

Allo stesso modo se modifico le condizione della misura e mi confronto con la media dei conteggi di un'altra condizioni, si pensi di schermare il contatore Geiger con dei mattoni di piombo e verificare, se la media ottenuta dalla misura precedente è appropriata per descrivere questi ultimi (Probl. 13.4).

Si prenderanno dei dati in classe durante le ultime due lezioni, che saranno forniti agli Studenti. Su tali dati saranno fatte varie ipotesi e gli studenti dovranno svorlgeli come esercizi.