

Derivazione della distribuzione di Poisson

Nella seguente dispensina si deriva la distribuzione di Poisson dalla distribuzione binomiale.

Tale derivazione non sarà richiesta all'esame, ma viene presentata per fissare meglio le argomentazioni e capire il senso dei parametri. Per il resto dopo la derivazione si richiede comunque lo studio del capitolo 11 del Taylor

La distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson descrive fenomeni (fisici, ma anche demografici) per i quali, sulla base dello schema successo-insuccesso, come per la binomiale, ci si trova nel caso in cui:

1. n - il numero di eventi possibili è elevato ($n \rightarrow \infty$),
2. p - la probabilità di successo è molto bassa ($p \rightarrow 0$),
3. μ - il numero medio di eventi attesi risulta molto minore di $\sqrt{n}$

Il numero medio di eventi (il ben noto $\bar{v}$, chiamato qui μ) si può esprimere secondo la distribuzione binomiale $\mu=np$, e si assume costante, a parità di eventi possibili e per p costante.

Alcuni esempi di fenomeni che soddisfano tali ipotesi sono:

1. i decadimenti dei nuclei radioattivi, dove il numero n di atomi per mole è $6.0225 \cdot 10^{23} \approx 10^{24}$, mentre l'ordine di grandezza dei decadimenti al secondo sono $10^4 \div 10^4$.
2. Il numero di reazioni nucleari (conteggi bassi) in un acceleratore, rispetto al numero di particelle circolanti e/o del bersaglio.
3. Il numero di nascite in un ospedale, rispetto al numero di abitanti.
4. Qualsiasi esperimento di conteggi o nel tempo o per classi.
5. Dalla 4 si ha quindi la stima dell'errore sul numero di conteggi attesi per classe nella derivazione del χ^2 .

Visto che si tratta di uno schema successo-insuccesso, si può utilizzare la distribuzione binomiale per calcolare la probabilità di v successi in n prove.

$$B_{n,p}(v) = \frac{n!}{v!(n-v)!} \cdot p^v \cdot q^{n-v} \quad (\text{equ. 1})$$

Calcolare tale probabilità con n elevato è improponibile, si studia quindi l'andamento al limite per $n \rightarrow \infty$ (e/o eventualmente per $p \rightarrow 0$).

Si può esprimere la distribuzione binomiale in funzione del parametro $\mu=np$ e, dato che $q=1-p$ (sostituendo a p μ/n) si ottiene:

$$B_{n,p}(v) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-v+1) \cdot \overbrace{(n-v) \cdot (n-v-1) \cdot \dots \cdot (1)}^{(n-v)!}}{(v)!(n-v)!} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^v \cdot \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-v} \quad (\text{equ. 2})$$

Si osservi che nell'equazione 2 possiamo semplificare come segue:

1. $(n-v)!$ si trova a numeratore e a denominatore, per cui si elidono i due termini.
prodotto di v termini
2. $\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-v+1)}^{n^v \cdot (1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{v-1}{n}\right)}$ si può esprimere anche come

3. il termine $\cdot \left(\frac{\mu}{n}\right)^v$ contiene n^v a denominatore che si può semplificare con n^v ricavato in 2.
4. Per $\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-v}$ si può esprimere l'esponente in modo diverso come segue.

L'equazione 2 diventa quindi

$$B_{n,p}(v) = (1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{v-1}{n}\right) \cdot \frac{\mu^v}{v!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^v}$$

Si osserva che al limite per $n \rightarrow \infty$ risulta

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{v-1}{n}\right) = 1,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^v = 1,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$

sulla base del limite noto $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Si deduce così la distribuzione di Probabilità di Poisson, $P_\mu(v)$, che fornisce la probabilità che si ottengano v successi (conteggi, decadimenti, nascite) per un fenomeno, per il quale il numero medio di eventi attesi sia μ .

$$P_\mu(v) = e^{-\mu} \frac{\mu^v}{v!}$$

(equ. 3)

Sulla base della deduzione della distribuzione di Poisson (equ. 3) dalla distribuzione binomiale, si può immediatamente affermare che il valore medio dei conteggi è μ ($\bar{v} = np = \mu$) e che la deviazione standard è, secondo la binomiale, $\sigma_v = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{np} = \sqrt{\mu}$, dato che $p \rightarrow 0$.

Si osserva che la distribuzione di Poisson dipende dal solo parametro μ .

Il numero medio atteso di eventi μ , può essere frutto di misure di conteggio, per cui si ha un'incertezza pari a $\sqrt{\mu}$. Ottenuto tale risultato si utilizza per calcolare la probabilità che si abbiano v successi e se ne traggono le conclusioni.

Tale distribuzione è utilizzata per il calcolo del χ^2 nel caso del conteggio di eventi. Ovvero l'errore atteso per i conteggi in una classe, dedotti da una distribuzione di probabilità, è pari alla radice quadrata dei conteggi attesi in quella classe.

Si fa osservare che una volta derivata la distribuzione di Poisson, si può ricavare a posteriori, che la distribuzione è normalizzata, il numero medio di conteggi attesi e la varianza:

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} = 1; \quad \bar{v} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} = \mu; \quad \sigma_v^2 = \sum_{v=1}^{\infty} (v - \bar{v})^2 \frac{\mu^v}{v!} e^{-\mu} = \bar{v}^2 - \bar{v}^2 = \mu.$$

(Equ. 3).

Questo ultimo sarebbe l'approccio "a posteriori", ovvero per fede si accetta la distribuzione, e poi se ne deducono le proprietà

Diversamente, con una migliore conoscenza dei limiti, quanto espresso nelle equazioni 3, si ottiene direttamente dalla distribuzione binomiale.

Si invita lo studente a continuare lo studio della distribuzione di Poisson dal testo consigliato.