



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Fisica

Corso di Laurea in Fisica e Astrofisica

Caratterizzazione di un modulatore di ellitticità risonante per
l'esperimento PVLAS

Relatore:

Prof. Guido Zavattini

Laureando:

Giorgio Battaglia

Anno Accademico 2009 – 2010

*a Ben e a Fedo,
per gli appunti e la pazienza*

Indice

1	INTRODUZIONE	3
1.1	L'ESPERIMENTO PVLAS	4
2	TEORIA DELL'ESPERIMENTO	7
2.1	L'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA	8
2.2	IL FORMALISMO DI JONES	12
3	CARATTERIZZAZIONE DEL MODULATORE	15
3.1	L'APPARATO PER LE MISURE	16
3.2	LA RISONANZA	19
3.3	LO SPETTRO DELLA MODULAZIONE D'AMPIEZZA . . .	22
3.4	LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA IN FUNZIONE DEL- L'ANGOLO	23
4	RISULTATI OTTENUTI	25
4.1	L'ESTINZIONE	26
4.2	LA RISONANZA	27
4.3	LO SPETTRO DELLA MODULAZIONE D'AMPIEZZA . . .	30
4.4	LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA IN FUNZIONE DEL- L'ANGOLO	31
5	CONCLUSIONI	33

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 L'ESPERIMENTO PVLAS

L'esperimento PVLAS, Polarizzazione del Vuoto con LASer, ha come obiettivo misurare la birifrangenza generata nel vuoto da un campo magnetico esterno. Per effettuare tale misura si utilizza un ellissometro basato su interferometro di Fabry-Perot in camera a vuoto ad alta finezza. [1]



Figura 1.1: L'apparato dell'esperimento PVLAS

Tale interferometro permette di allungare il cammino ottico del fascio grazie alle oltre 150000 riflessioni che avvengono al suo interno. Il laser utilizzato è un Nd:YAG con lunghezza d'onda λ di 1064 nm e potenza 200 mW. Il campo magnetico che induce la birifrangenza è generato da due magneti permanenti dipolari rotanti da 2.4 T. L'ellitticità acquisita dal fascio viene misurata dall'ellissometro, il quale trasmette solo la componente acquisita nella camera a vuoto perpendicolare alla polarizzazione iniziale del campo

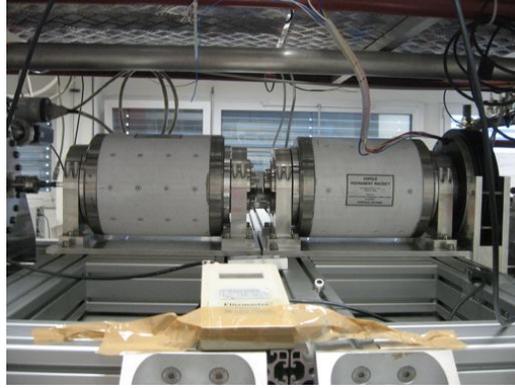


Figura 1.2: I magneti dell'esperimento PVLAS

elettrico. Essa sarebbe comunque troppo piccola per essere misurata, poiché dipende dall'ellitticità al quadrato, come previsto dalla legge di Malus. Quindi all'interno della camera a vuoto è stato aggiunto un modulatore di ellitticità risonante che induce nel fascio un'ulteriore ellitticità. Come verrà

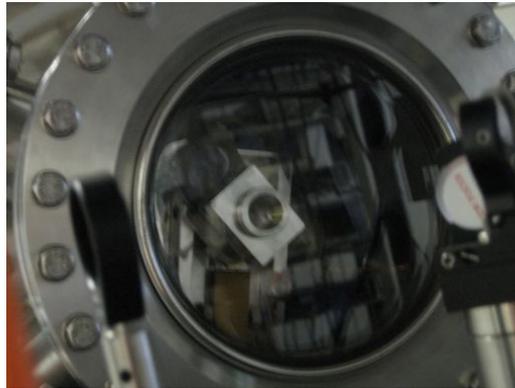


Figura 1.3: Il PEM dell'esperimento PVLAS

mostrato nei calcoli dei capitoli successivi ciò permette di linearizzare il termine dovuto alla birifrangenza del vuoto e quindi di poterlo misurare. [1] Quest'ultimo termine risulterà essere uguale a $\Delta n = 3A_e B^2 = 2.28 \cdot 10^{-23}$, sapendo che $A_e = 1.32 \cdot 10^{-24} T^{-2}$.

Capitolo 2

TEORIA DELL'ESPERIMENTO

2.1 L'ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

La teoria dell'elettrodinamica quantistica (QED) è una teoria dell'elettromagnetismo che prevede anche effetti non-lineari come la diffusione fotone-fotone. Secondo questa teoria il vuoto è lo stato fondamentale del campo elettromagnetico. Come tutti gli stati è soggetto a fluttuazioni dovute alla creazione di coppie di particelle e antiparticelle. Queste coppie possono essere considerate come piccole correnti virtuali polarizzabili mediante un campo magnetico o elettrico esterno. Le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo classico si possono ricavare dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right]$$

L'elettromagnetismo classico è una teoria lineare, cioè la combinazione lineare di soluzioni delle equazioni di Maxwell è ancora una soluzione, e quindi non può prevedere effetti non lineari. La correzione venne calcolata da Euler e Heisenberg negli anni 30 del XX secolo basandosi sul principio d'indeterminazione di Heisenberg:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{EM} + \mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right] + \frac{A_e}{\mu_0} \left[\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right)^2 + 7 \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \mathbf{B} \right)^2 \right]$$

dove $A_e = \frac{2}{45\pi\mu_0} \left(\frac{\alpha^2 \lambda^3}{m_e c^2} \right)$ è il parametro che descrive la non-linearità. Le condizioni sotto cui è valida la lagrangiana sono: $|\mathbf{E}| \ll E_{crit} \sim 10^{18} \frac{V}{m}$ e $|\mathbf{B}| \ll B_{crit} \sim 10^9 T$. Da quest'ultima lagrangiana è possibile ricavare le espressioni di campi \mathbf{D} e \mathbf{H} :

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial \mathbf{B}}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 A_e \left[4 \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \mathbf{E} + 14 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{A_e}{\mu_0} \left[4 \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \mathbf{B} - 14 \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \mathbf{B} \right) \frac{\mathbf{E}}{c} \right]$$

Gli effetti di birifrangenza previsti dalla QED si hanno quando si è in presenza di un forte campo magnetico esterno.

Tenendo presente che $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}$ e che $\mathbf{B}_{Ext} \gg \mathbf{B}_{rad}$, nel caso di \mathbf{D} si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} + 4\epsilon_0 A_e \left[\frac{E_{rad}^2}{c^2} - (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext})^2 \right] \mathbf{E}_{rad} + \\
&\quad + 14\epsilon_0 A_e [\mathbf{E}_{rad} \cdot (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext})] (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) = \\
&= \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} + 4\epsilon_0 A_e \left(\frac{E_{rad}^2}{c^2} - B_{Ext}^2 - 2\mathbf{B}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext} \right) \mathbf{E}_{rad} + \\
&\quad + 14\epsilon_0 A_e (\mathbf{E}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext}) (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) = \\
&= \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} + \epsilon_0 A_e \left[-4B_{Ext}^2 \mathbf{E}_{rad} + 14(\mathbf{E}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext}) \mathbf{B}_{Ext} \right] = \\
&= \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} \left(1 - 4A_e B_{Ext}^2 \right) + 14\epsilon_0 A_e (\mathbf{E}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext}) \mathbf{B}_{Ext}
\end{aligned}$$

mentre per quanto riguarda \mathbf{H} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} + 4 \frac{A_e}{\mu_0} \left[\frac{E_{rad}^2}{c^2} - (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext})^2 \right] (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) + \\
&\quad - 14 \frac{A_e}{\mu_0} \left[\frac{\mathbf{E}_{rad}}{c} \cdot (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) \right] \frac{\mathbf{E}_{rad}}{c} = \\
&= \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} + 4 \frac{A_e}{\mu_0} \left(\frac{E_{rad}^2}{c^2} - B_{rad}^2 - B_{Ext}^2 - 2\mathbf{B}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext} \right) (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) + \\
&\quad - 14 \frac{A_e}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{E}_{rad}}{c} \cdot \mathbf{B}_{Ext} \right) \frac{\mathbf{E}_{rad}}{c} = \\
&= \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} + \frac{A_e}{\mu_0} \left[4 \left(-B_{Ext}^2 - 2\mathbf{B}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext} \right) (\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}) \right] = \\
&= \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} \left(1 - 4A_e B_{Ext}^2 \right) - 8 \frac{A_e}{\mu_0} (\mathbf{B}_{rad} \cdot \mathbf{B}_{Ext}) \mathbf{B}_{Ext}
\end{aligned}$$

Per calcolare la differenza di indice di rifrazione Δn tra i due assi di polarizzazione, veloce e lento, bisogna considerare l'effetto del campo esterno nei due casi, cioè quando è parallelo o perpendicolare al piano di polarizzazione

del fascio:

nel caso $\mathbf{E}_{rad} \parallel \mathbf{B}_{Ext}$ si ottiene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} (1 + 10A_e B_{Ext}^2)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} (1 - 4A_e B_{Ext}^2)$$

mentre nel caso $\mathbf{E}_{rad} \perp \mathbf{B}_{Ext}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{rad} (1 - 4A_e B_{Ext}^2)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_{rad} + \mathbf{B}_{Ext}}{\mu_0} (1 - 12A_e B_{Ext}^2)$$

Ricordando che $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$ e $n = \frac{c}{v}$ si riescono facilmente a ottenere i due indici di rifrazione, parallelo e perpendicolare, e conseguentemente il Δn :

$$\begin{aligned} n_{\parallel} &= \sqrt{(\epsilon_0 \epsilon_r)_{\parallel} (\mu_0 \mu_r)_{\parallel}} = \sqrt{\frac{1 + 10A_e B_{Ext}^2}{1 - 4A_e B_{Ext}^2}} = \sqrt{(1 + 10A_e B_{Ext}^2)(1 + 4A_e B_{Ext}^2)} = \\ &= \sqrt{1 + 14A_e B_{Ext}^2} \sim 1 + 7A_e B_{Ext}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{\perp} &= \sqrt{(\epsilon_0 \epsilon_r)_{\perp} (\mu_0 \mu_r)_{\perp}} = \sqrt{\frac{1 - 4A_e B_{Ext}^2}{1 - 12A_e B_{Ext}^2}} = \sqrt{(1 - 4A_e B_{Ext}^2)(1 + 12A_e B_{Ext}^2)} = \\ &= \sqrt{1 + 8A_e B_{Ext}^2} \sim 1 + 4A_e B_{Ext}^2 \end{aligned}$$

$$\Delta n = 3A_e B_{Ext}^2$$

Sapendo che un fascio di luce polarizzata linearmente può essere considerato come la sovrapposizione di due fasci in fase polarizzati linearmente, uno parallelo all'asse veloce e l'altro perpendicolare a esso, si comprende facilmente l'effetto generato da un mezzo birifrangente. Esso crea uno sfasamento tra

il fascio parallelo e quello perpendicolare, generando una componente perpendicolare e cambiando la polarizzazione da lineare a ellittica. Tale sfasamento è uguale a

$$\phi_{QED} = \Delta n l \frac{2\pi}{\lambda}$$

dove l è la lunghezza del mezzo birifrangente e λ è la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. L'ellitticità, cioè il rapporto tra le due componenti del campo elettrico, che acquisirà il fascio sarà quindi

$$\Psi = \frac{\phi_{QED}}{2} \sin 2\theta$$

dove θ è l'angolo fra la polarizzazione della luce e il campo magnetico esterno.

2.2 IL FORMALISMO DI JONES

In questo esperimento useremo il formalismo delle matrici di Jones per la trattazione del fascio laser. Tale formalismo può essere applicato solamente a fasci di luce polarizzati e monocromatici [2], che per convenzione si muovono lungo l'asse \mathbf{z} , i quali vengono rappresentati mediante il vettore del campo elettrico $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$. Solitamente però un fascio laser polarizzato parallelamente al piano xz viene indicato dal vettore $\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli elementi dell'apparato sperimentale vengono rappresentati attraverso matrici che vanno moltiplicate per il vettore che rappresenta il fascio secondo l'ordine con cui interagiscono con esso. Le matrici degli elementi che compongono PVLAS sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}ol1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{B}\mathcal{F} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}OD &= \begin{pmatrix} 1 & i\zeta(t) \\ i\zeta(t) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \zeta(t) = \eta_0 \cos(\omega t + \vartheta) \\ \mathcal{P}ol2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\mathcal{B}\mathcal{F}$ che rappresenta l'ellitticità acquisita nella cavità Fabry-Perot può essere semplificata usando le approssimazioni per angoli piccoli e sfruttando le regole trigonometriche.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{F} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\Psi} \cos \theta & -e^{-i\Psi} \sin \theta \\ e^{i\Psi} \sin \theta & e^{-i\Psi} \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\Psi} \cos^2 \theta + e^{-i\Psi} \sin^2 \theta & e^{i\Psi} \sin \theta \cos \theta - e^{-i\Psi} \sin \theta \cos \theta \\ e^{i\Psi} \sin \theta \cos \theta - e^{-i\Psi} \sin \theta \cos \theta & e^{i\Psi} \sin^2 \theta + e^{-i\Psi} \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1 + i\Psi) \cos^2 \theta + (1 - i\Psi) \sin^2 \theta & (1 + i\Psi) \sin \theta \cos \theta - (1 - i\Psi) \sin \theta \cos \theta \\ (1 + i\Psi) \sin \theta \cos \theta - (1 - i\Psi) \sin \theta \cos \theta & (1 + i\Psi) \sin^2 \theta + (1 - i\Psi) \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \imath\Psi \cos 2\theta & \imath\Psi \sin 2\theta \\ \imath\Psi \sin 2\theta & 1 - \imath\Psi \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Con ciò si può calcolare l'espressione del fascio uscente dall'apparato:

$$\mathbf{E}_{out} = \mathcal{P}ol2 \cdot \mathcal{M}OD \cdot \mathcal{B}\mathcal{F} \cdot \mathcal{P}ol1 \cdot \mathbf{E}_{in}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{out} &= E_0 (\imath\zeta(t) - \zeta(t)\Psi \cos 2\theta + \imath\Psi \sin 2\theta) \sim \\ &\sim E_0 (\imath\zeta(t) + \imath\Psi \sin 2\theta) \end{aligned}$$

da cui si può ricavare, trascurando i termini al secondo ordine Ψ^2 (troppo piccoli per essere misurati), l'intensità rilevata dal fotodiodo [1]:

$$I = |E_{out}|^2 \sim E_0^2 [\zeta^2(t) + 2\zeta(t)\Psi \sin 2\theta]$$

Nei calcoli svolti finora non si è tenuto conto delle imperfezioni degli elementi ottici. I due polarizzatori, anche se vengono posizionati in estinzione (cioè con gli assi ottici perpendicolari fra loro), trasmettono comunque una piccola quantità di luce [1]. Questo fattore, chiamato estinzione e indicato con σ^2 , va misurato sperimentalmente. Altro fattore da considerare sono le piccole imperfezioni che generano un termine di ellitticità spuria indicato con α^2 che si somma a quella generata dal modulatore e dal campo magnetico. Queste quantità sono piccole e si sommano algebricamente [1].

$$\begin{aligned} I &= I_0 [\sigma^2 + |\imath\zeta(t) + \imath\Psi \sin 2\theta + \imath\alpha(t)|^2] \sim \\ &\sim I_0 [\sigma^2 + \zeta^2(t) + \alpha^2(t) + 2\zeta(t)\Psi \sin 2\theta + 2\zeta(t)\alpha(t)] \end{aligned}$$

Infine per riuscire a distinguere il termine $\alpha(t)\zeta(t)$ dal termine $\zeta(t)\Psi \sin 2\theta$ viene fatto variare nel tempo il termine $\Psi \sin 2\theta$ [1]. Ciò avviene sia ruotando l'angolo del campo magnetico, ottenendo $\theta(t)$, sia variando l'intensità del campo magnetico, ottenendo $\Psi(t)$:

$$I = I_0 [\sigma^2 + \zeta^2(t) + \alpha^2(t) + 2\zeta(t)\Psi(t) \sin 2\theta(t) + 2\zeta(t)\alpha(t)]$$

Capitolo 3

CARATTERIZZAZIONE DEL MODULATORE

3.1 L'APPARATO PER LE MISURE

L'argomento di questa tesi è la caratterizzazione di un modulatore di ellitticità risonante (PEM, photoelastic modulator) come quello utilizzato nell'esperimento PVLAS. L'apparato utilizzato per le misure è simile a quello utilizzato per PVLAS, ma molto più semplice.

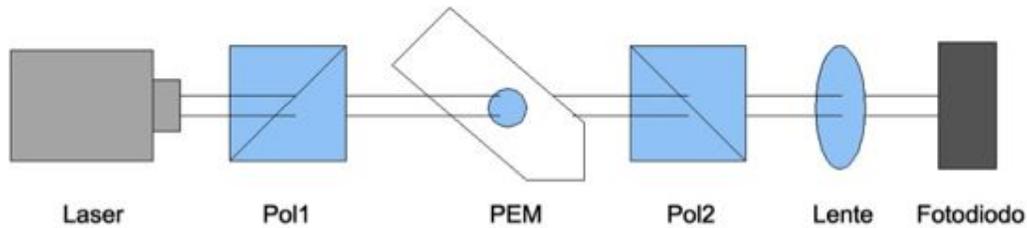


Figura 3.1: l'apparato utilizzato per le misurazioni

È formato da un laser infrarosso con $\lambda = 1064$ nm e 13 mW di potenza, un polarizzatore e un secondo polarizzatore detto analizzatore, infine ci sono



Figura 3.2: Il laser utilizzato per le misurazioni

il PEM e una lente per focalizzare il fascio sul fotodiodo. Come spiegato precedentemente il PEM induce nel fascio di luce che lo attraversa un'ellitticità, causata dalla birifrangenza del materiale che lo compone. La birifrangenza ordinaria è quel fenomeno che si manifesta in quei materiali, in particolare i cristalli, che non sono isotropi dal punto di vista ottico, cioè in cui le forze di richiamo dei nuclei sugli elettroni sono diverse a seconda della direzione nel cristallo [2]. Ciò implica che anche la frequenza propria di oscillazione

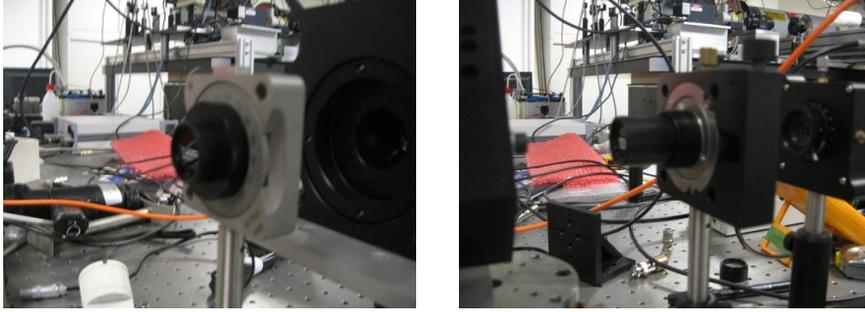


Figura 3.3: Il polarizzatore e l'analizzatore

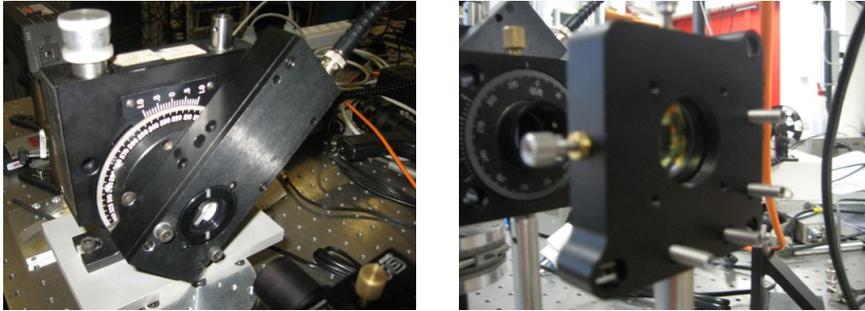


Figura 3.4: Il PEM e la lente

degli elettroni, e quindi la velocità della luce e quindi l'indice di rifrazione, varia secondo la direzione seguita nel cristallo. Nel PEM, formato da un trasduttore piezoelettrico e da una barra di materiale trasparente (solitamente di fused silica), la birifrangenza viene indotta dallo stress meccanico indotto dal trasduttore che vibra a frequenza ω_{MOD} . Per costruzione nel PEM le due direzioni con indice di rifrazione diverso sono perpendicolari fra loro e alla direzione del fascio. Ciò comporta che la luce viaggia a velocità diversa a seconda della diversa polarizzazione, e quindi acquisisce uno sfasamento tra le due componenti al campo elettrico, ovvero diventando polarizzata ellitticamente. Un fascio di luce è polarizzato ellitticamente quando il campo elettrico \mathbf{E} ruota e varia d'intensità. La sua equazione [2] è

$$\left(\frac{\mathbf{E}_x}{E_{0x}} - \frac{\mathbf{E}_y}{E_{0y}} \cos \phi \right)^2 = \left[1 - \left(\frac{\mathbf{E}_x}{E_{0x}} \right)^2 \right] \sin^2 \phi$$

in cui il raggio è supposto viaggiare lungo l'asse Z , \mathbf{E}_x e \mathbf{E}_y sono le com-

ponenti del campo elettrico parallele rispettivamente all'asse X e Y e ϕ è la fase relativa fra loro. Esso può essere considerato come la sovrapposizione di due fasci polarizzati circolarmente ma con intensità diverse.

3.2 LA RISONANZA

Il PEM è composto da una barra di fused silica, come spiegato prima, e da un trasduttore piezoelettrico. Il trasduttore può essere eccitato a varie frequenze, ma per ottenere i risultati migliori bisogna utilizzare la frequenza di risonanza del cristallo. Il fenomeno della risonanza si ha quando si è in presenza di oscillazioni forzate, ovvero di un sistema oscillante sottoposto a una forza armonica. Il fenomeno è descritto dall'equazione differenziale [3]:

$$M\ddot{x}(t) + M\Gamma\dot{x}(t) + M\omega_0^2x(t) = F_0 \cos \omega t$$

la cui soluzione stazionaria è

$$x_s(t) = A_{ass} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t$$

dove $A_{ass} = \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$, $A_{el} = \frac{F_0}{M} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$ e $\Gamma = \frac{1}{\tau}$.

La soluzione stazionaria fornisce il moto del sistema a regime, cioè dopo che la forza eccitatrice esterna è stata applicata per un tempo lungo diverse volte il tempo di decadimento τ . Nell'equazione non ci sono costanti adattabili, a regime l'ampiezza delle oscillazioni e la costante di fase dipendono dal modulo della forza esterna e dalla sua costante di fase [3].

La potenza assorbita dall'oscillatore è data dalla formula

$$P(t) = F(t)\dot{x}(t) = F_0 \cos \omega t [\omega A_{ass} \cos \omega t - \omega A_{el} \sin \omega t]$$

e come si vede è formata da due componenti. La prima, quella in seno, deriva da $A_{el} \cos \omega t$ ed è sfasata rispetto alla velocità di $\frac{\pi}{2}$. Se si calcola la media su un periodo dà un contributo nullo. La seconda, in coseno, invece deriva da $A_{ass} \sin \omega t$ ed è in fase con la velocità. Calcolandone la media su un periodo dà l'effettiva potenza assorbita. Andando a calcolare la media su un ciclo si trova infatti

$$P = F_0\omega A_{ass} \langle \cos^2 \omega t \rangle - F_0\omega A_{el} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2}F_0\omega A_{ass}$$

Quando il sistema si trova in condizione di risonanza, cioè la frequenza dell'oscillatore è uguale alla sua frequenza propria ω_0 , l'equazione diventa

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}$$

È interessante misurare l'andamento del modulo dell'ampiezza delle oscillazioni $|A| = \sqrt{A_{ass}^2 + A_{el}^2}$ in funzione della frequenza ω

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{F_0}{M} \sqrt{\frac{\Gamma^2 \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]^2} + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]^2}} = \\ &= \frac{F_0}{M} \sqrt{\frac{\Gamma^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]^2}} = \\ &= \frac{F_0}{M} \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} = \end{aligned}$$

per $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ può essere semplificata come segue:

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{F_0}{M} \sqrt{\frac{\Gamma^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2]^2}} = \\ &\sim \frac{F_0}{M} \sqrt{\frac{\Gamma^2 \omega_0^2}{[(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \Gamma^2 \omega_0^2]^2}} \sim \\ &\sim \frac{F_0}{M} \frac{\Gamma \omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \Gamma^2 \omega_0^2} \sim \frac{F_0}{M} \frac{1}{2\omega_0} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Quando si fanno misure di risonanza bisogna misurare anche la fase fra i due segnali, cioè tra la forza eccitatrice e il segnale dell'oscillatore che si vuole misurare. A questa fase se ne può aggiungere un'altra arbitraria dovuta alla modalità di misura, la quale però non ha alcun significato fisico. Effettuando tale misura si nota che alla frequenza di risonanza la forza eccitatrice e il segnale che misuriamo sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$. L'andamento della fase ϕ in funzione della frequenza è dato da

$$\phi = \arctan \frac{A_{el}}{A_{ass}} = \arctan \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega}$$

per $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ diventa

$$\phi \sim \arctan \frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}{\Gamma \omega} \sim$$

$$\sim \arctan \frac{(\omega_0 - \omega) 2\omega_0}{\Gamma\omega_0} = \arctan \frac{\omega_0 - \omega}{\frac{\Gamma}{2}}$$

Quanto detto fino adesso riguarda il moto di un oscillatore armonico forzato e smorzato. Per la caratterizzazione del PEM abbiamo studiato l'andamento dell'ellitticità in funzione della frequenza. In questo sistema si ha che il modulo dell'ampiezza è proporzionale allo stress creato dal cristallo piezoelettrico sulla barra oscillante, $|A| \propto stress$. A sua volta quest'ultimo è proporzionale all'ellitticità η , $|A| \propto stress \propto \eta$. Ciò ci permette di ottenere l'espressione dell'ellitticità in funzione della frequenza

$$\eta(\omega) = \eta_{\omega_0} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

3.3 LO SPETTRO DELLA MODULAZIONE D'AMPIEZZA

Precedentemente abbiamo mostrato che l'espressione dell'intensità rilevata dal fotodiodo è:

$$I = I_0[\sigma^2 + \zeta^2(t) + \alpha^2(t) + 2\zeta(t)\Psi(t) \sin 2\theta(t) + 2\zeta(t)\alpha(t)]$$

In questa espressione è stato supposto che l'intensità I_0 resti costante nel tempo. In realtà quando il fascio laser attraversa il PEM esso può indurre una variazione dell'intensità pari a

$$I(t) = I_0(1 + \epsilon \cos \omega_{MOD}t)$$

Andando a sostituire quest'ultimo termine nell'espressione dell'intensità, ricordandosi che $\zeta^2(t) = \frac{\eta_0^2}{2}(1 + \cos 2\omega_{MOD}t)$, e svolgendo i calcoli si vede facilmente che oltre ai termini di frequenza $2\omega_{MOD}$ compaiono anche termini con frequenza $3\omega_{MOD}$:

$$I(t) = I_0(1 + \epsilon \cos \omega_{MOD}t)[\sigma^2 + \zeta^2(t) + \alpha^2(t) + 2\Psi(t)\zeta(t) + 2\alpha(t)\zeta(t)] =$$

$$I(t) = I_0[A_0(t) + A_1(t) \cos \omega_{MOD}t + A_2(t) \cos 2\omega_{MOD}t + A_3 \cos 3\omega_{MOD}t]$$

$$A_0(t) = \sigma^2 + \frac{\eta_0^2}{2} + \alpha^2(t) + \eta_0\epsilon\Psi(t) + \eta_0\epsilon\alpha(t)$$

$$A_1(t) = 2\eta_0\Psi(t) + 2\eta_0\alpha(t) + \sigma^2\epsilon + \frac{3}{4}\eta_0^2\epsilon + \alpha^2(t)\epsilon$$

$$A_2(t) = \frac{\eta_0^2}{2} + \eta_0\epsilon\Psi(t) + \eta_0\epsilon\alpha^2(t)$$

$$A_3 = \frac{\eta_0^2}{4}\epsilon$$

Per migliorare la precisione delle misure è utile misurare ϵ che è dato dal rapporto di A_3 e A_2

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{\eta_0^2\epsilon}{4} \frac{2}{\eta_0^2} = \frac{\epsilon}{2} \rightarrow \epsilon = 2\frac{A_3}{A_2}$$

3.4 LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA IN FUNZIONE DELL'ANGOLO

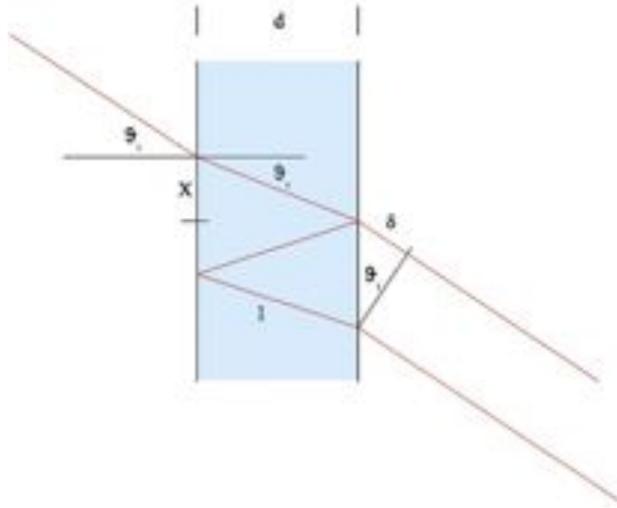


Figura 3.5: Sovrapposizione del fascio

Un altro fattore che incide sull'intensità del fascio laser è l'angolo fra esso e la normale alla superficie del PEM θ_i . Il raggio attraversa il cristallo del PEM, quindi attraversa due interfacce, in ognuna delle quali è riflesso e rifratto. Se il fascio incide perpendicolarmente o con un piccolo angolo rispetto la normale alla superficie, il raggio principale (quello che è stato semplicemente rifratto due volte) interferisce coi raggi che hanno subito due o più riflessioni. L'interferenza è costruttiva se i due fasci (nei calcoli se ne sono presi in considerazione solo due) sono sfasati di multipli di 2π o distruttiva se lo sono di multipli di π .

Come si può vedere dal disegno la differenza di cammino ottico tra i due raggi è data da $\Delta l = 3nl - (nl + \delta) = 2nl - \delta$ (n indice di rifrazione del mezzo). Quest'ultima espressione permette di ricavare l'espressione della fase relativa tra le due onde, ovvero

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l$$

Per trovare una funzione che interpolasse i dati si è dovuto esprimere tale fase, e quindi la differenza di cammino ottico, in funzione dell'angolo θ_i . Per

far ciò ci siamo serviti delle relazioni: $l = \frac{d}{\cos \theta_r}$, $x = l \sin \theta_r$, $\delta = 2x \sin \theta_i$,
 $\sin \theta_r = \frac{\sin \theta_i}{n}$

$$\begin{aligned} \Delta l &= 2nl - \delta = 2n \frac{d}{\cos \theta_r} - 2x \sin \theta_i = 2n \frac{d}{\cos \theta_r} - 2l \sin \theta_r \sin \theta_i = \\ &= 2n \frac{d}{\cos \theta_r} - 2 \frac{d}{\cos \theta_r} \frac{\sin^2 \theta_i}{n} \end{aligned}$$

Applicando le seguenti approssimazioni

$\cos \theta_r = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_r} \sim 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_r \sim 1 - \frac{\theta_r^2}{2}$, $\sin \theta_i \sim \theta_i$ e $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x$ si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta l &\sim 2 \frac{d}{1 - \frac{\theta_r^2}{2}} n - 2 \frac{d}{1 - \frac{\theta_r^2}{2}} \frac{\theta_i^2}{n} = 2 \frac{d}{1 - \frac{\theta_r^2}{2}} \left(n - \frac{\theta_i^2}{n} \right) \sim 2d \left(1 + \frac{\theta_r^2}{2n^2} \right) \left(n - \frac{\theta_i^2}{n} \right) \sim \\ &\sim 2d \left(n - \frac{\theta_i^2}{n} + \frac{\theta_i^2}{2n} \right) = 2d \left(n - \frac{\theta_i^2}{2n} \right) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\phi(\theta_i) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = \frac{4\pi d}{\lambda} \left(n - \frac{\theta_i^2}{2n} \right)$$

Ora che è stata trovata l'espressione della fase in funzione dell'angolo si può passare a calcolare l'espressione dell'intensità dovuta all'interferenza fra i due raggi

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \phi(\theta_i) = I_0 \cos^2 \frac{4\pi d}{\lambda} \left(n - \frac{\theta_i^2}{2n} \right)$$

Capitolo 4

RISULTATI OTTENUTI

4.1 L'ESTINZIONE

La prima misura effettuata in laboratorio è stata l'estinzione dei due polarizzatori, σ^2 . Per farlo abbiamo rilevato il voltaggio rilevato dal fotodiodo al variare dell'angolo fra i due polarizzatori.

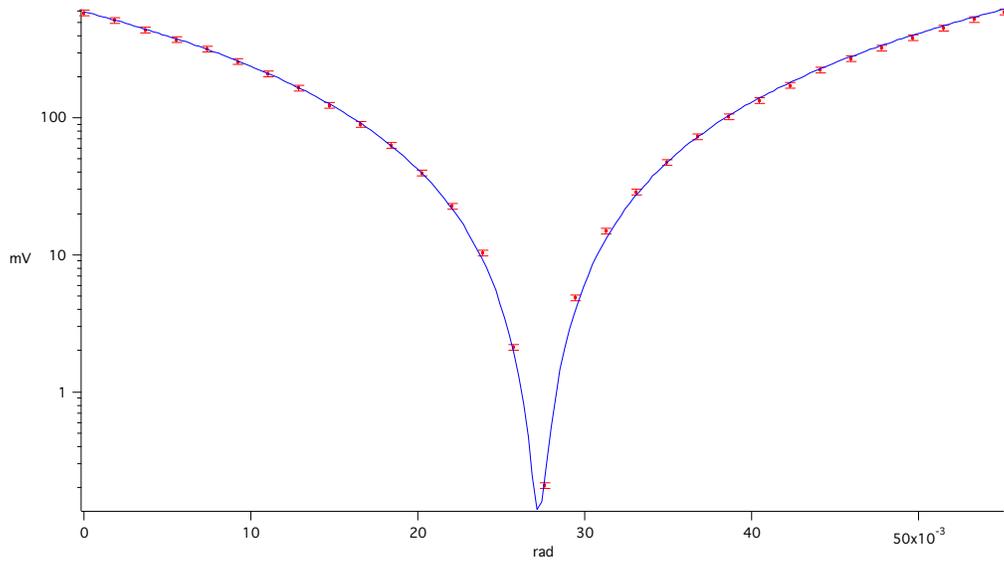


Figura 4.1: Grafico dell'estinzione

Il grafico è stato fittato dalla funzione

$$V(\theta) = I_0 \cdot \eta \cdot G(\sigma^2 + \sin(\theta - \theta_0))$$

in cui

$$I_0 \cdot \eta \cdot G = (800.63 \pm 7.42) \cdot 10^3 \text{ mV}$$

è l'intensità iniziale moltiplicata per l'efficienza e il guadagno del fotodiodo

$$\sigma^2 = (1.6 \pm 522) \cdot 10^{-7}$$

$$\theta_0 = (2.724 \pm 0.00267) \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Dai dati sopra elencati si nota che il valore dell'estinzione è

$$\sigma^2 = (1.6 \pm 522) \cdot 10^{-7}$$

4.2 LA RISONANZA

La seconda misura effettuata è stata quella della risonanza, in cui si è misurato il voltaggio rilevato dal fotodiodo al variare della frequenza di oscillazione del PEM. Dai dati presi in laboratorio è stata ricavata l'ellitticità in funzione della frequenza mostrata nel grafico sottostante.

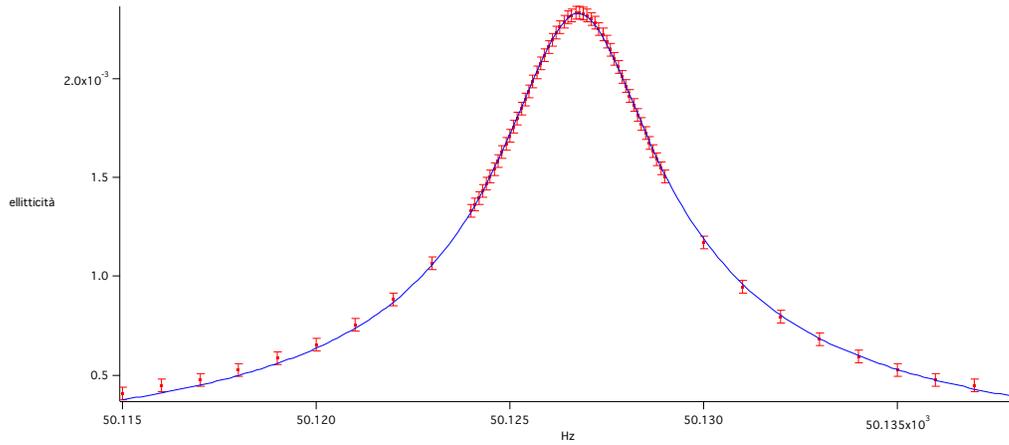


Figura 4.2: Grafico della risonanza

I dati ricavati sono stati interpolati dalla funzione

$$\eta(\omega) = \eta_{\omega_0} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}}$$

in cui

$$\eta_{\omega_0} = (2.329 \pm 0.003) \cdot 10^{-3}$$

$$\omega_0 = 50\,127.0 \pm 0.1 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 1.92 \pm 0.01 \text{ Hz}$$

Con questa misura si è trovato che la frequenza di risonanza del PEM è

$$50\,127.0 \pm 0.1 \text{ Hz}$$

Per ricavare Γ del PEM e quindi il suo tempo di decadimento τ basta raddoppiare l'ultimo coefficiente dell'equazione

$$\Gamma = 2\frac{\Gamma}{2} = 3.84 \pm 0.02 \text{ Hz} \rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma} = 0.260 \pm 0.001 \text{ s}$$

La frequenza di risonanza del PEM non resta costante nel tempo, ma deriva leggermente a causa della variazione di temperatura. Inoltre poiché le misure sono state fatte in aria e non nel vuoto la curva di risonanza appare più larga di quanto sia in realtà. Tutto ciò lo si può notare confrontando il

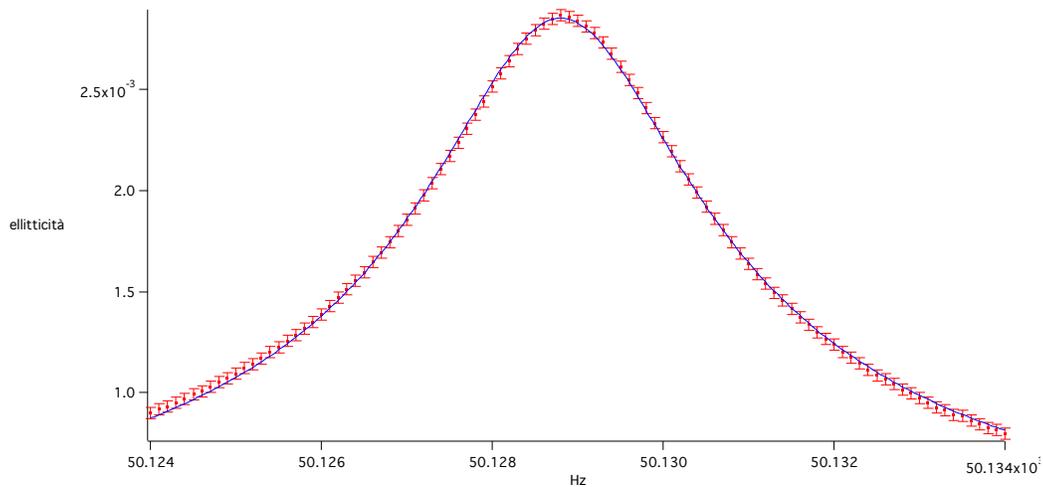


Figura 4.3: Grafico della risonanza

grafico in questa pagina (ottenuto con una misura effettuata precedentemente in un tempo maggiore) con il grafico precedente (ottenuto successiva con una misura più veloce).

Contemporaneamente alla seconda misura d'intensità è stata misurata anche la fase.

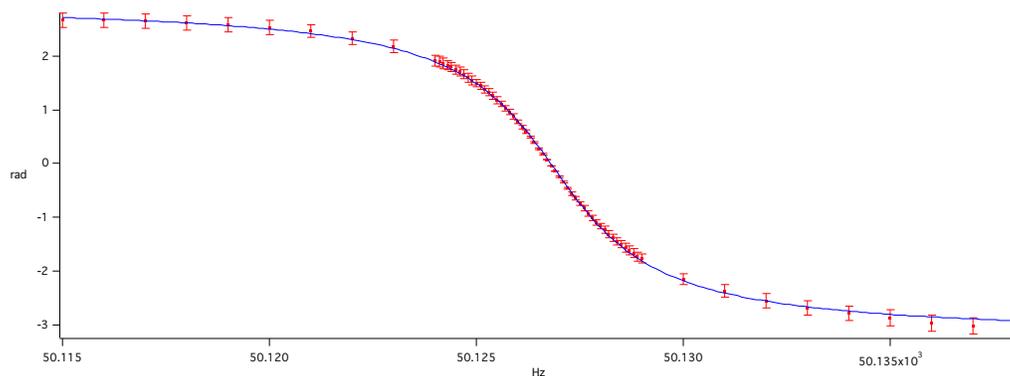


Figura 4.4: Grafico della fase

I dati sono stati interpolati dalla funzione

$$\phi = 2 \arctan \frac{\omega_0 - \omega}{\frac{\Gamma}{2}} + \phi_0$$

con

$$\omega_0 = 50\,127.0 \pm 0.1 \text{ Hz}$$

$$\frac{\Gamma}{2} = 1.84 \pm 0.01 \text{ Hz} \rightarrow \Gamma = 3.68 \pm 0.02 \text{ Hz}$$

$$\phi_0 = 0.12 \pm 0.01 \text{ rad}$$

Come si può notare dal grafico la differenza di fase fra le prime misure e le ultime è di 2π invece che π come ci si dovrebbe aspettare. Questo perché in questa presa-dati si è demodulato il segnale a $2\omega_{MOD}$.

4.3 LO SPETTRO DELLA MODULAZIONE D'AMPIEZZA

Per verificare l'esistenza delle componenti a $2\omega_{MOD}$ e $3\omega_{MOD}$ si è acquisito lo spettro del fascio che raggiunge il fotodiodo. Tale acquisizione è stata effettuata mediante un analizzatore di spettro. In esso si possono notare

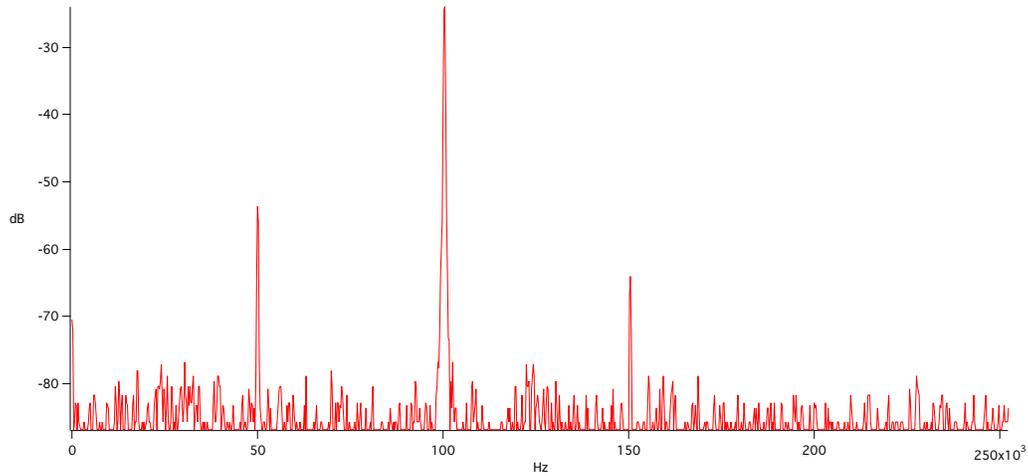


Figura 4.5: Spettro del fascio laser

facilmente i tre picchi alle frequenze ω_{MOD} , $2\omega_{MOD}$ e $3\omega_{MOD}$, ovvero 50 Hz, 100 Hz e 150 Hz. Misurando il valore dell'intensità degli ultimi due picchi si può calcolare il valore di ϵ

$$\epsilon = 2 \frac{A_3}{A_2} = 2[-64 \pm 0.1 \text{ dB} - (-24 \pm 0.1 \text{ dB})] = 2 \frac{0.63 \pm 0.18 \text{ mV}}{63.10 \pm 6.75 \text{ mV}} = (2 \pm 0.8) \cdot 10^{-2}$$

4.4 LA MODULAZIONE D'AMPIEZZA IN FUNZIONE DELL'ANGOLO

Quest'ultima misura è stata effettuata posizionando il PEM su una base girevole graduata con una precisione del primo d'arco. Questa precisione era però meramente teorica e per riuscire a ottenere dei dati si è dovuto riscaldare la base. In un primo momento è stato fatto dividendo la rotellina che azionava la base in sedicesimi di circonferenza. Purtroppo ciò non è stato sufficiente, nonostante la precisione delle misure fosse aumentata, per cui si è dovuto ripetere la misura riscaldando nuovamente la base. Ciò è stato effettuato misurando il diametro della manopolina che azionava la base, calcolandone la circonferenza e suddividendo quest'ultima in archi di un millimetro di lunghezza. In questo modo si è riusciti ad avere una precisione di $1.7 \cdot 10^{-4}$ rad. I dati ottenuti sono mostrati nel grafico sottostante.

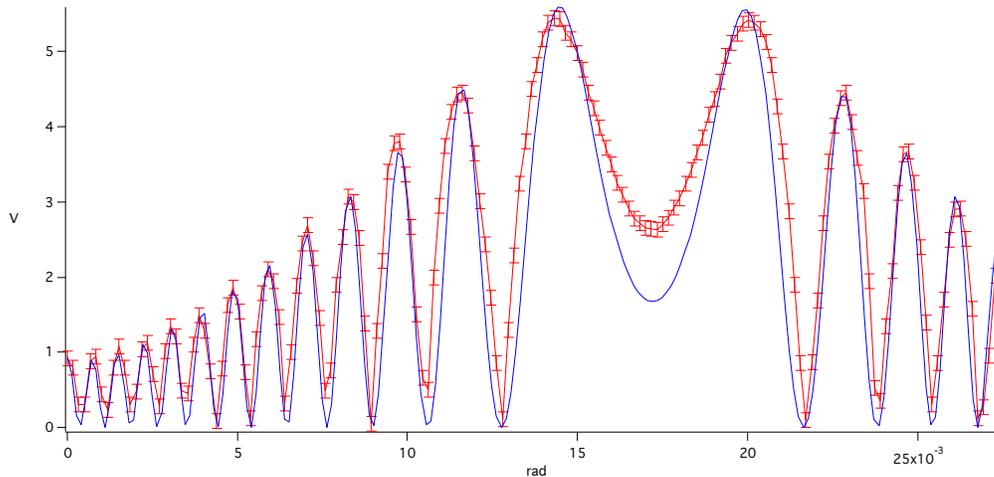


Figura 4.6: Voltaggio in funzione dell'angolo

Come mostrato precedentemente, l'andamento dell'intensità in funzione dell'angolo è spiegato dalla funzione

$$V(\theta) = I_0 \eta G \cos^2 \frac{4\pi d}{\lambda} \left(n - \frac{(\theta_i - \theta_0)^2}{2n} \right)$$

dove si è trovato che

$$\frac{4\pi d}{\lambda} = (3.8 \pm 0.07) \cdot 10^5$$

$$n = 1.45 \text{ (dal manuale del PEM)}$$

$$\theta_0 = (170.0 \pm 1.7) \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

In quest'ultima espressione però non si tiene conto del fatto che i due fasci laser che interferiscono fra loro sono gaussiani e che quindi $V(\theta)$ è modulata da una funzione che è l'intersezione di due gaussiane. Non conoscendo l'equazione che rappresenta questa intersezione, per modulare $V(\theta)$ è stata usata una funzione ricavata dall'interpolazione dei massimi relativi del grafico precedente:

$$f(\theta) = w_0 - w_1\theta + w_2\theta^2 - w_3\theta^3 + w_4\theta^4 - w_5\theta^5 + w_6\theta^6 - w_7\theta^7$$

in cui

$$w_0 = 0.950 \pm 0.625$$

$$w_1 = 132 \pm 950$$

$$w_2 = (1.41 \pm 4.55) \cdot 10^5$$

$$w_3 = (2.63 \pm 9.19) \cdot 10^7$$

$$w_4 = (2.89 \pm 9.23) \cdot 10^9$$

$$w_5 = (1.68 \pm 4.86) \cdot 10^{11}$$

$$w_6 = (4.66 \pm 1.28) \cdot 10^{13}$$

$$w_7 = (4.91 \pm 1.34) \cdot 10^{14}$$

Come si può vedere il grafico ha l'andamento di un coseno quadro traslato dell'angolo θ_0 modulato da una funzione che tende a zero per $|\theta|$ che tende a infinito.

Capitolo 5

CONCLUSIONI

Durante questo lavoro di tesi sono state eseguite misure volte alla caratterizzazione di un Modulatore di ellitticità risonante, in particolare per caratterizzare il fenomeno della risonanza e della modulazione dell'intensità in funzione dell'angolo fra la normale alla superficie del PEM e la direzione di propagazione del raggio.

Riguardo il primo effetto, è stato trovato che il PEM ha una frequenza di risonanza di $50\,127.0 \pm 0.1$ Hz e una ampiezza a metà altezza di 3.84 ± 0.02 Hz. Essa però non resta costante nel tempo ma varia leggermente, principalmente a causa di piccole variazioni di temperatura.

Per quanto riguarda il secondo effetto, invece, la questione è un po' più complicata. Esso è generato dall'interferenza fra due fasci laser, uno che viene semplicemente rifratto dalle superfici del vetro del PEM e l'altro che subisce due riflessioni interne. L'interferenza fra i due fasci può generare un aumento dell'intensità rilevata dal fotodiode. Ciò dipende dalla fase relativa fra i due raggi. Oltretutto si è trovato che l'effetto diminuisce con l'aumentare dell'angolo, poiché l'area di sovrapposizione dei due fasci (che va ricordato sono gaussiani e quindi non approssimabili con un'onda piana) diminuisce. Si nota infatti che l'ampiezza dei picchi indicanti interferenza costruttiva diminuiscono all'aumentare del modulo dell'angolo. Questo fenomeno può essere rappresentato dall'equazione

$$I(\theta) = I_0 f(\theta) \cos^2 \frac{4\pi d}{\lambda} \left(n - \frac{(\theta_i - \theta_0)^2}{2n} \right)$$

$$\text{con } f(\theta) = w_0 - w_1\theta + w_2\theta^2 - w_3\theta^3 + w_4\theta^4 - w_5\theta^5 + w_6\theta^6 - w_7\theta^7$$

Per eliminare il contributo dovuto all'interferenza dei due raggi basta ruotare il PEM di un opportuno angolo facendo in modo che i due raggi non si sovrappongano e non interferiscano.

Bibliografia

- [1] M. Bregant, G. Cantatore, S. Carusotto, R. Cimino, F. Della Valle, G. Di Domenico, U. Gastaldi, M. Karuza, V. Lozza, E. Milotti, E. Polacco, G. Raiteri, G. Ruoso, E. Zavattini, G. Zavattini - Limits on low energy photon-photon scattering from an experiment on magnetic vacuum birefringence
- [2] E. Hecht - Optics
- [3] F. S. Crawford Jr - La fisica di Berkley, onde e oscillazioni