



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

DIPARTIMENTO DI FISICA

CORSO DI LAUREA IN FISICA ED ASTROFISICA

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

**STUDIO DELLA
SENSIBILITÀ DI UN
ELLISSOMETRO OTTICO**

FABIO FEDOZZI

RELATORE: GUIDO ZAVATTINI

a mio nonno Umberto

INDICE:

1. Introduzione all'esperimento PVLAS
pag.: 3
2. Accenni di elettrodinamica quantistica
pag.: 9
3. Apparato sperimentale
pag.: 17
4. Metodo di misure
pag.: 21
5. Rumori e sensibilità dell'apparato
pag.: 29
6. Conclusioni
pag.: 41
7. Bibliografia
pag.: 43

1. Introduzione all'esperimento PVLAS

La chiave di tutte le scienze è senza dubbio il punto di domanda.

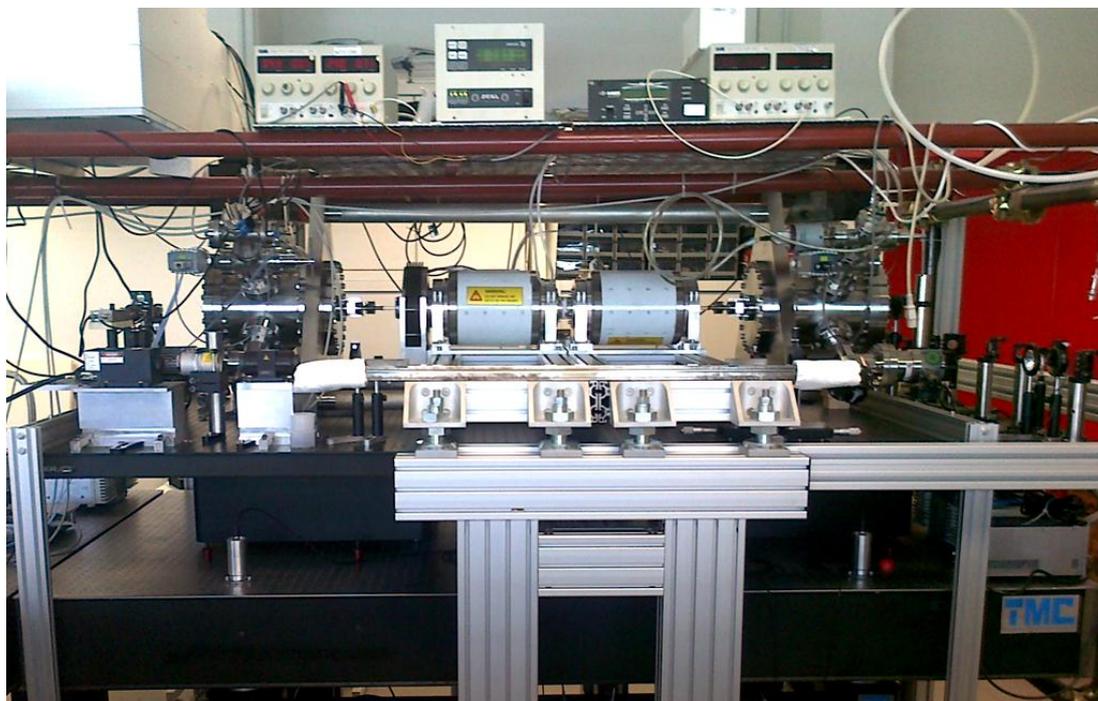
Dobbiamo la maggior parte di tutte le scoperte al "Come?"

e la saggezza nella vita consiste forse nel chiedersi,

a qualunque proposito, "Perché?".

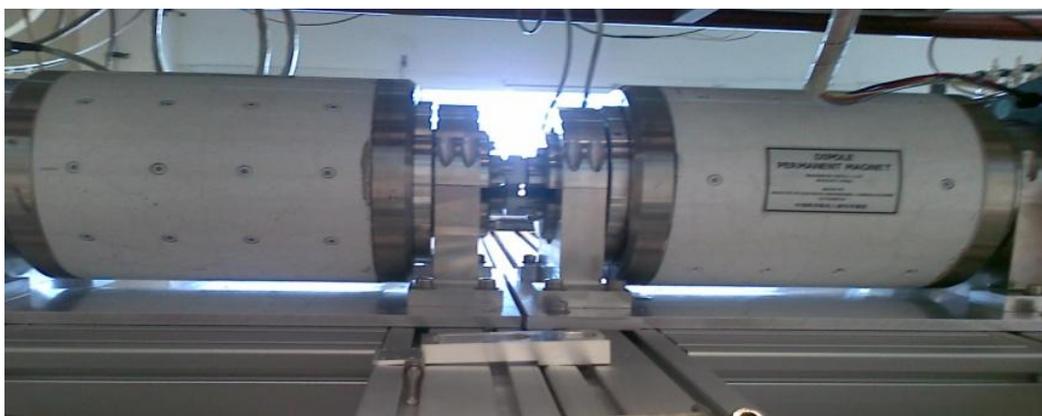
Honoré de Balzac (1799 - 1850), scrittore francese.

L'esperimento PVLAS (Polarizzazione del Vuoto con LASer) in corso nei laboratori di INFN dell'Università di Ferrara ha come obiettivo esaminare la natura e gli effetti non lineari del vuoto quantistico a circa 10^{-7} mbar. Lo scopo è studiare le proprietà magneto-ottiche del vuoto spinto ed in particolare l'interazione fotone-fotone di un fascio laser polarizzato linearmente che scorre al suo interno.



© figura 1A - apparato sperimentale PVLAS a Ferrara ☺

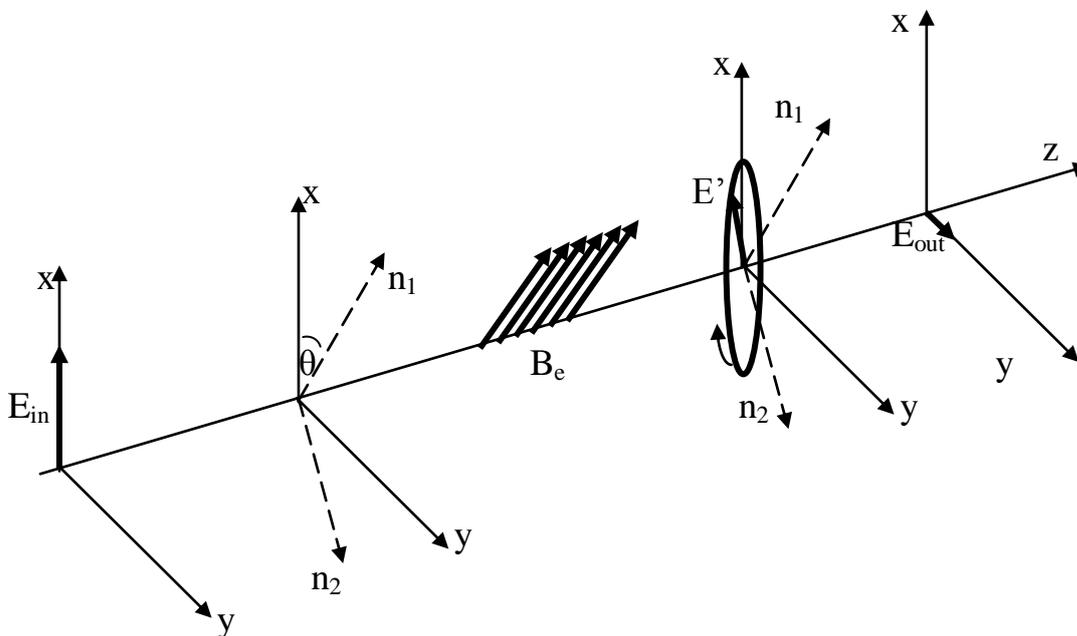
Per il compimento di tale esperimento si è dovuta realizzare una cavità di Fabry-Pèrot in vuoto ad alta finezza al fine di aumentare notevolmente il percorso ottico del fascio luminoso con circa $2 \cdot 10^5$ riflessioni. Il fascio laser risulta percorrere un totale di un centinaio di Km in vuoto. La sorgente del fascio luminoso è un laser ad infrarosso Nd:YAG con lunghezza d'onda $\lambda = 1064$ nm e con una potenza di 200 mW. L'intera cavità a vuoto è sotto gli effetti di un potente campo magnetico di 2.4 T esterno ruotante con asse perpendicolare all'asse di propagazione del fascio luminoso, come mostrato in figura 1B.



☉ figura 1B – magneti permanenti, esperimento PVLAS ☉

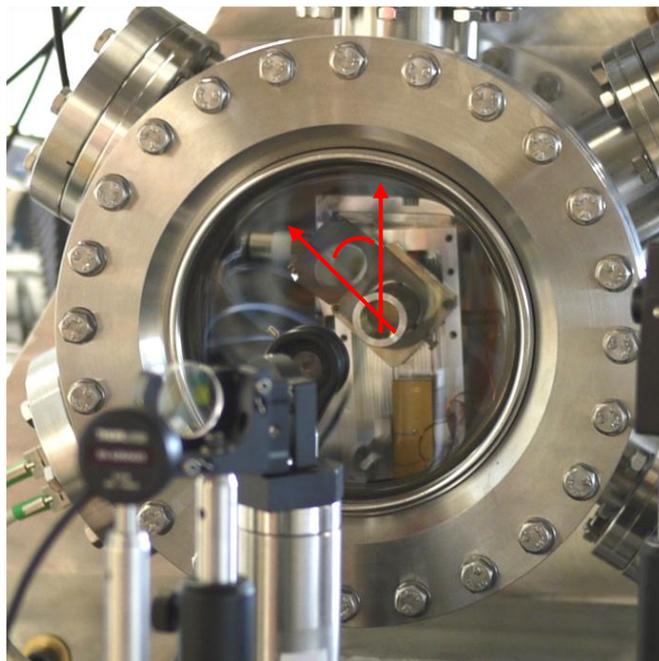
Gli effetti vengono rilevati misurando la minima ellitticità di polarizzazione del fascio laser, cioè il rapporto fra i due semiassi dell'ellisse, indotta dal campo magnetico. Come è previsto dalle teorie di elettrodinamica quantistica essa è dovuta alla minima birifrangenza magnetica del vuoto, cioè la differenza dell'indice di rifrazione in due diverse direzioni del mezzo. Per queste misure è stato necessario servirsi di un ellissometro formato da due polarizzatori con assi perpendicolari fra loro posti alle estremità del sistema ottico, tale da esaminare solo la minima

porzione di luce con polarizzazione perpendicolare a quella in ingresso, E_{out} , come in figura 1C.



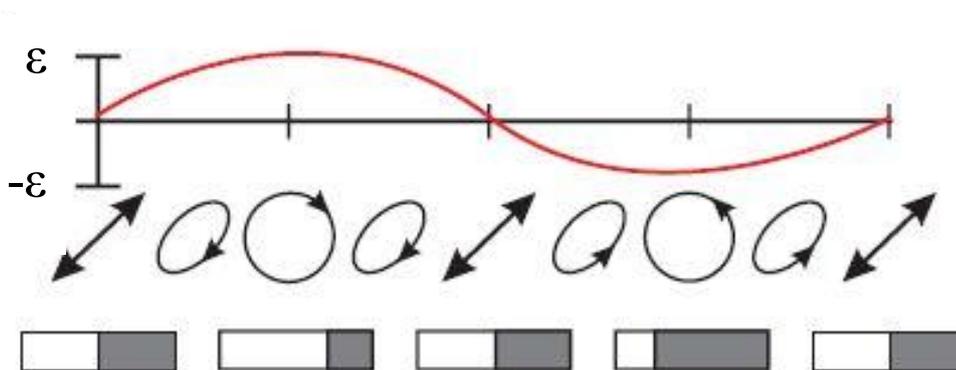
© figura 1C – risultante delle polarizzazioni lungo il cammino ottico ☺

Dopo la cavità di Fabry-Pèrot è posizionato un PEM (PhotoElastic Modulator), orientato con l'asse posto a 45° dall'asse di polarizzazione del fascio in entrata, figura 1D, ottenendo di conseguenza il massimo di modulazione di ellitticità della radiazione elettromagnetica. Il modulatore fotoelastico, inventato da J. Badoz negli anni '60, è costituito da un trasduttore piezoelettrico che oscilla nella regione degli ultrasuoni a frequenza di circa 50 KHz e da una placca trasparente risonante fatta di fused silica.



© figura 1D – PhotoElastic Modulator, esperimento PVLAS ☺

L'utilizzo del PEM è necessario per fornire uno stress periodico lungo una precisa direzione del cristallo di fused silica, sfruttandone le proprietà elastiche dello stesso. L'onda sinusoidale inviata al piezoelettrico oscilla alla frequenza di risonanza del cristallo.



© figura 1E – effetto del PhotoElastic Modulator su una lunghezza d'onda ☺

Ciò implica una variazione periodica dell'indice di rifrazione n del cristallo di fused silica lungo quella direzione, caratteristica dell'effetto di

birifrangenza. Infatti, quando la lamina di fused silica viene compressa la componente parallela all'asse del modulatore viaggia a velocità maggiore della componente ortogonale. Avviene, invece, il contrario quando la lamina si allunga. Lo sfasamento del campo elettrico della radiazione luminosa lungo le due direzioni ortogonali fra loro è funzione del tempo, in questo modo si modifica l'ellitticità del fascio in uscita dal modulatore ottenendo l'effetto cercato.

Installando il modulatore fra due polarizzatori con assi di polarizzazione perpendicolari fra loro è possibile valutare soltanto la minima porzione di radiazione polarizzata ellitticamente dal sistema.

Nell'esperimento PVLAS in corso nei laboratori dell'INFN di Ferrara la differenza di indici di rifrazione parallela e perpendicolare al campo magnetico è $\Delta n = 2 \cdot 10^{-23}$, avendo installato due magneti di intensità 2.4 T, vedi paragrafo 2.

2. Accenni di elettrodinamica quantistica

Quando le leggi della matematica si riferiscono alla realtà non sono certe e, quando sono certe, non si riferiscono alla realtà.

Albert Einstein (1879-1955), fisico tedesco.

Lo scattering fotone-fotone considerato in questo esperimento è di carattere non lineare ed è descritto da una correzione sulla Lagrangiana classica dell'elettromagnetismo

$$\mathcal{L}_{\text{CL}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad [2.1]$$

dal termine:

$$\mathcal{L}_{\text{EHW}} = \frac{A_E}{\mu_0} \left[\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right)^2 + 7 \left(\frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B} \right)^2 \right]. \quad [2.2]$$

$$\text{con } A_E = \frac{2\alpha^2}{45\mu_0} \frac{\lambda_e^3}{m_e c^2} = 1.32 \cdot 10^{-24} \text{ T}^2$$

e i fattori: $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$: costante dielettrica nel vuoto,

$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$: permeabilità magnetica nel vuoto.

$\alpha = 7.297 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{J}^{-1}$: costante di struttura fine,

$\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 0.38 \cdot 10^{-12} \text{ m}$: lunghezza d'onda di Compton per

elettroni tagliata,

$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$: massa dell'elettrone,

$c = 299.8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$: velocità della luce.

La correzione \mathcal{L}_{EHW} è valida considerando campi elettrici e magnetici molto inferiori ai cosiddetti “valori critici”:

$$E \ll E_{\text{crit}} = \frac{m^2 c^3}{e\hbar} = 1.3 \cdot 10^{18} \text{ V/m}$$

$$B \ll B_{\text{crit}} = \frac{m^2 c^2}{e\hbar} = 4.4 \cdot 10^9 \text{ T},$$

regime in cui i campi non sono sufficientemente potenti da liberare coppie di e^+ e e^- .

Considerando la Lagrangiana completa dell'elettrodinamica quantistica in vuoto, cioè perturbata, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{CL}} + \mathcal{L}_{\text{EHW}} = \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} - \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{A_E}{\mu_0} \left[\left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right)^2 + 7 \left(\frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad [2.3]$$

Dall'espressione della Lagrangiana ottenuta, si può quindi ricavare la forma del vettore induzione dielettrica \vec{D} e del vettore campo magnetico \vec{H} , considerando le equazioni costitutive:

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} \quad [2.4]$$

$$\vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}} \quad [2.5]$$

Nel caso dell'equazione della Lagrangiana classica non corretta [2.1] si ottengono i vettori di induzione dielettrica \vec{D} e del campo magnetico in presenza di dielettrici \vec{H} , senza alcuna variazione, cioè caratteristici del vuoto:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad [2.6]$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad [2.7]$$

Considerando la Lagrangiana completa del fattore di perturbazione non lineare proporzionale ad A_E , svolgendo tutti i semplici calcoli algebrici e tralasciando i passaggi intermedi si ottengono due equazioni come le seguenti:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \frac{A_E}{\mu_0} \left[\frac{4}{c^2} \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \vec{E} + \frac{14}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right] \quad [2.8]$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \frac{A_E}{\mu_0} \left[4 \left(\frac{E^2}{c^2} - B^2 \right) \vec{B} - \frac{14}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{E} \right] \quad [2.9]$$

Avendo la presenza influente di un potente campo magnetico esterno \vec{B}_{ext} dovuto ai due magneti rotanti all'esterno della cavità, bisogna

considerare la sovrapposizione vettoriale dei campi elettromagnetici: quelli dovuti al flusso luminoso e il suddetto campo esterno \vec{B}_e .

In definitiva le formule [2.8] e [2.9] devono essere cambiate e al loro interno i termini \vec{E} e \vec{B} devono includere tutti i campi presenti nel sistema:

$$\vec{E} = \vec{E}_r \quad [2.10]$$

$$\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_e \quad [2.11]$$

dove $|\vec{B}_r| \ll |\vec{B}_e|$. Ciò dà la possibilità di approssimare le formule qui di seguito ed eliminare i termini di \vec{B}_r oltre il primo ordine, poiché ininfluenti ai fini dei risultati.

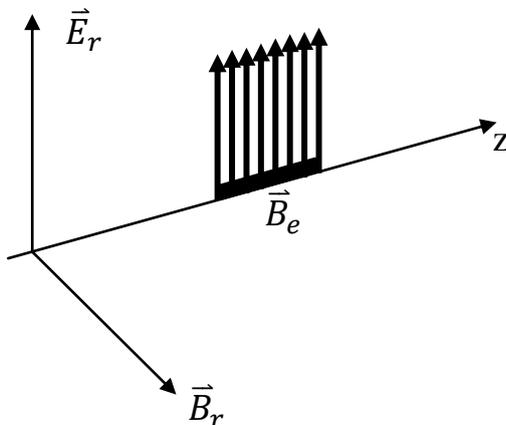
Si ottengono quindi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_r + \frac{A_E}{\mu_0} \left[\frac{4}{c^2} \left(\frac{E_r^2}{c^2} - B_e^2 \right) \vec{E}_r + \frac{14}{c^2} (\vec{E}_r \cdot \vec{B}_e) \vec{B}_e \right] \quad [2.12]$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_e + \vec{B}_r}{\mu_0} + \frac{A_E}{\mu_0} \left[4 \left(\frac{E_r^2}{c^2} - B_e^2 \right) (\vec{B}_e + \vec{B}_r) - \frac{14}{c^2} (\vec{E}_r \cdot \vec{B}_e) \vec{E}_r \right] \quad [2.13]$$

Ora bisogna analizzare le due possibili direzioni del campo magnetico esterno \vec{B}_e in relazione all'asse di propagazione del fascio luminoso e di conseguenza ai campi \vec{E}_r e \vec{B}_r , così da poter valutare i prodotti scalari nelle relazioni 2.12 e 2.13. In tal modo è possibile rilevare le quantità ε_r e μ_r .

Con \vec{B}_e parallelo a \vec{E}_r e quindi \vec{B}_e perpendicolare a \vec{B}_r , come in figura 2A,



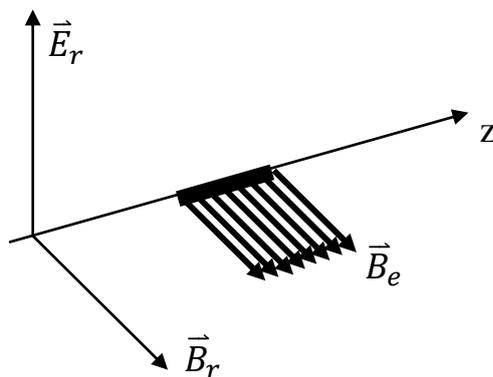
☉ figura 2A — una possibile direzione del campo magnetico esterno ☉

si ottengono:

$$\epsilon_r^{\parallel} = \frac{D}{E_r \epsilon_0} = 1 + 10A_E B_e^2 \quad [2.14]$$

$$\mu_r^{\parallel} = \frac{B_e + B_r}{H \mu_0} = \frac{1}{1 - 4A_E B_e^2} \approx 1 + 4A_E B_e^2 \quad [2.15]$$

Con \vec{B}_e perpendicolare a \vec{E}_r e \vec{B}_e parallelo a \vec{B}_r , come in figura 2B,



☉ figura 2B — una possibile direzione del campo magnetico esterno ☉

si ottiene:

$$\varepsilon_r^\perp = \frac{D}{E_r \varepsilon_0} = 1 - 4A_E B_e^2 \quad [2.16]$$

$$\mu_r^\perp = \frac{B_e + B_r}{H \mu_0} = \frac{1}{1 - 12A_E B_e^2} \approx 1 + 12A_E B_e^2 \quad [2.17]$$

Sfruttando le relazioni fra le costanti elettrodinamiche relative ε_r e μ_r e la velocità della luce c :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad [2.18]$$

si può risalire ai coefficienti di rifrazione del vuoto birifrangente nelle due diverse direzioni:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_r^\parallel \mu_r^\parallel} = \sqrt{(1 + 10A_E B_e^2)(1 + 4A_E B_e^2)} \approx 1 + 7A_E B_e^2 \quad [2.19]$$

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon_r^\perp \mu_r^\perp} = \sqrt{(1 - 4A_E B_e^2)(1 + 12A_E B_e^2)} \approx 1 + 4A_E B_e^2. \quad [2.20]$$

Dalle espressioni [2.19] e [2.20] si può capire come l'effetto di birifrangenza induca una differenza fra le velocità della radiazione luminosa all'interno del vuoto e si ottiene quindi una birifrangenza

$$\Delta n = n_1 - n_2 = 3A_E B_e^2. \quad [2.21]$$

Si viene a creare, quindi, una differenza di fase φ fra le due diverse direzioni di polarizzazione:

$$\varphi = \frac{2\pi L}{\lambda} (n_1 - n_2) \quad \mathbf{[2.22]}$$

con L che rappresenta la lunghezza del cammino ottico percorso nella regione di sfasamento, mentre λ è la lunghezza d'onda del fascio luminoso.

Nell'esperimento PVLAS con lunghezza dei magneti $l = 40$ cm si ha una lunghezza efficace all'interno del campo magnetico $L = 80$ Km. Lo sfasamento indotto con un campo magnetico di 2.4 T è $\varphi = 10^{-11}$ rad.

3. Apparato sperimentale

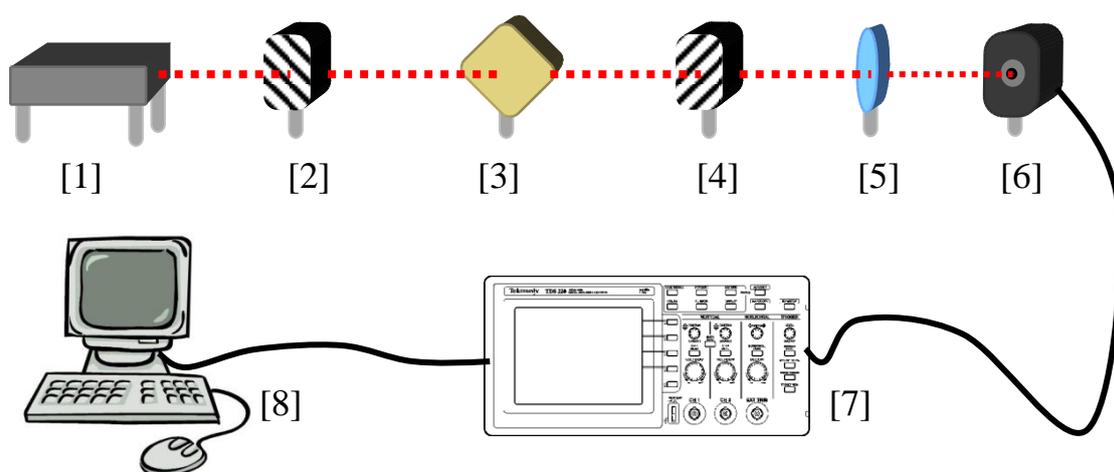
Un giorno le macchine riusciranno a risolvere tutti i problemi,

ma mai nessuna di esse potrà porne uno.

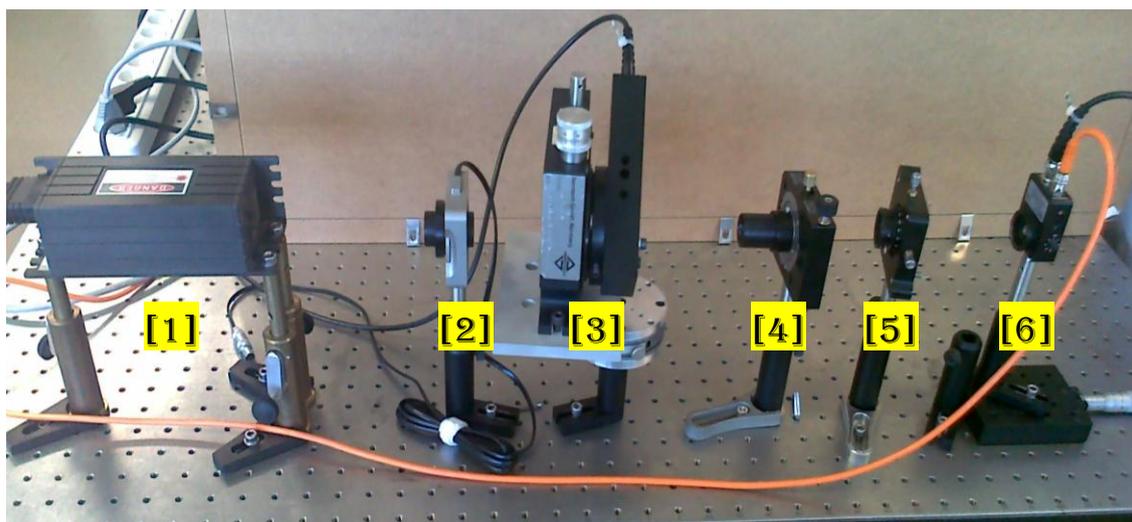
Albert Einstein (1879-1955), fisico tedesco.

L'apparato sperimentale usato per le misurazioni successivamente riportate è basato sullo schema dell'esperimento PVLAS presso il laboratorio di Ferrara dell'INFN. Il percorso ottico del fascio luminoso è simile all'esperimento PVLAS, ma più semplificato e in aria. Infatti, non c'è la presenza della cavità risonante di Fabry-Pèrot e del campo magnetico rotante esterno di 2.4 T.

La struttura è composta da un unico banco ottico dove vi sono fissati tutti gli strumenti necessari per le misurazioni successivamente descritte, come rappresentato in figura 3A e 3B.



© figura 3A – rappresentazione della strumentazione sul banco ottico ☺



© figura 3B – strumentazione sul banco ottico ☺

Il primo strumento è un laser a infrarosso Nd:YAG [1] con lunghezza d'onda $\lambda = 1064$ nm e potenza $W = 10$ mW il cui fascio si propaga in aria.



© figura 3C – laser ☺

Successivamente, proseguendo lungo il fascio ottico, è posizionato un primo polarizzatore [2], in grado di polarizzare linearmente la luce incidente, tralasciando la restante porzione di luce polarizzata diversamente.



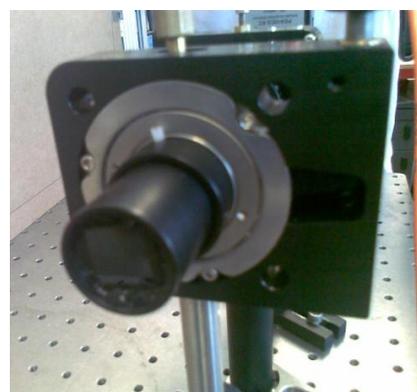
© figura 3D – primo polarizzatore ☺

Il fascio prosegue all'interno di un PEM (Photo-Elastic Modulator) [3], posizionato ad un angolo di 45° dal fascio laser incidente. Esso modula il segnale a frequenza di risonanza di 50KHz.



© figura 3E – PEM ☹

Al fine di ottimizzare le misurazioni ed aumentare l'efficienza del fotodiodo sono stati inseriti dopo il modulatore un secondo polarizzatore [4] e una lente convergente di lunghezza focale 70 mm [5]. Il primo è stato posizionato al fine di lavorare sempre in estinzione e di selezionare solo la componente polarizzata perpendicolarmente al fascio in ingresso.



© figura 3F – secondo polarizzatore ☹

La seconda, invece, è usato per convogliare tutto il fascio laser all'uscita del secondo polarizzatore in un unico punto, al centro della porzione sensibile del foto-rilevatore. La scelta di usare fotorilevatori piccoli, invece di altri dove la porzione sensibile è sufficiente a ricevere il fascio laser, è dovuta al minor rumore intrinseco riscontrato con questo tipo di sensori.



© figura 3F – secondo polarizzatore ☹

Infine è posizionato il detector del segnale luminoso [6] collegato agli strumenti di misura del segnale elettrico. Per queste misurazioni sono stati usati due tipi di fotodiodi al fine di verificare l'efficienza e la sensibilità di questi ultimi nell'apparato sopra descritto.

☉ figura 3H — a sinistra fotodiodo InGaAs, banda IR, con amplificatore fisso a $G = 10^7$ V/A;
a destra fotodiodo InGaAs, banda IR, con amplificatore variabile settato a $G = 4.75 \cdot 10^5$ V/A ☉



I segnali elettrici in uscita dai due diversi fotodiodi vengono poi mandati ad un analizzatore di segnale [7], per poi essere elaborati a computer [8]. L'analizzatore di segnale è fondamentale, poiché è in grado di scomporre il segnale elettrico in tutte le sue armoniche in serie di Fourier. La scomposizione permette, quindi, di esaminare singolarmente l'intensità delle prime due armoniche efficaci del segnale elettrico e soprattutto del rumore di fondo presente al suo interno, scopo delle misure seguenti.

4. Metodo di misure

La scienza è fatta di dati come una casa di pietre.

Ma un ammasso di dati non è scienza

più di quanto un mucchio di pietre sia una casa.

Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), matematico francese.

Per i calcoli dello stato di polarizzazione e quindi di intensità del fascio luminoso all'uscita del secondo polarizzatore è utile servirsi del linguaggio matriciale attraverso i vettori di Jones, inventati dallo stesso Robert Clark Jones nel 1941. Si possono rappresentare i singoli componenti del sistema ottico di figura 4A tramite le suddette matrici, poiché la luce incidente è monocromatica:

➤ Direzione campo elettrico dopo primo polarizzatore: $\vec{E}_{in} = E_{in} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

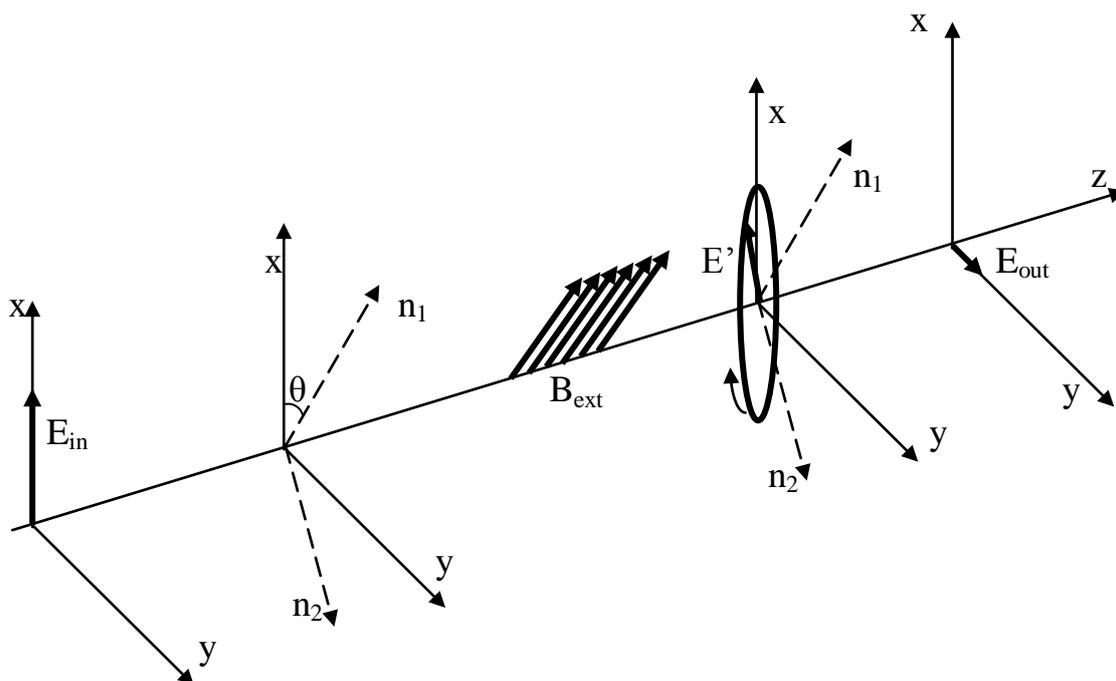
➤ Birifrangenza del vuoto:

$$\mathbf{BF} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

con θ = angolo fra l'asse n_1 e l'asse x , come in figura 4A

➤ Modulatore: $\mathbf{MOD} = \begin{pmatrix} 1 & i\eta(t) \\ i\eta(t) & 1 \end{pmatrix}$

➤ Secondo polarizzatore: $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



◉ figura 4A – risultante delle polarizzazioni lungo il cammino ottico ◉

In tal modo il campo elettrico del fascio laser subisce molte variazioni prima di giungere sul fotorilevatore definito dalla composizione di tutti gli effetti lungo il percorso ottico:

$$\overrightarrow{E_{out}} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{MOD} \cdot \mathbf{BF} \cdot \overrightarrow{E_{in}} \tag{4.1}$$

Prima di calcolare direttamente l'intensità del campo elettrico uscente dal sistema, conviene calcolare singolarmente la matrice **BF**, poiché è possibile approssimare alcuni termini molto piccoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{BF} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta e^{i\varphi/2} + \sin^2 \theta e^{-i\varphi/2} & \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi/2} - \cos \theta \sin \theta e^{-i\varphi/2} \\ \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi/2} - \cos \theta \sin \theta e^{-i\varphi/2} & \cos^2 \theta e^{-i\varphi/2} + \sin^2 \theta e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilizzando le formule di duplicazione degli angoli.

$$\mathbf{BF} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}}{2} + \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2} \cos 2\theta & \sin 2\theta \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2} \\ \sin 2\theta \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2} & \frac{e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}}{2} - \cos 2\theta \frac{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}}{2} \end{pmatrix}$$

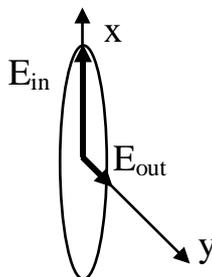
Utilizzando le formule goniometriche di angoli complessi.

$$\mathbf{BF} = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 + i \cos 2\theta \sin \varphi/2 & i \sin 2\theta \sin \varphi/2 \\ i \sin 2\theta \sin \varphi/2 & \cos \varphi/2 - i \cos 2\theta \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$$

Essendo $\varphi/2 \ll 1$ si può approssimare: $\cos \varphi/2 \simeq 1$ e $\sin \varphi/2 \simeq \varphi/2$.

$$\mathbf{BF} \simeq \begin{pmatrix} 1 + i \varphi/2 \cos 2\theta & i \varphi/2 \sin 2\theta \\ i \varphi/2 \sin 2\theta & 1 - i \varphi/2 \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Infine essendo l'ellitticità definita come $\psi = \varphi/2$, cioè il rapporto fra E_{out} ed E_{in} , come in figura 4C:



© figura 4C – ellitticità del campo elettrico ☺

$$\mathbf{BF} = \begin{pmatrix} 1 + i\psi \cos 2\theta & i\psi \sin 2\theta \\ i\psi \sin 2\theta & 1 - i\psi \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad [4.2]$$

Il campo elettrico uscente dal sistema che viene rilevato dal fotodiodo è quindi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}_{out} &= E_{in} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i\eta(t) \\ i\eta(t) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 + i\psi \cos 2\theta & i\psi \sin 2\theta \\ \psi \sin 2\theta & 1 - i\psi \cos 2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{in} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi \sin 2\theta + i\eta(t) + i\eta(t)\psi \cos 2\theta \end{pmatrix} \simeq \\ &\simeq E_{in} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i\psi \sin 2\theta + i\eta(t) \end{pmatrix} \quad [4.3] \end{aligned}$$

Si può calcolare l'intensità luminosa portata dalla radiazione sul rivelatore:

$$\begin{aligned} I_{out}(t) &\approx |\overrightarrow{E}_{out}|^2 = I_{in} |i\psi \sin 2\theta + i\eta(t) + i\eta(t)\psi \cos 2\theta|^2 \\ &\simeq I_{in} [\eta(t)^2 + 2\eta(t)\psi \sin 2\theta] \quad [4.4] \end{aligned}$$

In questo modo è stato dimostrato che l'intensità luminosa dipende linearmente dall'ellitticità ψ , la quale è stata misurata per due fotodiodi differenti e i risultati sono presentati nei paragrafi seguenti. È importante considerare nel calcolo dell'intensità luminosa percepita dal fotodiodo anche il fattore di estinzione σ^2 , essa dovuta alla presenza dei due polarizzatori non ideali con assi perpendicolari fra loro. Inoltre non deve essere scordato un termine riferito ad alcune birifrangenze interne del sistema sempre presenti, α^2 : esso è molto piccolo e variabile molto lentamente nel tempo, quindi può essere sommato algebricamente alle altre ellitticità nella formula 4.3. Il fattore α^2 è importante per l'andamento 1/f del picco A di figura 4D.

I due fattori σ^2 e α^2 sono facilmente calcolabili, quindi si possono introdurre nell' equazione 4.4, che diventa:

$$I_{\text{out}}(t) = I_{\text{in}} [\sigma^2 + \eta(t)^2 + \alpha^2 + 2\eta(t)\psi \sin 2\theta(t) + 2\alpha(t)\eta(t)] \quad [4.5]$$

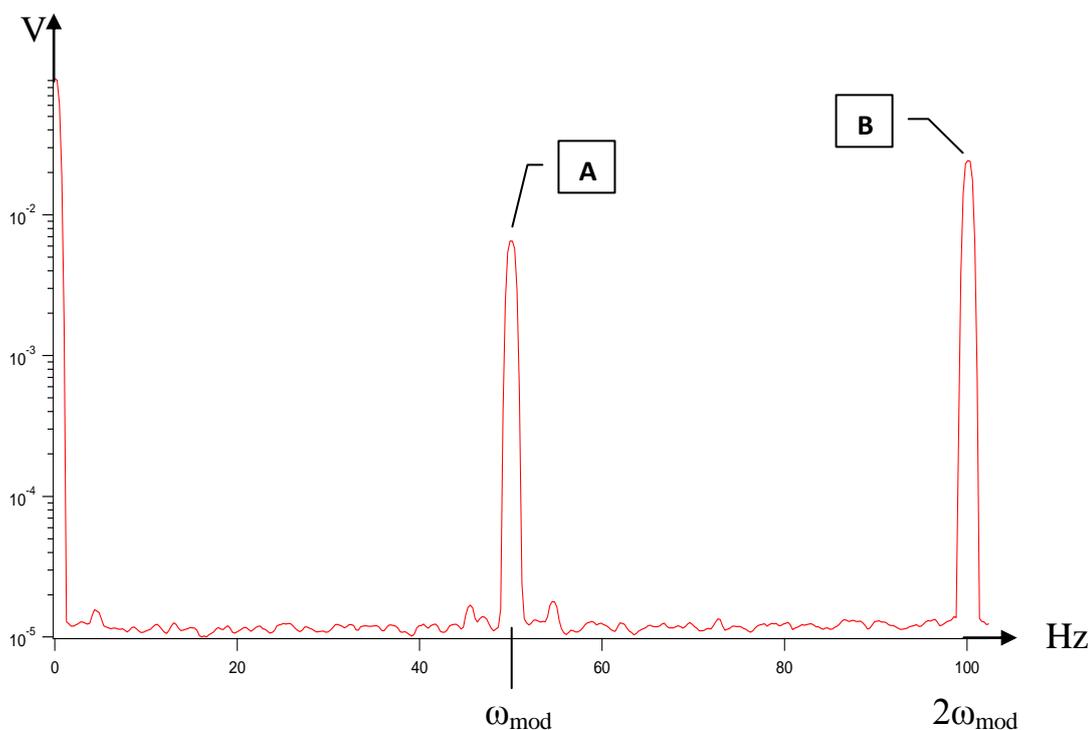
La modulazione $\eta(t)$ è una funzione sinusoidale variabile nel tempo,

$$\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega_{\text{mod}}t + \theta_{\text{mod}}) \quad [4.6]$$

e la direzione del campo magnetico esterno è funzione del tempo,

$$\theta(t) = \Omega_{\text{mag}}t. \quad [4.7]$$

Di conseguenza nel calcolo dell'intensità è necessaria una trasformata di Fourier ottenuta tramite un analizzatore di segnali, dove sono particolarmente importanti le prime due armoniche, ω_{mod} e $2\omega_{\text{mod}}$, come evidenziato in figura 4D dai picchi A e B:



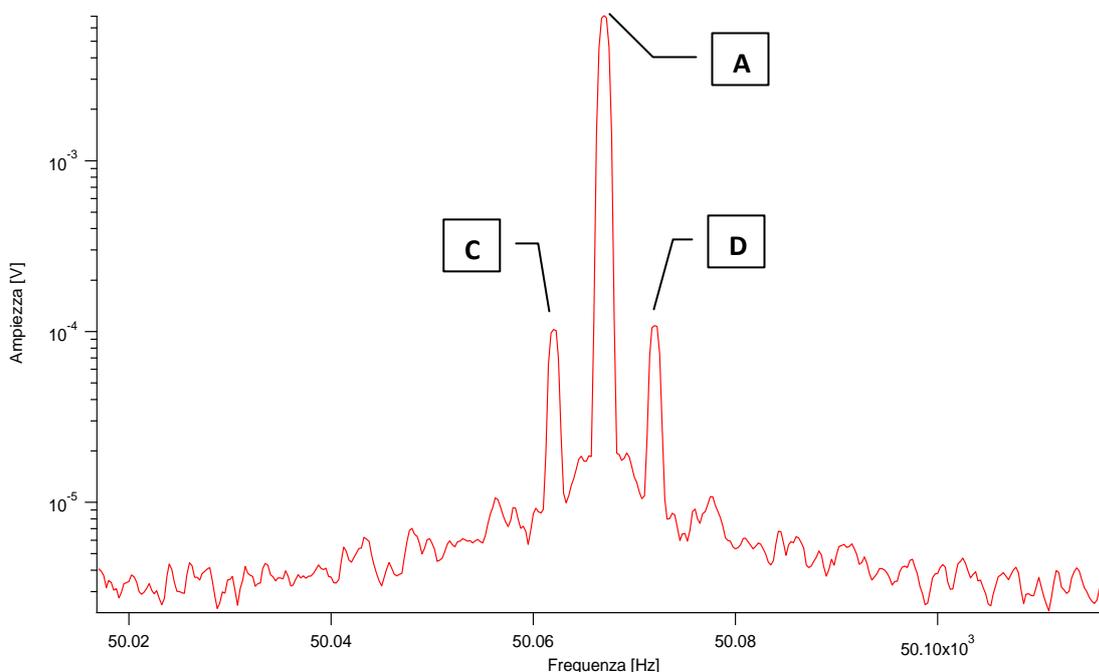
© figura 4D – trasformata di Fourier del segnale in uscita dal fotodiodo ☺

Il picco “A” rappresenta la prima armonica del segnale, cioè quella a frequenza di risonanza del PEM, circa a 50 KHz. Il secondo picco, “B”, è a frequenza doppia rispetto a quella di risonanza del modulatore: essa è dovuta alla piccolissima quantità di modulazione η^2 che nei calcoli dell’ $I_{out}(t)$ ed approssimando le quantità trascurabili, introduce un termine in $2\omega_{mod}$ attraverso le formule trigonometriche:

$$\eta^2(t) = \eta_0^2 \cdot \cos^2(\omega_{mod}t) = \frac{\eta_0^2}{2} [1 + \cos(2\omega_{mod}t)] \quad [4.8]$$

Analizzando meglio lo spettro nell’intorno del picco “A” a frequenza 50 KHz si possono notare due picchi secondari a frequenza $(\omega_{mod} \pm 2\Omega)$ come in figura 4E. Essi sono dovuti al termine del doppio prodotto $2\eta(t)\psi(t)$ che sviluppandolo diventa:

$$\begin{aligned} 2\eta(t)\psi(t) &= 2\psi_0\eta_0 \cos(\omega_{mod}t) \cos(2\Omega t) = \\ &= \psi_0\eta_0 \{ \cos[(\omega_{mod} + 2\Omega)t] + \cos[(\omega_{mod} - 2\Omega)t] \} \end{aligned} \quad [4.9]$$



© figura 4E – trasformata di Fourier del segnale in uscita dal fotodiode ©

I picchi “C” e “D” rappresentano il segnale da misurare al di sopra del rumore di fondo presente nel sistema ed essi sono entrambi nelle misurazioni di ellitticità dei singoli rumori del segnale elettrico. Infatti:

$$\psi_{segnale} = \frac{\eta_0 I_{\omega_{mod}+2\Omega}}{2 I_{2\omega_{mod}}} = \frac{\eta_0 I_{\omega_{mod}+2\Omega}}{2 I_0 \frac{\eta_0^2}{2}} = \frac{I_{\omega_{mod}+2\Omega}}{I_0 \eta_0} \quad [4.10]$$

dove: $I_0 = W_0 \cdot q \cdot G$: corrente in uscita dal fotodiode
 $W_0 = 8.7 \text{ mW}$: potenza fascio laser in estinzione senza PEM
 q : efficienza del fotodiode ($q_1 = 0.64 \text{ A/W}$; $q_2 = 0.68 \text{ A/W}$)
 G : fattore di guadagno dell’amplificatore ($G_1 = 10^7 \text{ V/A}$ e $G_2 = 4.75 \cdot 10^5$)

Infine si riporta una tabella dove è possibile quantificare le intensità delle armoniche rilevanti delle misurazioni:

Frequenza	Componente di Fourier	Intensità/ I_0	Fase
dc	I_{dc}	$\sigma^2 + \alpha_{dc}^2 + \eta_0^2/2$	_____
ω_{mod}	$I_{\omega_{mod}}$	$2\alpha_{dc}\eta_0$	θ_{mod}
$\omega_{mod} \pm 2\Omega_{mag}$	$I_{\omega_{mod} \pm 2\Omega_{mag}}$	$\eta_0\psi$	$\theta_{mod} \pm 2\theta_{mag}$
$2\omega_{mod}$	$I_{2\omega_{mod}}$	$\eta_0^2/2$	$2\theta_{mod}$

⊕ tabella 1 – armoniche trasformata di Fourier segnale elettrico ⊖

5. Rumori e sensibilità dell'apparato

La ricerca in fisica ha mostrato, al di là di ogni dubbio, che l'elemento comune soggiacente alla coerenza che si osserva nella stragrande maggioranza dei fenomeni, la cui regolarità e invariabilità hanno consentito la formulazione del postulato di causalità, è il caso.

Erwin Schrödinger (1887- 1961), fisico e matematico austriaco

Il termine rumore, in questo caso, rappresenta qualsiasi segnale che varia in funzione del tempo in maniera imprevedibile e irregolare. Esso deve essere studiato molto approfonditamente all'interno di un esperimento fisico, poiché limita la sensibilità delle misure effettuate e soprattutto è un punto d'inizio per nuove e più sofisticate strumentazioni.

Il rumore è presente sia come attenuazione del segnale elettrico che si misura mediante il fotodiodo, sia come innalzamento del livello minimo del segnale e può essere provocato da diverse fonti indipendenti. È soprattutto il secondo effetto a determinare i maggiori problemi, poiché in base ai valori ottenuti si stabilisce la sensibilità della strumentazione e di conseguenza la precisione dei dati, che in fisica è il punto cruciale della sperimentazione. Sono state effettuate misurazioni di rumore di fondo e di sensibilità di due diversi fotodiodi per poterli poi confrontare con i valori teorici.

Essendo tutte misurazioni molto piccole si ha l'esigenza di usare strumentazione molto sensibile e ciò implica la necessità di avere poca

radiazione elettromagnetica incidente sul fotorilevatore, cioè lavorare in estinzione. L'effetto dell'estinzione dovuta ai due polarizzatori non ideali è stata valutata con procedimento iterato in funzione dell'angolo fra gli assi degli stessi.

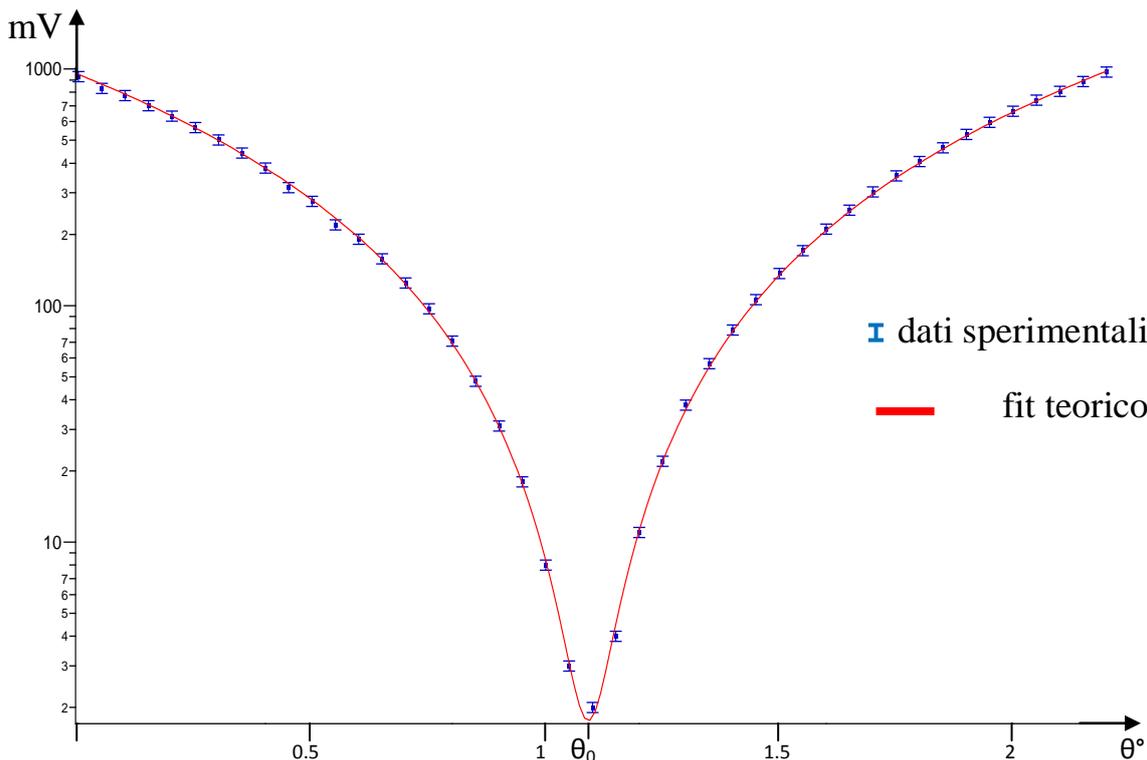
Inoltre è importante considerare l'effetto della legge di Malus sull'intensità luminosa e ciò implica che la legge che governa questo effetto sia:

$$V_{\text{out}}(t) = V_{\text{in}} \sigma^2 + V_{\text{in}} \cdot \sin^2 [k(\theta - \theta_0)] \quad \text{[5.1]}$$

Sono state effettuate numerose misure della tensione in uscita dal fotodiode considerando differenti angoli fra gli assi dei polarizzatori su un escursione totale di circa 2° sessagesimali.

Infine è stato possibile realizzare un grafico dove è stato analizzato un fit teorico dei dati ottenuti, attraverso la formula 5.1, con coefficienti qui riportati:

- $V_{\text{in}} = W_0 \cdot q \cdot G = 7 \cdot 10^7 \text{ mV}$
- $\sigma^2 = 2.5 \cdot 10^{-8}$
- $k = 3.37 \cdot 10^{-3} (\text{°})^{-1}$
- $\theta_0 = 1.086^\circ$



© figura 4B — andamento tensione in funzione dell'angolo fra i polarizzatori, estinzione ☹

Effettuati i calcoli preliminari riferiti all'estinzione dell'ellissometro si può esaminare nei particolari i quattro rumori presenti nel sistema. Essi sono indipendenti fra loro e si può considerare il loro effetto come una sovrapposizione incoerente dei segnali, ottenendo un livello di rumore generale. Cioè

$$\Delta i_{tot} = \sqrt{i_{shot}^2 + i_{johnson}^2 + i_{diodo}^2 + i_{RIN}^2} \quad [5.2]$$

Essi sono:

- ✓ Rumore “shot”
- ✓ Rumore “Johnson”
- ✓ Rumore interno del fotodiode
- ✓ Rumore “RIN”

Tutti i quattro rumori sopraelencati sono sempre stati esaminati in corrente elettrica e non in tensione e saranno misurati in A/\sqrt{Hz} .

Il rumore cosiddetto di “shot”, scoperto nel 1918 da Walter Schottky, è dovuto principalmente al fatto che la carica elettrica non sia un fluido, tale da creare un flusso continuo durante il suo spostamento, ma sia costituito da particelle elementari, gli elettroni. Un esempio molto utile per comprendere l’effetto del rumore “shot” è considerare la caduta della pioggia sul terreno: le gocce d’acqua non imprimono una pressione costante sul suolo, ma tante minime pressioni istantanee goccia per goccia. Il flusso così visto di elettroni è caratterizzato, quindi, da fluttuazioni che ne alterano le misurazioni. Si viene a creare una statistica “poissoniana” dell’arrivo delle singole particelle che giungono sul rilevatore.

Il rumore di “shot” è di tipo “poissoniano” per quanto riguarda la componente temporale e “bianco” per quella in frequenza. Infatti, la sua distribuzione è piatta su tutto lo spettro, quindi al variare della frequenza ν la densità di rumore rimarrà costante. Il rumore “shot” è governato dalla relazione:

$$i_{shot} = \frac{\delta i_{shot}}{\sqrt{\nu}} = \sqrt{2 \cdot e \cdot q \cdot (W_0 \cdot \sigma^2 + W_{PEM})} \quad [5.3]$$

dove : $W_0 \cdot \sigma^2 = 2 \text{ nW}$: potenza del laser in estinzione;

$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$: carica elettrica dell’elettrone;

$W_{PEM} = \frac{W_0 \cdot \eta_0^2}{2}$: modulazione in potenza effettuata dal PEM.

È possibile valutare la minima ellitticità ψ della componente del rumore “shot”, mediante la seguente relazione derivante dall’equazione 4.10:

$$\psi_{shot} = \frac{i_{shot}}{I_0 \eta_0} \quad [5.4]$$

Il rumore cosiddetto di “Johnson” o termico, misurato dallo stesso John B. Johnson nel 1928, è caratteristico di ogni circuito elettrico, in quanto è dovuto all’agitazione termica dei portatori di carica, cioè elettroni. Ciò produce una periodica fluttuazione del segnale, modificandone le misurazioni. Anche questo tipo di rumore è “poissoniano” e “bianco” come lo “shot” noise considerato in precedenza.

Nel sistema sperimentale, il rumore “Johnson” è dovuto esclusivamente alla resistenza interna dell’amplificatore, indispensabile per l’utilizzo del fotodiodo. Per valutarne l’intensità, ci si serve della relazione 5.5:

$$i_{johnson} = \frac{\delta V_{johnson}}{R\sqrt{\nu}} = \sqrt{\frac{4 \cdot k_B \cdot T}{R}} \quad [5.5]$$

dove : $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: costante di Boltzmann;
 $T = 300 \text{ K}$: temperatura ambiente;
 $R = 10^7 \text{ } \Omega$: resistenza dell’amplificatore.

Considerata la misura di $i_{johnson}$ rappresentata dall’equazione 5.5 è possibile rilevare la minima ellitticità dovuta al rumore termico stesso tramite l’equazione 4.10.

$$\psi_{johnson} = \frac{i_{johnson}}{I_0 \eta_0}. \quad [5.6]$$

Il terzo tipo di rumore considerato è dovuto al diodo stesso e alla corrente elettrica che scorre al suo interno. Infatti essendo a temperatura ambiente

vengono eccitati involontariamente elettroni verso la banda di conduzione e vengono create di conseguenza buche sulla banda di valenza, creando la cosiddetta “corrente di buio”. Proprio questi effetti dovuti alla temperatura danno la possibilità di avere un movimento di elettroni, cioè corrente elettrica. Essendo costituito da materiale semiconduttore, esso opporrà una certa resistenza alla corrente elettrica e questa è indispensabile conoscerla per il calcolo del rumore interno al fotodiodo.

La formula che è stata usata è:

$$i_{diodo} = \frac{\delta V_{diodo}}{R\sqrt{\nu}}. \quad [5.7]$$

dove $\frac{\delta V}{\sqrt{\nu}}$ è una grandezza tipica del fotodiodo e facilmente misurabile.

Perciò è possibile calcolarne la minima ellitticità:

$$\psi_{diodo} = \frac{i_{diodo}}{I_0\eta_0}. \quad [5.8]$$

L'ultimo rumore considerato è quello dovuto al laser, “RIN” Relative Internal Noise. Esso è dovuto alla cavità di vibrazione del laser e alle fluttuazioni del laser stesso nel mezzo di guadagno. Esso è un rumore di tipo “bianco” nella banda di frequenza considerata, dove $\nu < 100\text{KHz}$. Inoltre è proporzionale alla potenza del laser ed è governata dalla legge 5.9:

$$i_{RIN} = \frac{\delta i_{RIN}}{\sqrt{\nu}} = \frac{\Delta V_{RIN}}{V} \cdot \frac{q \cdot W_0}{\sqrt{\nu}} \quad [5.9]$$

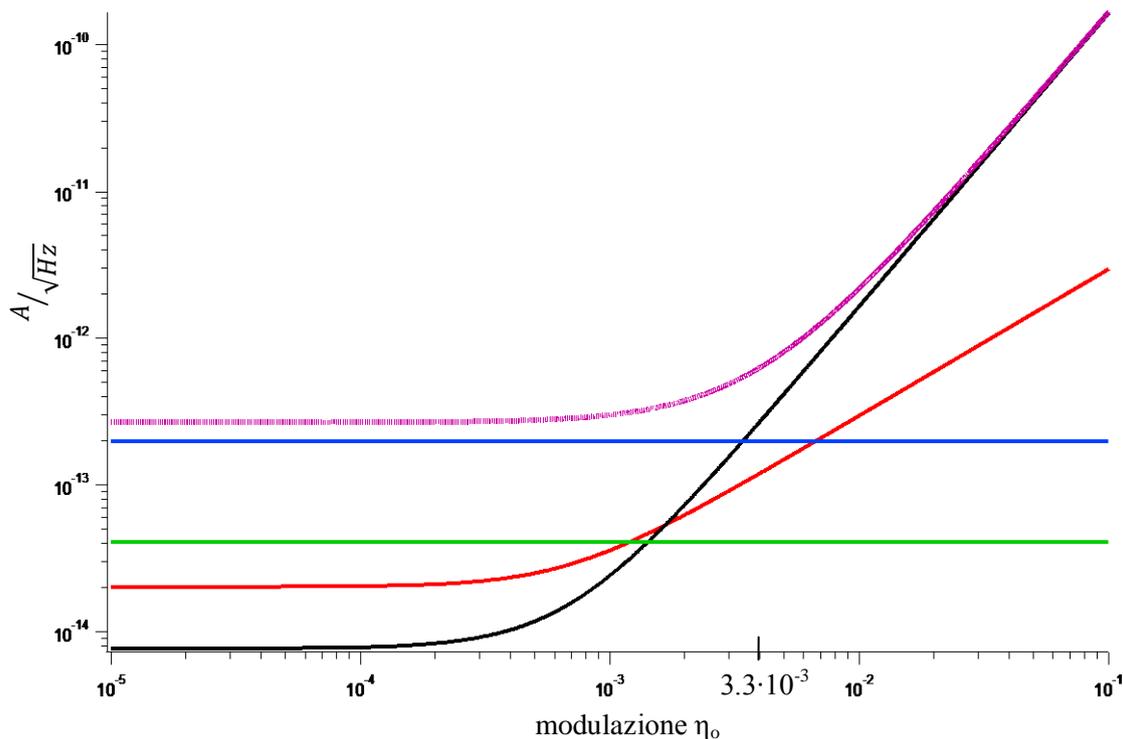
dove il rapporto $\frac{\Delta V}{V} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Hz}^{-1}$ è stato calcolato fuori estinzione, misurando lo scarto di tensione rispetto alla tensione in uscita di 5 V.

Anche per quest'ultimo tipo di rumore è possibile considerare la minima ellitticità acquisita dalla radiazione elettromagnetica, mediante l'equazione 4.10:

$$\psi_{RIN} = \frac{i_{RIN}}{I_0 \eta_0}. \quad [5.10]$$

Per valutarne meglio gli effetti dei singoli rumori si possono realizzare differenti grafici dove è facilmente possibile valutarne le intensità in funzione della modulazione η_0 . È possibile realizzare grafici per ogni rumore preso in considerazione, ma per facilitarne la comprensione sono stati realizzati grafici dove è possibile confrontare contemporaneamente tutti i singoli segnali dei rumori presenti, come visualizzato nelle figure di seguito. Sono stati realizzati grafici che rappresentano il livello puro di rumore in funzione della modulazione η_0 e grafici dove viene visualizzato l'effetto di ellitticità degli stessi rumori sul segnale elettrico, sempre in funzione della modulazione

In primis è riportato il grafico riferito al fotodiodo numero 1, quello con amplificatore fisso settato a 10^7 V/A dove vengono rappresentati contemporaneamente i singoli rumori considerati.



© figura 4C — rumori presenti nel primo fotodiode ☺

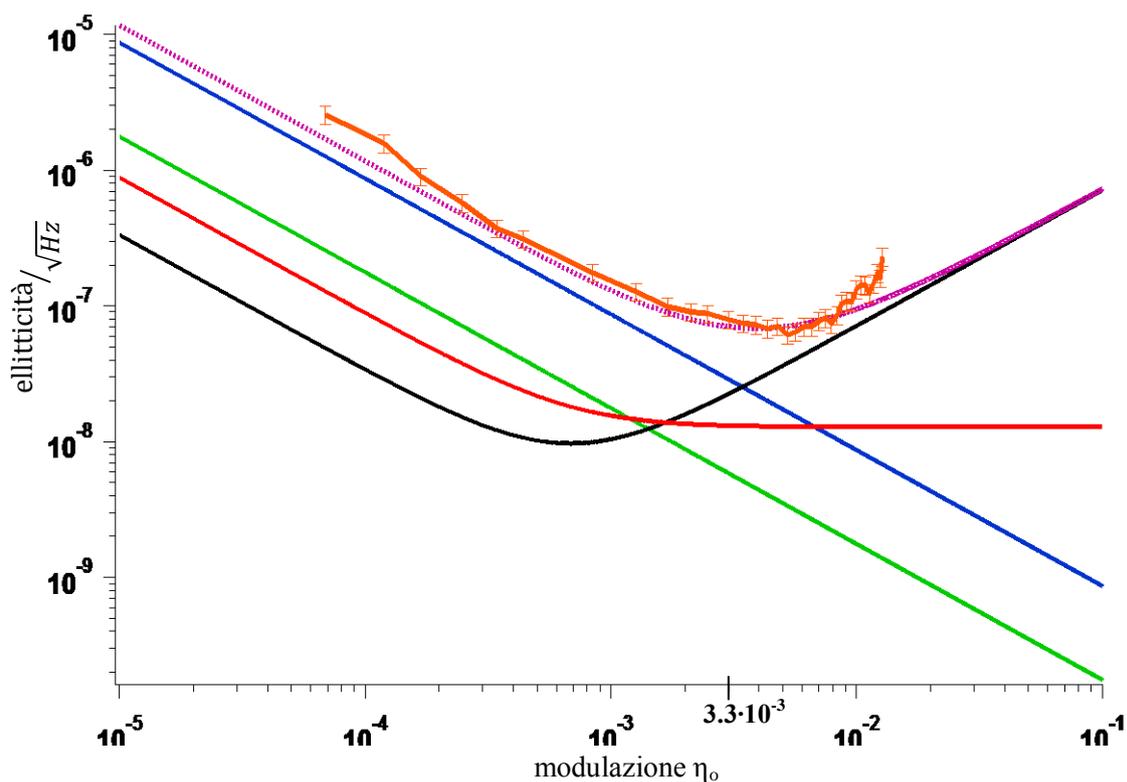
Legenda:

- Rumore johnson: $i_{johnson}$
- Rumore diodo: i_{diodo}
- Rumore shot: i_{shot}
- Rumore RIN: i_{RIN}
- Rumore totale: $i_{tot} = \sqrt{i_{shot}^2 + i_{johnson}^2 + i_{diodo}^2 + i_{RIN}^2}$

È facile notare quanto il rumore “RIN” sia preponderante già a basse modulazioni, infatti con $\eta_0 \approx 3.3 \cdot 10^{-3}$ ha un valore di circa $2 \cdot 10^{-13} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}}$, pari al rumore del diodo, il quale però rimane sempre costante.

Aumentando ancora la modulazione, con $\eta_0 \approx 6.11 \cdot 10^{-2}$ il rumore RIN è quasi due ordini di grandezza superiore al rumore di shot, il secondo per intensità, arrivando a valori di circa $6.3 \cdot 10^{-11} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}}$ ed incrementando ancora, ma più lentamente.

Una così netta prevalenza nei valori del rumore RIN del laser rispetto agli altri rumori si rispecchia anche esaminando gli effetti di ellitticità sulla polarizzazione inizialmente lineare del fascio luminoso, come si nota nella figura 4D.



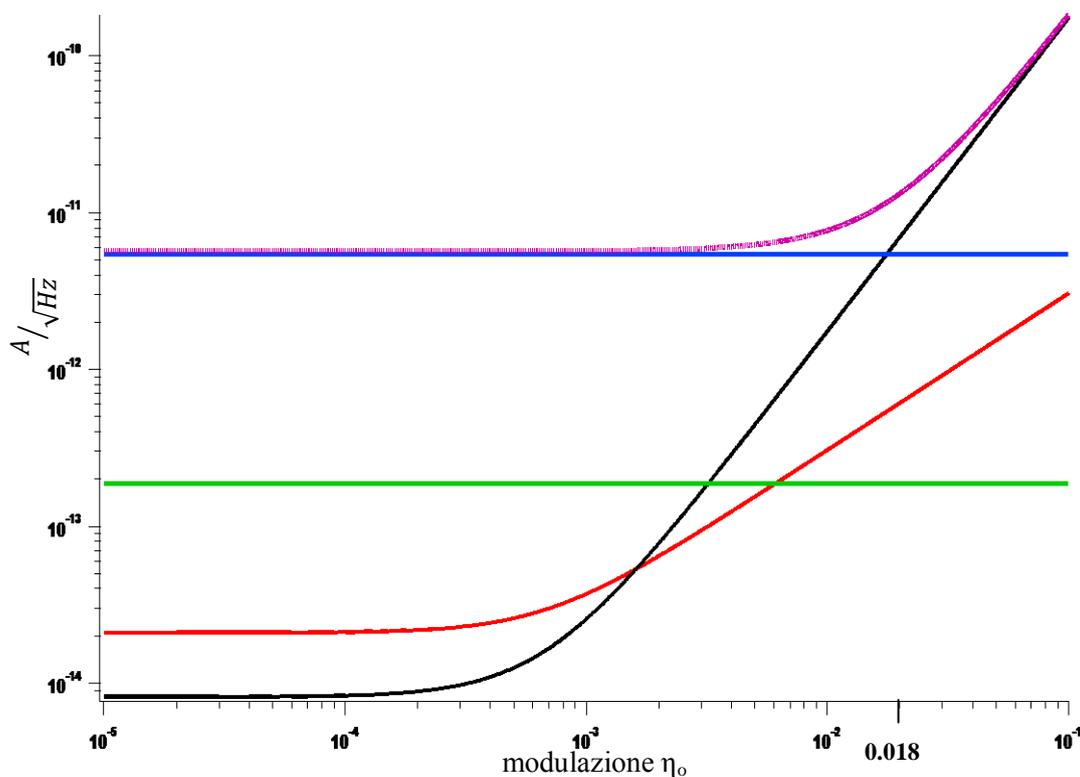
© figura 4D – ellitticità dei singoli rumori nel primo fotodiodo in funzione della modulazione ☺

Legenda:

- Ellitticità Rumore johnson: $\psi_{johnson}$
- Ellitticità Rumore diodo: ψ_{diodo}
- Ellitticità Rumore shot: ψ_{shot}
- Ellitticità Rumore rin: ψ_{RIN}
- Ellitticità Rumore totale: $\psi_{tot} = \sqrt{\psi_{shot}^2 + \psi_{johnson}^2 + \psi_{diodo}^2 + \psi_{RIN}^2}$
- Ellitticità Rumore dati sperimentali: ψ_1

A valori di $\eta_0 \approx 3.3 \cdot 10^{-3}$ l'ellitticità del rumore del laser ha valore di $2.5 \cdot 10^{-8}$. Infine a valori di modulazione $\eta_0 \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$, dove si ha il limite per i dati sperimentali, $\Psi_{RIN} = 9.2 \cdot 10^{-8}$, cioè sempre circa due ordini superiore all'ellitticità del rumore shot.

Si possono tenere ragionamenti analoghi di rumori ed ellitticità anche per il secondo fotodiodo preso in considerazione, quello con amplificatore variabile settato a $4.75 \cdot 10^5$ V/A, sempre mantenendo tutto il sistema ottico come in precedenza descritto.



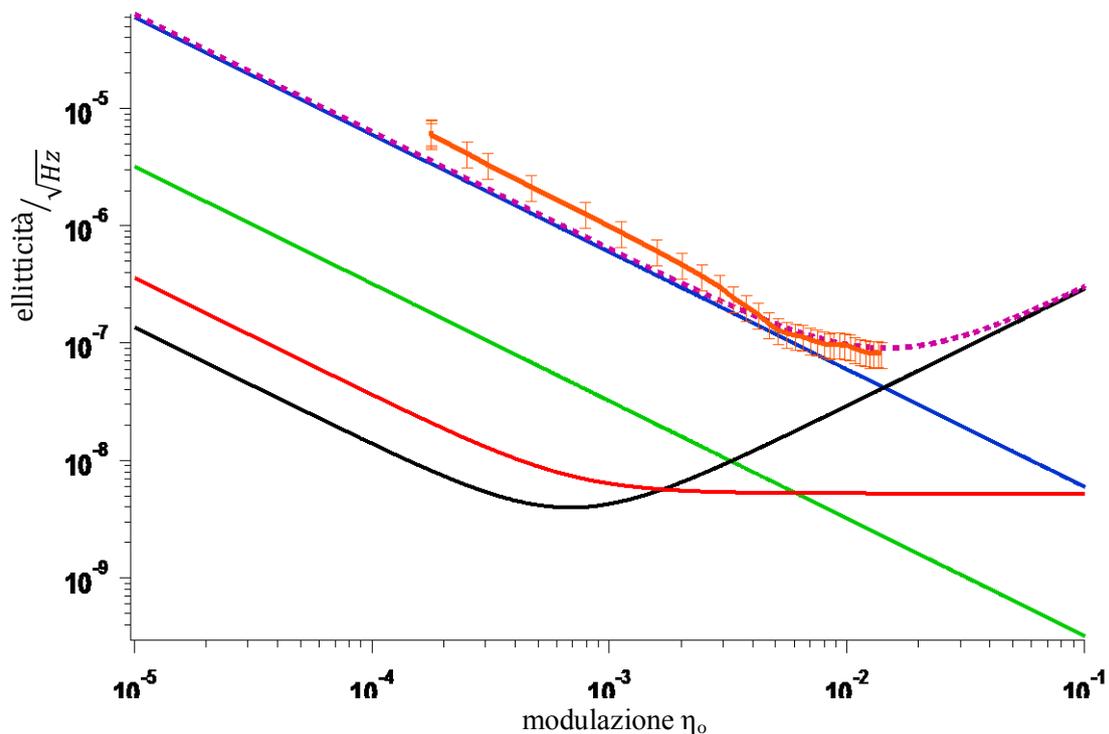
© figura 4E — rumori presenti nel primo fotodiodo ☺

Legenda:

- Rumore johnson: $i_{johnson}$
- Rumore diodo: i_{diodo}
- Rumore shot: i_{shot}
- Rumore RIN: i_{RIN}
- Rumore totale: $i_{totale} = \sqrt{i_{shot}^2 + i_{johnson}^2 + i_{diodo}^2 + i_{RIN}^2}$

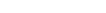
Anche in questo fotodiode è facile notare quanto il rumore interno del laser sia preponderante per modulazioni superiori a 0.018, valore nel quale i rumori RIN e del diode sono uguali a circa $5.5 \cdot 10^{-12} A/\sqrt{Hz}$. Si nota, inoltre, come proprio il rumore del diode sia nettamente più grande in questo secondo fotodiode piuttosto che nel primo, nel quale aveva un valore costante di $2 \cdot 10^{-13} A/\sqrt{Hz}$. Questo implica inoltre una minor importanza del rumore shot il quale per le modulazioni considerate non supera mai il rumore del diode.

Come in precedenza si può realizzare anche un grafico dove sono rappresentati le ellitticità di ogni rumore in funzione della piccola modulazione η_0 .



© figura 4F — ellitticità dei singoli rumori nel secondo fotodiode in funzione della modulazione ☺

Legenda:

-  Ellitticità Rumore johnson: $\psi_{johnson}$
-  Ellitticità Rumore diodo: ψ_{diodo}
-  Ellitticità Rumore shot: ψ_{shot}
-  Ellitticità Rumore rin: ψ_{RIN}
-  Ellitticità Rumore totale: $\psi_{tot} = \sqrt{\psi_{shot}^2 + \psi_{johnson}^2 + \psi_{diodo}^2 + \psi_{RIN}^2}$
-  Ellitticità Rumore dati sperimentali: ψ_2

L'importanza dei rumori del diodo e del laser si rispecchiano anche nel grafico 4F dove si vede che, fino a modulazioni di $\eta_0 = 2 \cdot 10^{-2}$, l'ellitticità del sistema è in gran parte dovuta al diodo, mentre per modulazioni superiori è dovuta a rumori interni al laser.

6. Conclusioni

*Fatti non feste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza.*

Dante Alighieri (1265 - 1321), poeta e scrittore italiano

Nell'analisi del primo fotodiodo, visualizzata nei grafici 4C e 4D, si può facilmente notare la presenza di un netto minimo nella funzione del rumore in ellitticità totale ψ_{tot} e dei valori sperimentali ψ_1 . In corrispondenza della modulazione $\eta_0 = 3.8 \cdot 10^{-3}$ si ha un valore di minimo dell'ellitticità pari a $\psi_{\text{tot}} = 6.8 \cdot 10^{-8}$. Se si vuole analizzare la funzione di ellitticità dei dati sperimentali si nota una notevole somiglianza all'andamento teorico, in quanto il minimo si ha in corrispondenza di $\eta_0 = 5.2 \cdot 10^{-3}$ con un valore di $\psi_1 = 6.5 \cdot 10^{-8}$.

Queste misurazioni così precise sono molto importanti per poter individuare la modulazione più corretta da usare attraverso il PEM, al fine di lavorare in condizioni di minor rumore possibile e quindi di massima sensibilità con questo particolare fotodiodo e con modulazioni di questo ordine.

Un discorso simile è possibile tenere anche per il secondo fotodiodo, anche se meno correttamente. Infatti, l'alto valore del rumore del diodo non ha permesso di vedere nel grafico l'andamento aspettato dell'ellitticità delle misure sperimentali come per il primo detector. Infatti, non è stato possibile visualizzare un netto minimo nella funzione ψ_{tot} , come si vede chiaramente nella figura 4F. Sulla funzione teorica di ellitticità si riscontra un minimo in coincidenza di $\eta_0 = 1.5 \cdot 10^{-2}$ con un valore di $\psi_{\text{tot}} = 9.0 \cdot 10^{-8}$; mentre sulla

funzione dei dati sperimentali si arriva ad una modulazione massima di $\eta_0 = 1.5 \cdot 10^{-2}$, con un valore di $\psi_2 = 8.5 \cdot 10^{-8}$. Probabilmente i valori di modulazione η_0 sono stati sufficienti al fine di trovare il minimo di ellitticità, ma non potendo raggiungere valori maggiori di modulazione, non si potrà mai sapere esattamente la banda di valori di η_0 più corretti.

Forse la motivazione per questi alti valori del rumore interno al diodo può essere trovata nella dimensione della superficie sensibile del diodo stesso. Infatti il secondo fotodiodo ha dimensioni maggiori del primo e questo implica una minor sensibilità alla minima radiazione luminosa incidente. Inoltre è possibile che il secondo fotodiodo sia di natura meno preciso e sensibile rispetto al primo, infatti l'amplificatore variabile usato col secondo è stato settato su un guadagno molto inferiore rispetto a quello usato per il primo fotodiodo, ottenendo comunque livelli di rumore molto più alti. Quindi misurazioni e calcoli di questo tipo possono essere importanti per la scelta anche dei fotodiodi e degli amplificatori stessi più idonei.

7. Bibliografia

* Libri:

Hecht E., Zajac – “Optics” (4th Ed., 2003)

* Pubblicazioni:

G. Zavattini – “trying to measure the induced magnetic birefringence of vacuum: description and preliminary results of the PVLAS experiment” (2001)

M. Bregant et al. – “Limits on low energy photon-photon scattering from experiment on magnetic vacuum birefringence” – PHYSICAL REVIEW **78**, 032006 (2008)

E. Milotti – “Corso di metodi di trattamento del segnale – Rumore Johnson e shot noise” (A.A. 2007-08)

D. Perepelitsa – “Johnson noise and shot noise” – MIT DEPARTMENT OF PHYSICS (2006)

Huidong Xu – Shot Noise (2008)

* Tesi:

M. Karuza – tesi dottorato – Trieste (2003)

Montagnese – tesi laurea specialistica – Trieste (2006)