

**Università degli Studi di Padova**  
Facoltà di Scienze MM., FF. e NN.  
Dipartimento di Fisica "Galileo Galilei"

Tesi di Dottorato

**Realizzazione di una cavità risonante ottica ad alta  
finezza per la misura della birifrangenza magnetica del  
vuoto con tecniche ellissometriche**

Dott. Giuseppe Ruoso

Anno Accademico 1993-94

*Ai miei genitori*

*Desidero ringraziare i Proff. Erseo Polacco, Emilio Zavattini, Massimo Nigro ed il Dott. Ruggero Pengo per i consigli avuti e l'aiuto prestatomi durante questo lavoro di tesi.*

*Il mio ringraziamento va inoltre a tutti gli amici e compagni dell'esperimento PVLAS, dei Laboratori di Legnaro e dei Dipartimenti di Fisica di Padova, Pisa e Trieste.*

# Indice

Indice delle figure . . . . .	iv
Indice delle tabelle . . . . .	vi
Introduzione . . . . .	vii
<b>I Aspetti teorici e sperimentali riguardo la misura della birifrangenza magnetica del vuoto</b>	<b>1</b>
1.1 La birifrangenza del vuoto . . . . .	1
1.1.1 La lagrangiana di Heisenberg Euler . . . . .	1
1.1.2 Altre formulazioni e prime correzioni superiori . . . . .	2
1.1.3 Effetti dispersivi magnetici . . . . .	3
1.1.4 Correzioni di ordine superiore . . . . .	6
1.1.5 Esempio numerico . . . . .	8
1.2 Schema di un esperimento per la misura della birifrangenza magnetica . . . . .	8
1.2.1 L'esperimento PVLAS . . . . .	8
1.2.2 Il risonatore Fabry-Pérot . . . . .	9
1.2.3 Rivelazioni di piccoli segnali . . . . .	10
1.3 Precedenti storici . . . . .	14
1.3.1 Misure dirette . . . . .	14
1.3.2 Misure indirette . . . . .	16
1.4 Altre proposte in corso . . . . .	18
1.5 Mescolamento del fotone con particelle di massa piccola . . . . .	19
1.5.1 Rivelazione dell'assione . . . . .	20
1.5.2 L'assione e la propagazione del fotone . . . . .	21
1.5.3 La ricerca dell'assione nell'esperimento PVLAS . . . . .	23
1.5.4 Particelle scalari . . . . .	24
1.6 Fenomeni meno rilevanti . . . . .	24
<b>2 Metodo di misura: la tecnica eterodina ed il Fabry-Pérot</b>	<b>25</b>
2.1 Funzione di trasferimento di un Fabry-Pérot in presenza di birifrangenze . . . . .	25
2.2 Misura con la tecnica eterodina . . . . .	27
2.2.1 Matrici di Jones per gli elementi ottici . . . . .	27
2.2.2 Rivelazione del segnale . . . . .	29
2.2.3 rivelazione in riflessione . . . . .	31
2.3 Rapporto segnale rumore e tempo di misura . . . . .	32

2.4	Misura di dicroismi per la rivelazione dell'assione . . . . .	34
2.5	Calibrazione dell'apparato: effetto Cotton-Mouton . . . . .	36
2.6	Caratteristiche dell'ottica . . . . .	37
2.6.1	Specchi sferici e perdite per diffrazione . . . . .	37
2.6.2	Esempio numerico con scelta del raggio di curvatura . . . . .	40
2.6.3	Birifrangenza degli specchi . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Agganciamento in frequenza di un laser ad una cavità Fabry-Pérot con la tecnica di Pound-Drever</b>	<b>44</b>
3.1	Generalità . . . . .	44
3.1.1	La sorgente luminosa e l'attuatore tensione frequenza . . . . .	46
3.2	Tecnica di Pound-Drever . . . . .	48
3.2.1	Il segnale di discriminazione . . . . .	50
3.2.2	Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria . . . . .	53
3.2.3	Banda di funzionamento e rapporto segnale rumore . . . . .	54
3.3	La modulazione di fase . . . . .	56
3.3.1	Modulazione di fase del laser . . . . .	56
3.4	Il circuito di amplificazione . . . . .	58
3.4.1	Schemi del circuito . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Caratteristiche delle cavità realizzate</b>	<b>62</b>
4.1	Generalità . . . . .	62
4.1.1	Schema generale dell'apparato . . . . .	63
4.1.2	Le cavità realizzate . . . . .	65
4.2	Caratteristiche dell'aggancio . . . . .	69
4.2.1	Misura di $D_V^0$ . . . . .	69
4.2.2	Spettri del segnale d'errore . . . . .	71
4.3	Caratteristiche del fascio trasmesso . . . . .	74
4.3.1	Rumore in ampiezza . . . . .	74
4.3.2	La polarizzazione . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Misure di ellissometria: sensibilità attese ed effetto Faraday nell'aria</b>	<b>78</b>
5.1	Rumori presenti nella misura . . . . .	78
5.1.1	Limiti richiesti sul rumore . . . . .	79
5.1.2	Effetto della birifrangenza del substrato degli specchi del FP . . . . .	81
5.2	Misure di sensibilità per ellissometri . . . . .	81
5.2.1	Misure di sensibilità con la cavità RAF1 . . . . .	81
5.2.2	Misure di sensibilità per la cavità RAF2 . . . . .	84
5.3	Misura dell'effetto Faraday nell'aria . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>89</b>

<b>A</b>	<b>Caratteristiche di un risonatore Fabry-Pérot</b>	<b>91</b>
A.1	Funzione di trasferimento . . . . .	91
A.2	Aumento del cammino ottico . . . . .	94
A.3	Fabry-Pérot in presenza di dicroismo . . . . .	95
	<b>Referenze</b>	<b>97</b>

# Indice delle figure

1.1	Termine di interazione fotone-fotone . . . . .	3
1.2	Correzione con bosone $p$ a spin 0 . . . . .	3
1.3	Propagazione di un fotone in un campo esterno $B_0$ . . . . .	4
1.4	Correzione di ordine superiore . . . . .	6
1.5	Le prime correzioni radiative . . . . .	7
1.6	Schema del risonatore Fabry-Pérot . . . . .	9
1.7	Schema di principio per una misura di polarimetria . . . . .	11
1.8	L'esperimento PVLAS . . . . .	13
1.9	Interazione di un muone con il campo esterno . . . . .	17
1.10	Diagramma di Feynman per lo scattering della luce da un potenziale elettrico . . . . .	17
1.11	Risultati sperimentali concernenti lo scattering Delbruck su nuclei di tantalio . . . . .	18
1.12	(a) Particella con vertice a due fotoni e (b) effetto Primakoff. . . . .	19
1.13	Anomalia triangolare . . . . .	19
1.14	Rotazione dovuta ad assorbimento selettivo di una componente . . . . .	21
1.15	Produzione di assioni con riconversione . . . . .	21
1.16	Limiti superiori per l'inverso dell'accoppiamento assione-fotoni ( $g_{a\gamma\gamma} = 1/M$ ) dall'esperimento LAS. (a) Limiti dalla misura di rotazione. (b) Limiti dalla misura di ellitticità. . . . .	23
2.1	Schema del Fabry-Pérot con i campi incidente $E_a$ , riflesso $E_r$ e trasmesso $E_t$ . . . . .	25
2.2	Schema per la misura di piccole birifrangenze. . . . .	27
2.3	Tipico spettro di $I_{ph}$ . . . . .	31
2.4	Schema per la rivelazione in riflessione. . . . .	32
2.5	Schema della cavità piano concava . . . . .	38
2.6	Andamento della trasmittività di un FP con specchi birifrangenti, al variare della frequenza della luce incidente . . . . .	42
2.7	Parametri per la trasmittività di un FP con specchi birifrangenti . . . . .	43
3.1	Schema logico per la realizzazione di cavità risonanti ottiche . . . . .	44
3.2	Schema del circuito di controllo . . . . .	45
3.3	Schema del laser NPRO . . . . .	46
3.4	Andamento della frequenza di emissione al variare della temperatura del cristallo . . . . .	47
3.5	Schema della cavità del laser NPRO con il trasduttore piezoelettrico PZT . . . . .	48
3.6	Schema dell'agganciamento alla Pound-Drever . . . . .	49

3.7	Segnale d'errore, componenti in fase (a) e in quadratura (b), per una cavità con $\Delta\nu_c = 70$ kHz ed $L = 0.9$ m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ), avendo $\Omega_m = 717.7$ kHz. . . . .	52
3.8	Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria . . . . .	54
3.9	Grafico di $V_e/(\nu_N D_V^0) = D_V/D_V^0$ per una cavità con $\Delta\nu_c = 70$ kHz ed $L = 0.9$ m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ). . . . .	55
3.10	Modulazione di ampiezza residua al variare della frequenza di modulazione di fase sul laser per una tensione sul piezoelettrico di ampiezza 50 mV (Ruoso and Zavattini 1994). . . . .	57
3.11	(a) Schema a blocchi del circuito di amplificazione (Servo). (b) Andamento (scala log-log) delle funzioni di trasferimento per ciascun blocco . . . . .	60
3.12	Realizzazione circuitale dell'amplificatore . . . . .	61
4.1	Schema del set-up ottico per la realizzazione di cavità Fabry-Pérot . . . . .	64
4.2	Andamento del segnale trasmesso, ottenuto variando lentamente la frequenza del laser, per luce modulata in fase alla frequenza di 717.7 kHz. . . . .	65
4.3	Andamento della luce trasmessa da una cavità risonante in seguito alla mancanza del segnale d'ingresso . . . . .	67
4.4	Camera a vuoto per la realizzazione di Fabry-Pérot ad alta finezza (Fotografia e schema di realizzazione) . . . . .	68
4.5	Andamento sull'oscilloscopio del segnale d'errore per la cavità RAF1, $\beta = 0.9$ . . . . .	69
4.6	Schema per la misura dinamica di $D_V$ . . . . .	70
4.7	Densità spettrale $\bar{\nu}_N$ della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF1. . . . .	72
4.8	Densità spettrale $\bar{\nu}_N$ della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF2 . . . . .	73
4.9	Densità spettrale del segnale di correzione al laser, misurato sull'attuatore piezoelettrico $K$ . . . . .	73
4.10	Rumore in ampiezza (RIN) del laser libero, misurato alla distanza di 3 metri dalla sorgente . . . . .	74
4.11	Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF1. . . . .	75
4.12	Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF2. . . . .	75
4.13	Rumore in ampiezza (RIN), a bassa frequenza, della luce trasmessa dalla cavità RAF2. . . . .	76
5.1	Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF1 . . . . .	82
5.2	Segnale all'analizzatore di spettro per la misura di ellissometria con RAF1 . . . . .	83
5.3	Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF2 . . . . .	85
5.4	Misura di sensibilità con la cavità RAF2 e schema differenziale. Fondo ottenuto. . . . .	86
5.5	Schema per la misura dell'effetto Faraday nell'aria . . . . .	87
A.1	Schema del risonatore . . . . .	91
A.2	Convenzioni per i campi del risonatore . . . . .	92

# Indice delle tabelle

1.1	Contributi alla birifrangenza indotta da un campo esterno . . . . .	8
1.2	Miglioramento della misura di $\Delta n$ indotto da un campo magnetico esterno, $G$ è il fattore di guadagno . . . . .	16
2.1	Componenti del segnale trasmesso, l'ampiezza è in unità $I_0$ . . . . .	30
2.2	Componenti del segnale trasmesso, ampiezze in unità $\eta_{FP}I_0$ . . . . .	33
2.3	Componenti del segnale trasmesso per rivelazioni di rotazioni, ampiezze in unità $\eta_{FP}I_0$ . . . . .	35
2.4	Costanti di Cotton-Mouton per alcuni gas a pressione normale . . . . .	36
2.5	Valori di $R$ esclusi per non avere modi degeneri . . . . .	40
3.1	Caratteristiche del laser utilizzato . . . . .	47
3.2	RAM e $\beta$ al variare della frequenza e della tensione applicata al laser. Gli asterischi marcano i minimi locali. . . . .	58
4.1	Alcune fra le cavità macroscopiche già realizzate . . . . .	62
4.2	Caratteristiche delle cavità Fabry-Pérot realizzate . . . . .	67
4.3	Caratteristiche a regime del risonatore RAF1 . . . . .	70

# Introduzione

Il lavoro descritto in questa tesi di Dottorato si è svolto nell'ambito dell'esperimento PVLAS. Tale esperimento, frutto di una collaborazione fra le Università di Trieste, Pisa, Padova ed i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN, ha come scopo la misura della birifrangenza del vuoto indotta da un campo magnetico. Tale effetto di birifrangenza è previsto dalla elettrodinamica quantistica, diretta conseguenza del termine di 'interazione fotone-fotone'.

Con i campi magnetici attualmente realizzabili la birifrangenza che si ottiene è molto piccola ( $\Delta n \sim 10^{-22}$ ), e questo spiega perchè tale fenomeno non sia stato sinora osservato.

Nell'esperimento PVLAS un fascio laser linearmente polarizzato attraversa una regione di campo magnetico, in vuoto, di lunghezza 90 cm. A causa della birifrangenza magnetica la luce acquista una ellitticità che viene misurata con un ellissometro basato sulla tecnica eterodina. Per aumentare l'ellitticità da misurare si utilizza una cavità risonante ottica di tipo Fabry-Pérot, che consente di ottenere un percorso equivalente per il fascio luminoso  $2\mathcal{F}/\pi$  volte maggiore rispetto alla lunghezza del magnete,  $\mathcal{F}$  è la finezza della cavità. Come si vedrà in questa tesi, abbiamo ottenuto finezze intorno a 30000, e quindi il Fabry-Pérot si rivela un elemento indispensabile per la misura.

La sorgente luminosa deve essere agganciata in frequenza alla cavità in modo da ottenere un accoppiamento laser-cavità costante.

Il campo magnetico è fornito da un magnete superconduttore di tipo dipolare, disposto verticalmente e rotante attorno al proprio asse alla frequenza di 1 Hz. La rotazione del magnete induce sul fascio laser una ellitticità modulata nel tempo alla frequenza di 2 Hz, eliminando in tal modo i problemi connessi con la misura in continua. Si utilizzerà un magnete, costruito al CERN su progetto dell'ing. Morpurgo, già provato fino a 9 T e, si spera, utilizzabile fino a 10 T. Presso i Laboratori di Legnaro è in fase di costruzione il criostato del magnete che sarà terminato nel 1996. Entro lo stesso periodo sarà completata l'ottica e si potrà quindi procedere alle prime misure.

Ho iniziato a lavorare nell'esperimento nel marzo 1992, quando si stava ancora mettendo a punto il progetto e non era ancora iniziata l'attività sperimentale. Il mio lavoro si è concentrato sulla realizzazione del risuonatore Fabry-Pérot (FP) ad alta finezza, sulla stabilizzazione del laser e sulla costruzione del sistema per la misura di ellitticità.

Durante il primo anno di dottorato abbiamo lavorato con luce visibile (laser He-Ne) realizzando una cavità lunga 50 cm e finezza 300.

Quando si è reso disponibile un nuovo laser (Nd:YAG a stato solido), che poteva essere controllato in frequenza, si è quindi passati allo studio dei sistemi di agganciamento, realizzando questa volta una cavità di lunghezza 87 cm e finezza circa 2000. Per tale sistema si è ottenuto l'agganciamento laser-cavità FP con la tecnica di Pound-Drever. A tale scopo è stato progettato e costruito l'amplificatore ad alto guadagno utilizzato per il feedback. La modulazione di fase della luce, necessaria per la tecnica di Pound-Drever, è stata realizzata in modo innovativo agendo direttamente sulla sorgente laser.

La cavità di finezza 2000, indicata con RAF1 nella tesi, è stata realizzata in aria per semplicità. Ciò ha comportato un notevole rumore in ampiezza sul fascio trasmesso. Si è quindi passati a costruire una nuova cavità inserita in una camera a vuoto. Questo Fabry-Pérot, chiamato RAF2, ha una lunghezza di 78 cm e una finezza  $\mathcal{F} = 29000$ . Questo valore rappresenta il traguardo che ci eravamo posti all'inizio; si noti che il fattore di merito  $Q$  per la cavità RAF2 è dell'ordine di 50 miliardi. Tale cavità ha mostrato una notevole diminuzione del rumore in ampiezza della luce trasmessa, rispetto ai valori ottenuti con RAF1.

A questo punto, anziché migliorare le prestazioni dell'aggancio, abbiamo deciso di costruire un ellissometro completo che realizzasse su scala ridotta l'esperimento PVLAS, in modo da chiarirci i problemi connessi con l'apparato completo.

Con le cavità realizzate si sono quindi costruiti degli ellissometri per i quali abbiamo misurato la sensibilità. Le misure fatte sono da considerarsi preliminari, ma si sono già ottenute sensibilità per misure di ellitticità solamente un ordine di grandezza peggiori del livello shot. Si è visto che i problemi maggiori derivano dalla presenza di ellitticità causate dalla birifrangenza del substrato degli specchi del Fabry-Pérot. Si è però verificato che questo è un problema risolvibile con la rotazione degli specchi, il che indica che è possibile ottenere una sensibilità al livello shot.

La finezza circa 30000 e una misura al livello shot significano per l'esperimento PVLAS il raggiungimento di un rapporto segnale rumore pari ad uno con tempi di misura della decina di ore.

Nel primo capitolo di questa tesi si discute l'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto. L'esperimento PVLAS è presentato nelle sue caratteristiche di progetto, e si dà inoltre una breve panoramica storica di alcuni esperimenti che hanno ricercato effetti simili. Viene inoltre discussa la ricerca di particella leggera (Assione), che è possibile con lo stesso apparato.

Nel secondo capitolo si illustra la tecnica di misura, usando il formalismo delle matrici di Jones, e se ne ricava la sensibilità limite.

Il metodo di agganciamento in frequenza laser-cavità FP, con la descrizione dei circuiti di controllo, è presentato nel capitolo terzo.

Le cavità realizzate RAF1 e RAF2 sono descritte nel capitolo quarto. Sono presentate le caratteristiche dell'aggancio in frequenza del laser e quelle del fascio trasmesso dalle due

cavità.

Nel capitolo quinto si discutono le misure di sensibilità. Dopo una breve introduzione sui rumori associati a tali misure, vengono riportati i risultati sperimentali ottenuti. È inoltre presentata una misura dell'effetto Faraday nell'aria, effettuata per verificare sperimentalmente l'effetto di amplificazione della cavità Fabry-Pérot.

Si traggono quindi alcune conclusioni nell'ultimo capitolo.



# Capitolo 1

## Aspetti teorici e sperimentali riguardo la misura della birifrangenza magnetica del vuoto

### 1.1 La birifrangenza del vuoto

#### 1.1.1 La lagrangiana di Heisenberg Euler

La polarizzazione del vuoto in presenza di campi elettromagnetici è descritta in maniera semplice utilizzando la lagrangiana efficace di Heisenberg-Euler (1936, Weisskopf 1936). Essi derivarono tale lagrangiana nello studio della interazione della luce con la luce. Come risultato di questo studio determinarono la sezione d'urto fotone-fotone e la lagrangiana  $\mathcal{L}$  che descrive il fenomeno di polarizzazione citato. A causa della invarianza relativistica,  $\mathcal{L}$  può dipendere solamente dalle due espressioni  $S$  e  $P$ :

$$S = \frac{1}{2}(B^2 - E^2) \quad P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (1.1)$$

e la sua espressione generale diventa (Bialynicky-Birula 1988), nel sistema di Gauss (Usato da qui in avanti)

$$\mathcal{L}_{HE} = -\frac{S}{4\pi} - \frac{\alpha}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta} \left[ P \frac{\Re \cosh(\eta X/F_c)}{\Im \cosh(\eta X/F_c)} - \frac{F_c^2}{\eta^2} + \frac{2}{3} S \right] \quad (1.2)$$

ove  $\alpha$  è la costante di struttura fine,  $F_c$  è il campo critico:

$$F_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \quad (1.3)$$

e  $X^2$  è una combinazione lineare dei due invarianti (1.1)

$$X^2 = -2S + 2iP \quad (1.4)$$

Lo sviluppo di questa lagrangiana per poter poi arrivare a delle quantità misurabili è oltremodo complicato. Per quanto riguarda l'uso nei laboratori terrestri, ci si può senz'altro mettere nelle condizioni in cui i campi in gioco sono inferiori al valore critico  $F_c$

$$\begin{aligned} B &\ll B_c = 4.4 \times 10^{13} \text{ gauss} \\ E &\ll E_c = 4.4 \times 10^{13} \text{ statvolt/cm} = B_c \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si deve introdurre poi la condizione di campi lentamente variabili, ove per questo si intende che la variazione deve essere tale che:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{m_e c} |\nabla F| &\ll F \\ \frac{\hbar}{m_e c^2} \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| &\ll F \end{aligned} \quad (1.6)$$

qui  $F$  sta ad indicare genericamente il campo elettrico e quello magnetico. In tali approssimazioni si può scrivere lo sviluppo

$$\mathcal{L}_{HE} = -\frac{S}{4\pi} + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} [4S^2 + 7P^2] + .. \quad (1.7)$$

che sostituendo agli invarianti le espressioni (1.1) ci fornisce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HE} &= \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} [(E^2 - B^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] + .. \\ &= \mathcal{L}_{em}^{(0)} + \mathcal{L}_{HE}^{(1)} + .. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Il termine  $\mathcal{L}_{em}^{(0)}$  è la lagrangiana elettromagnetica classica mentre  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  come resta qui definito è proprio la correzione che ci interessa e che rientrerà nei fenomeni che si andranno a studiare.

### 1.1.2 Altre formulazioni e prime correzioni superiori

Il termine correttivo  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  può essere calcolato anche con l'elettrodinamica quantistica. Tale lavoro è stato svolto da Schwinger (1951). Anche in questo caso la soluzione si ottiene più facilmente nel caso di campo e.m. a variazione lenta secondo le (1.6). Schwinger così facendo ottenne esattamente il termine  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  della (1.8), con la scelta per il campo di particelle quello associato ad un fermione (spin 1/2). E' possibile infatti considerare anche l'effetto dovuto alla presenza di particelle  $p$  a spin 0. Si trova in questo modo una correzione al termine precedentemente calcolato. La indichiamo con:

$$\mathcal{L}_{spin0}^{(1)} = \frac{\alpha^2}{90} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{(\hbar/m_p c)^3}{m_p c^2} \left[ \frac{7}{4} (E^2 - B^2)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.9)$$

ove  $m_p$  è la massa della particella a spin 0. Poichè il termine correttivo scala come la massa alla meno 4 ed il bosone più leggero è il pione che ha una massa circa 300 volte l'elettrone, si nota come  $\mathcal{L}_{spin0}^{(1)}$  sia praticamente trascurabile rispetto a  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$ .

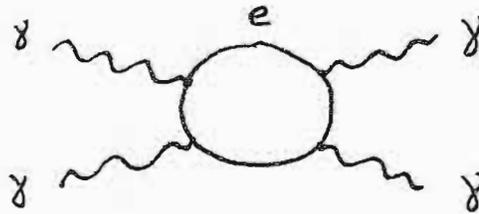


Figura 1.1: Termine di interazione fotone-fotone

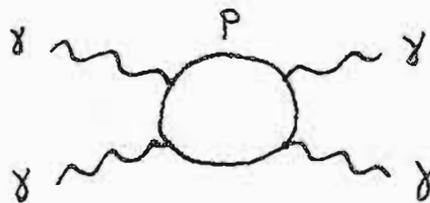


Figura 1.2: Correzione con bosone  $p$  a spin 0

Le lagrangiane esprimono, nel linguaggio dei grafici di Feynman, interazioni a 4 fotoni. Il grafico associato alla parte  $\mathcal{L}_{HE}^{(1)}$  è rappresentato in fig. 1.1, e viene generalmente chiamato 'interazione fotone-fotone', mentre quello di fig. 1.2 è associato al termine  $\mathcal{L}_{spin0}^{(1)}$ .

L'utilizzo dei diagrammi di Feynman permette di effettuare il calcolo in un modo diverso, come compare in Akhiezer-Berestetsky (1965), ed il risultato coincide con il precedente (Si veda anche riguardo allo studio del termine di interazione fotone-fotone Costantini *et al* (1971) e Karplus e Neuman (1950)).

### 1.1.3 Effetti dispersivi magnetici

Ci si pone ora in un sistema specifico, si va cioè a studiare la propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto in presenza di un campo magnetico esterno. La soluzione di tale problema si può cercare utilizzando le equazioni di Maxwell, che in assenza di cariche e correnti si scrivono:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \tag{1.11}$$

ove le (1.11) definiscono le grandezze (tensoriali) costante dielettrica  $\epsilon$  e permeabilità magnetica  $\mu$ . Classicamente si ricava che  $\epsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . La soluzione risulta essere indipendente dalla presenza del campo magnetico esterno per la linearità delle equazioni stesse.

Tale soluzione rappresenta l'approssimazione al primo ordine del risultato che si ottiene partendo dalla lagrangiana di Heisenberg-Euler. Utilizzando le relazioni costitutive:

$$\mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{E}} \quad \mathbf{H} = -4\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \tag{1.12}$$

e sostituendovi la lagrangiana (1.8) si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + A \left[ 4(E^2 - B^2)\mathbf{E} + 14(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \right] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} + A \left[ 4(E^2 - B^2)\mathbf{B} - 14(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E} \right] \\ A &= \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} \simeq 1.32 \times 10^{-32} \text{ cm}^3/\text{erg} \end{aligned} \tag{1.13}$$

I termini non lineari che si manifestano fanno sì che in questo caso non valga più il principio di sovrapposizione degli effetti. La propagazione di un'onda e.m. nel vuoto risentirà della presenza del campo magnetico esterno. L'entità di tali fenomeni, come si andrà a vedere, è piccola. Si noti che ora il grafico associato al processo è quello di fig. 1.3, in cui due fotoni sono forniti dal campo esterno (fotoni classici).

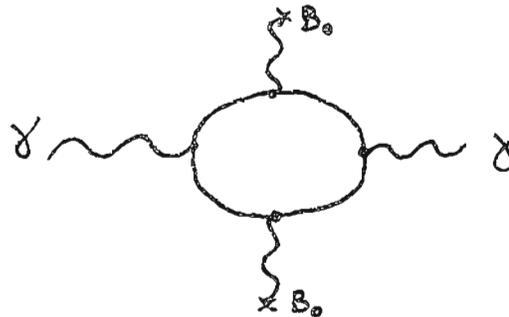


Figura 1.3: Propagazione di un fotone in un campo esterno  $B_0$

Ricerchiamo quindi una soluzione ad onda piana per l'onda (Adler 1971), con direzione di propagazione  $\mathbf{k}$ , per la quale considereremo due autostati linearmente polarizzati descritti da:

$$\mathbf{E}^{onda} = e^{onda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{H}^{onda} = \mathbf{h}^{onda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

Scriviamo nella (1.13)  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{onda}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{onda} + \mathbf{B}_0$  con  $\mathbf{B}_0$  il campo magnetico esterno avente direzione  $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3)$ . Poichè  $\mathbf{B}^{onda} \ll \mathbf{B}_0$ , si può scrivere, considerando solo i termini lineari nei campi  $\mathbf{E}^{onda}$  e  $\mathbf{B}^{onda}$ :

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} (1 - 4AB_0^2) + 14AB_0^2 \hat{b}_i \hat{b}_j \quad (1.15)$$

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} (1 - 4AB_0^2) - 8AB_0^2 \hat{b}_i \hat{b}_j$$

Si calcola l'indice di rifrazione per i due autostati di polarizzazione<sup>1</sup> dell'onda utilizzando la relazione:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (1.16)$$

Fissiamo per comodità il campo esterno in direzione ortogonale al vettore di propagazione della luce, si ottengono i seguenti modi:

**modo ||**) onda linearmente polarizzata con vettore  $\mathbf{E}^{onda}$  parallelo a  $\mathbf{B}_0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{||} &= 1 + 10AB_0^2 \\ \mu_{||} &= 1 + 4AB_0^2 \\ n_{||} &= 1 + 7AB_0^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

**modo  $\perp$** : onda linearmente polarizzata con vettore  $\mathbf{E}^{onda}$  perpendicolare a  $\mathbf{B}_0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp} &= 1 - 4AB_0^2 \\ \mu_{\perp} &= 1 + 12AB_0^2 \\ n_{\perp} &= 1 + 4AB_0^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Risulta quindi:

<sup>1</sup>Viene qui usato un riferimento diverso, in cui si intende come vettore di polarizzazione quello elettrico e non quello magnetico come nella referenza citata (Adler 1971).

$$\begin{aligned}
\Delta n_{HE}^{(1)} = \Delta n_{QED} &= n_{\parallel} - n_{\perp} = 3AB_0^2 = \\
&= 3 \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} B_0^2 \simeq 4 \times 10^{-32} B_0^2
\end{aligned}
\tag{1.19}$$

per cui si ha che il vuoto in presenza di un campo esterno diventa un mezzo birifrangente.

### 1.1.4 Correzioni di ordine superiore

Come già chiarito nel lavoro di Adler (1971), la lagrangiana di Heisenberg-Euler, vista in termini di diagrammi di Feynman, contiene, fra tutti i grafici di interazione fotone-fotone che si possono formare, solo quelli ad anello ('loop diagrams'). Tali grafici sono tutti costituiti da un loop elettrone-positrone con intorno, per il teorema di Furry, un numero pari di gambe fotoniche.

Si può quindi passare al primo termine di ordine superiore per il processo considerato nel paragrafo precedente. Ad esso sarà associato il grafico di figura 1.4.

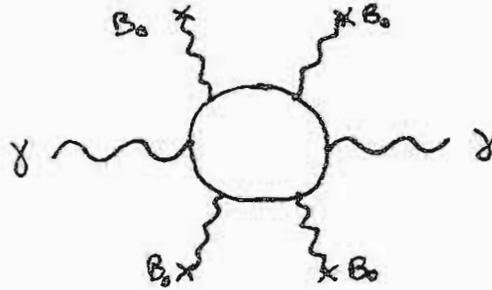


Figura 1.4: Correzione di ordine superiore

Adler(1970) riporta il risultato di un precedente calcolo (Toll 1952), in cui l'indice di rifrazione viene ricavato dai coefficienti di assorbimento attraverso le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig, segue:

$$\begin{aligned}
\Delta n &= n_{\parallel} - n_{\perp} = \Delta n_{HE}^{(1)} + \Delta n_{HE}^{(2)} = \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{B_0}{2B_{cr}} \right)^2 \left[ 0.13 + 0.20 \left( \frac{\hbar\omega}{2m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{B_0}{2B_{cr}} \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{1.20}$$

Ove  $\hbar\omega$  è l'energia del fotone e i coefficienti numerici che compaiono sono il risultato di un calcolo approssimato. Il primo termine fornisce una stima del  $\Delta n$  del paragrafo

precedente, ma la (1.20) è importante in quanto ci dà il comportamento del termine di correzione relativo al grafico di figura 1.4. Si ha:

$$\begin{aligned}\Delta n_{HE}^{(2)} &= 0.20 \frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{B_0}{2B_c} \right)^4 \left( \frac{\hbar\omega}{2m_e c^2} \right)^2 = \\ &= 0.20 \left( \frac{45}{4} \right)^2 \frac{\pi}{\alpha} \left( \frac{\hbar\omega}{m_e c^2} \right)^2 A^2 B_0^4 \simeq 10^{-70} B_0^4\end{aligned}\quad (1.21)$$

dove  $B_0$  è misurato in gauss. Tale effetto risulta essere molti ordini di grandezza più piccolo rispetto a quello principale, e quindi trascurabile. L'ulteriore correzione che ci rimane da considerare è quella relativa ai grafici del tipo di figura 1.5.

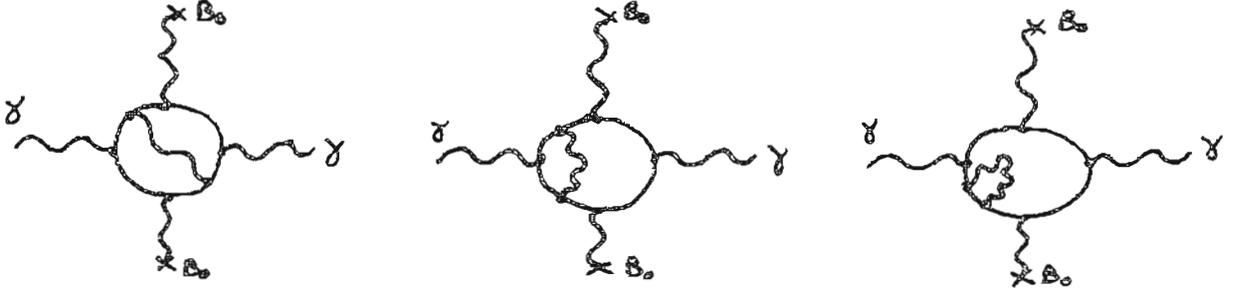


Figura 1.5: Le prime correzioni radiative

La lagrangiana efficace associata a tali processi è stata calcolata da Ritus (1976) e recentemente ricontrollata da D. Bakalov (comunicazione personale). Si trova che la prima correzione radiativa alla lagrangiana di Heisenberg-Euler, nel limite di basso campo esterno, vale:

$$\mathcal{L}_R^{(2)} = \frac{\alpha^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} \left[ \frac{16}{81} (E^2 - B^2)^2 + \frac{263}{162} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \quad (1.22)$$

Possiamo quindi calcolare il contributo a  $\Delta n$  di queste correzioni radiative. Operando come fatto in precedenza si ricava:

$$\Delta n_R^{(2)} = \frac{5}{6} \frac{\alpha^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{\pi} \frac{(\hbar/m_e c)^3}{m_e c^2} = \frac{75}{4} \frac{\alpha}{\pi} A B_0^2 = 0.0145 \times 3 A B_0^2 \quad (1.23)$$

Si noti quindi come questa correzione equivalga circa all'uno per cento dell'effetto dominante, del quale rappresenta quindi la correzione più significativa. È la prima volta che viene riportata tale correzione nello studio di effetti non lineari della elettrodinamica quantistica, e tale termine potrà essere verificato in un esperimento che raggiunga una sensibilità sufficiente sulla misura di  $\Delta n_{HE}^{(1)}$  (Formula (1.19)).

### 1.1.5 Esempio numerico

Si vuole qui riassumere gli effetti considerati per poter confrontare tra loro le varie correzioni. Nelle ipotesi viste la birifrangenza di una regione di vuoto in presenza di un campo esterno è riassunta in tabella 1.1, assieme al valore che si otterrebbe per il  $\Delta n$  nel caso di un campo magnetico esterno di  $10^5$  gauss (10 tesla).

Effetto	Ampiezza	Valore con $B_0 = 10^5$ gauss	Vedi Formula
$\Delta n_{HE}^{(1)}$	$3AB_0^2$	$3.98 \times 10^{-22}$	(1.19)
$\Delta n_{HE}^{(2)}$	$0.20 \left(\frac{45}{4}\right)^2 \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\hbar\omega}{m_p c^2}\right)^2 A^2 B_0^4$	$\sim 10^{-49}$	(1.21)
$\Delta n_{spin0}^{(2)}$	$-24 \frac{\alpha^2}{90\pi} \left(\frac{\hbar}{m_p c}\right)^3 \frac{1}{m_p c^2} B_0^2$	$\sim 10^{-31}$	(1.9)
$\Delta n_R^{(2)}$	$\frac{75}{4} \frac{\alpha}{\pi} AB_0^2$	$5.8 \times 10^{-24}$	(1.23)

Tabella 1.1: Contributi alla birifrangenza indotta da un campo esterno

## 1.2 Schema di un esperimento per la misura della birifrangenza magnetica

### 1.2.1 L'esperimento PVLAS

La misura dell'effetto quantistico di birifrangenza magnetica del vuoto descritto nella sezione precedente costituisce un passo fondamentale per la verifica della teoria dell'elettromagnetismo sino ad oggi sviluppata.

Si sta lavorando per la realizzazione di un esperimento, denominato PVLAS (Polarizzazione del vuoto e laser, si veda Bakalov 1994b), il cui scopo è la misura, con tecniche di ellissometria ottica, della birifrangenza prevista. Tale esperimento rappresenta lo sviluppo attuale di una proposta formulata da Iacopini e Zavattini (1979), che ha visto sinora diverse realizzazioni (si veda paragrafo 1.3.1), nelle quali la sensibilità raggiunta non è stata sufficiente per rivelare l'effetto cercato. In esso l'onda elettromagnetica incidente è un fascio laser, di lunghezza d'onda  $\lambda$ , polarizzato linearmente che si propaga all'interno di un campo magnetico. Un magnete superconduttore fornisce un campo, trasverso alla direzione di propagazione della luce, di tipo dipolare con una ampiezza dell'ordine di 10 tesla. A causa della birifrangenza del vuoto, fra le due componenti (parallela ed ortogonale) della polarizzazione, compare una differenza di fase  $\Delta\varphi$ :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} (n_{\parallel} - n_{\perp}) \quad (1.24)$$

La lunghezza d'onda della luce che si vuole utilizzare è  $\lambda = 1064$  nm mentre  $L = 0.9$  m è la lunghezza della regione di campo. Tale variazione di fase induce una ellitticità

sulla polarizzazione del fascio luminoso, massima qualora la polarizzazione iniziale sia a  $45^\circ$  rispetto alla direzione del campo esterno, e data da:

$$\psi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \pi \frac{L}{\lambda} \Delta n_{QED} \quad (1.25)$$

Come segue dai dati di tabella 1.1 la ellitticità attesa è in questo caso:

$$\psi = 1.06 \times 10^{-15} \quad (1.26)$$

tale valore rappresenta un limite estremo che richiede l'utilizzo di tecniche il più possibile avanzate.

## 1.2.2 Il risonatore Fabry-Pérot

Un risonatore Fabry-Pérot (Born e Wolf 1980) è costituito da una coppia di specchi paralleli separati da una distanza  $d$  ed aventi le superfici riflettenti verso l'interno (Figura 1.6).

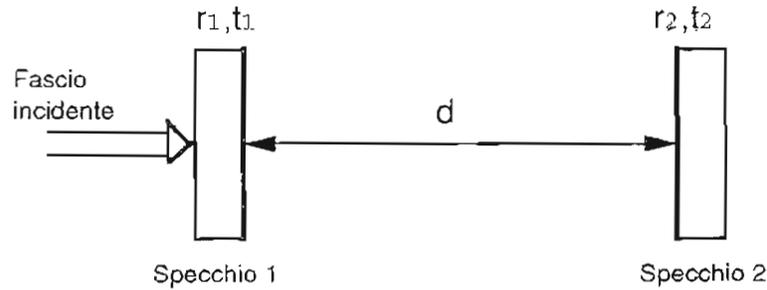


Figura 1.6: Schema del risonatore Fabry-Pérot

I parametri  $r_i, t_i$  sono rispettivamente i coefficienti di riflessione e di trasmissione dello specchio  $i$ -esimo, per il quale resta definito il coefficiente  $\sigma$  tramite la relazione:

$$\sigma_i = r_i^2 + t_i^2 \quad (1.27)$$

Si può calcolare la trasmittività  $\mathcal{T}_{FP}$  e la riflettività  $\mathcal{R}_{FP}$  di tale sistema rispetto ad un fascio luminoso incidente sul primo specchio come da figura (Appendice A):

$$\mathcal{T}_{FP} = \frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-1} \quad (1.28)$$

$$\mathcal{R}_{FP} = \frac{(\sigma_1 r_2 - r_1)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{\left[ 1 + 4 \frac{\sigma_1 r_1 r_2}{(\sigma_1 r_2 - r_1)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]}{\left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]} \quad (1.29)$$

Il parametro  $\delta$  è definito da:

$$\delta = 4\pi n \frac{d}{\lambda} \quad (1.30)$$

ove  $n$  è l'indice di rifrazione del mezzo. La condizione di risonanza si ottiene per

$$\delta = 2\pi k \quad k = \text{numero intero} \quad (1.31)$$

e coincide con l'avere  $d$  pari ad un multiplo intero di  $\lambda/2$ . In risonanza  $\mathcal{T}_{FP}$  raggiunge un massimo e  $\mathcal{R}_{FP}$  un corrispondente minimo; l'intensità della luce che si propaga in cavità è molto maggiore di quella incidente, ed è legata a questa dalla relazione:

$$I_{interna} \simeq I_{inc} \frac{\mathcal{F}}{\pi} \quad (1.32)$$

ove  $\mathcal{F}$  è la finezza definita da:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (1.33)$$

valori che si possono ottenere per la finezza variano da 10 a  $10^5$ .

L'effetto della cavità sul fascio luminoso entrante è inoltre quello di allungare il cammino ottico effettivo. Nel caso considerato si può infatti definire una lunghezza efficace pari a (App. A):

$$L^{eff} = 2 \frac{\mathcal{F}}{\pi} d \quad (1.34)$$

Tale sistema diventa uno strumento efficace per la misura di piccoli effetti di birifrangenza. Riprendendo la relazione (1.25), e supponendo di inserire il campo magnetico all'interno di un Fabry-Pérot, per un tratto di lunghezza  $L$ , avremo:

$$\psi = \pi \frac{L^{eff}}{\lambda} \Delta n = 2\mathcal{F} \frac{\Delta n}{\lambda} L \quad (1.35)$$

Dai dati di tabella 1.1, posto ad esempio  $\mathcal{F} = 30000$  ed  $L = 90$  cm, si ottiene:

$$\psi \simeq 2.02 \times 10^{-11} \quad (1.36)$$

con un notevole miglioramento rispetto al caso precedente (vedasi (1.26)).

### 1.2.3 Rivelazioni di piccoli segnali

La rivelazione di piccole ellitticità in ottica si effettua generalmente adottando tecniche di polarimetria, si utilizza cioè una coppia di polarizzatori incrociati.

Seguendo la figura 1.7 indichiamo con P (Polarizzatore) ed A (Analizzatore) i due polarimetri incrociati. L'intensità  $I$  della luce sul fotorivelatore, detta  $I_0$  l'intensità prima dell'analizzatore, sarà data da:

$$I = I_0(\sigma^2 + \psi^2) \quad (1.37)$$

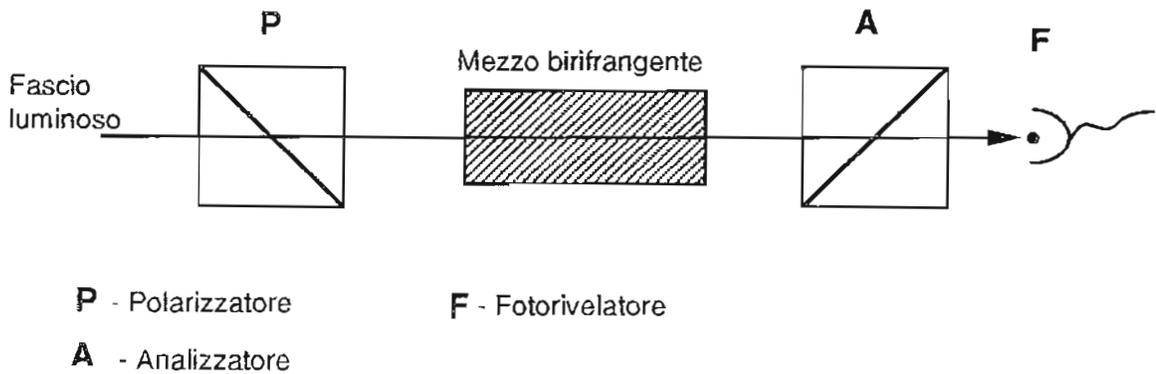


Figura 1.7: Schema di principio per una misura di polarimetria

ove  $\psi$  è l'ellitticità dovuta al mezzo birifrangente e  $\sigma^2$ , detta estinzione, dà la quantità di luce che si rivela comunque anche in assenza di un mezzo fra i polarimetri. Nel caso della birifrangenza del vuoto  $\psi$  è molto piccola, e  $\psi^2$  diventa trascurabile rispetto a  $\sigma^2$ , che anche avendo ottimi polarimetri raggiunge al meglio valori intorno a  $10^{-8}$ . Utilizzando la cosiddetta tecnica eterodina è possibile ottenere una linearizzazione della dipendenza del segnale al fotodiode rispetto all'effetto che si vuole misurare. In tale tecnica si pone un elemento ottico che fornisce una ellitticità nota  $\eta$  fra i due polarimetri. Sia tale ellitticità modulata nel tempo, il segnale al fotodiode ora si scrive:

$$I = I_0\{\sigma^2 + [\psi + \eta(t)]^2\} \quad (1.38)$$

$$\simeq I_0[\sigma^2 + \eta^2 + 2\eta(t)\psi] \quad (1.39)$$

L'analisi in frequenza di  $I$  permette di ricavare l'ampiezza  $\psi$  nota che sia la modulazione massima di  $\eta(t)$ .

Per la misura di ellitticità estremamente piccole si rende inoltre necessaria la loro modulazione. Si deve fare questo per eliminare gli effetti dovuti ad ellitticità non volute che si hanno nel sistema ottico e che si sommerebbero all'effetto cercato. La presenza di rumori a bassa frequenza (di tipo  $1/f$ ) richiede inoltre di eseguire la modulazione a frequenze le più elevate possibili.

Per modulare la birifrangenza magnetica del vuoto si possono essenzialmente adottare due schemi:

- a) modulare in ampiezza il campo magnetico esterno
- b) modificare l'angolo fra la polarizzazione della luce ed il campo magnetico esterno.

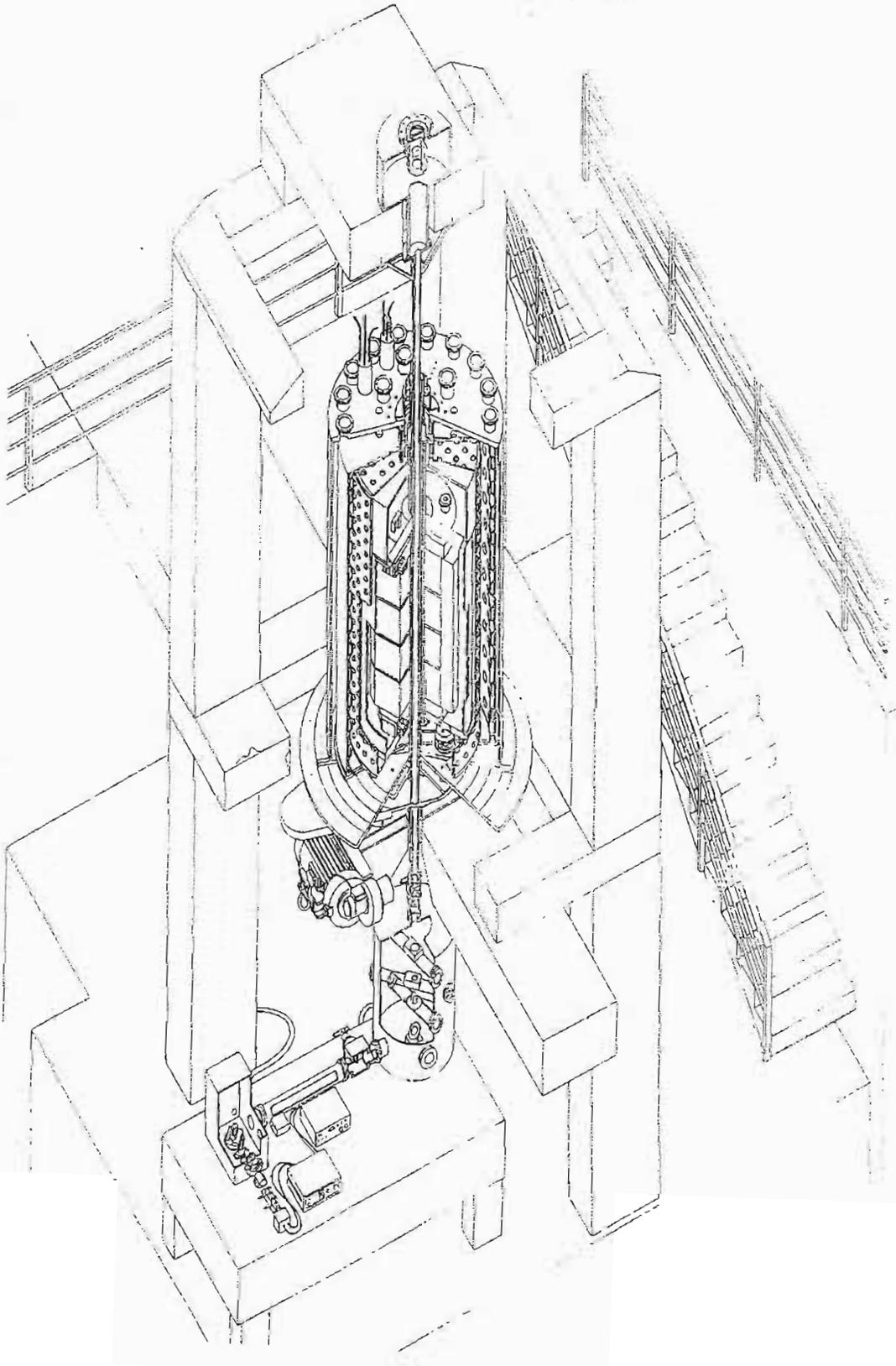
La soluzione a) è stata adottata in un precedente esperimento (Cameron *et al* 1993) ed ha come svantaggio che la frequenza di modulazione ha un limite superiore piuttosto basso (80 mHz). La soluzione b) è in corso di sviluppo nell'esperimento PVLAS, nella versione in cui il magnete viene fatto ruotare intorno all'asse del sistema ottico<sup>2</sup>. Lo sviluppo di un

<sup>2</sup>E' stata scartata la soluzione in cui era l'ottica a girare perchè in tale caso è più difficile mantenere costanti le elevate caratteristiche dell'ottica.

magnete superconduttore rotante si sta svolgendo presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN. L'intera struttura dell'apparato si può vedere in figura 1.8.

Si possono distinguere: il magnete inserito in un criostato ad elio superfluido che consente di mantenere la temperatura necessaria per la superconduttività anche durante la rotazione; una tavola rotante di supporto avente un foro centrale per il passaggio del fascio luminoso; una cavità Fabry-Pérot nella parte centrale. La frequenza di rotazione prevista per il magnete è di 1 Hz. L'effetto sulla polarizzazione dipende da  $B^2$  e quindi il segnale comparirà alla frequenza di 2 Hz.

Figura 1.8: L'esperimento PVLAS



## 1.3 Precedenti storici

### 1.3.1 Misure dirette

Gli effetti di campi magnetici esterni sulla propagazione di onde luminose nel vuoto sono stati soggetti di studio in diversi esperimenti. I fenomeni studiati non sempre erano indirizzati alla verifica della elettrodinamica quantistica.

Il primo esperimento fu senz'altro quello eseguito da Watson (1929). Utilizzando un elettromagnete avente un campo di  $10^4$  gauss, ed un Fabry-Pérot al suo interno, Watson ricercò variazioni nelle frange di interferenza dovute ad una possibile esistenza di un momento magnetico  $\mu_{ph}$  del fotone. I limiti che egli ricavò furono:

$$\mu_{ph} < 1.4 \times 10^{-22} \text{ e.m.u.} \quad (1.4 \times 10^{-25} \text{ A m}^2) \quad (1.40)$$

$$\Delta n < 4 \times 10^{-11} \text{ gauss}^{-1} \quad (1.41)$$

Quest'ultima disuguaglianza è riportata esattamente come nell'articolo citato, ove non viene spiegata come è stata ottenuta. Notiamo che tale risultato è molto al di sopra dell'effetto previsto. Inoltre la non dipendenza quadratica dal campo ci chiarisce come fosse diverso l'effetto cercato.

Farr e Banwell (1932) ricercarono variazioni di velocità della luce dovute ad un campo magnetico esterno trasverso. Utilizzando un interferometro di Jamin con un braccio posto fra le estremità del dipolo di un elettromagnete che forniva un campo di 18000 gauss, non trovarono alcuna variazione di velocità al limite di:

$$\Delta v < 14 \text{ m/s} \quad (1.42)$$

corrispondente a

$$\Delta n < 5 \times 10^{-8} \quad (1.43)$$

In una successiva realizzazione (Banwell e Farr 1940) utilizzarono un interferometro di Michelson, ove ancora uno dei bracci era posto all'interno di una regione di campo magnetico. In tal caso fu misurato un effetto ma fu interpretato come errore sperimentale, e fu quindi dato il limite

$$\Delta n < 2 \times 10^{-9} \text{ con } B = 2 \times 10^4 \text{ gauss} \quad (1.44)$$

A mia conoscenza il primo a proporre verifiche sperimentali degli effetti dovuti al diagramma di interazione fotone-fotone è Erber (1961), il quale suggerisce la misura della rotazione  $\theta$  del piano di polarizzazione di un fascio luminoso:

$$\theta = \frac{\alpha l}{15 \lambda} \left( \frac{B}{B_{cr}} \right)^2 \quad (1.45)$$

con  $l$  lunghezza del cammino della luce nel campo magnetico. Si noti come ora la dipendenza rispetto al campo esterno è quadratica. Erber cita a proposito un esperimento di Jones (1961): usando un campo magnetico di 8000 gauss in un volume prismatico, egli cercò un angolo di deviazione della luce dovuto a rifrazione, utilizzando per la misura una 'leva ottica' avente una sensibilità per variazioni angolari di  $\delta = 5 \times 10^{-13}$  rad. Nessun effetto fu osservato, infatti tale angolo corrisponde ad un  $\Delta n$  pari a  $\delta/2$ , ma l'effetto previsto è molto più piccolo come desunto dalla tabella 1.1.

Iacopini e Zavattini (1979) proposero un diverso tipo di apparato per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto. Seguendo la loro linea logica diversi esperimenti sono stati realizzati (Iacopini *et al* 1980, Carusotto *et al* 1982, Cameron *et al* 1993). Lo schema generale, in questi casi, era simile al progetto PVLAS descritto nella sezione precedente, con le seguenti sostanziali variazioni:

- lunghezza d'onda della luce nel verde ( $\lambda = 514$  nm)
- se presente, allungamento del cammino ottico mediante una linea ottica di ritardo (cavità multipass)
- modulazione dell'effetto mediante variazione dell'ampiezza del campo tramite la corrente di alimentazione del magnete (In un caso (Carusotto *et al* 1982) si utilizzò un piccolo magnete rotante)
- campo magnetico con valori fra i 2 ed i 4 tesla

Nell'ultima realizzazione (Esperimento LAS - Cameron *et al* 1993) si ottennero i migliori risultati. La sensibilità raggiunta non permise di rivelare l'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto, ma fornì indicazioni su altre ricerche (Assione, effetto Cotton-Mouton), di cui si parlerà in seguito. Una coppia di magneti superconduttori forniva un campo magnetico di circa 3 tesla su una lunghezza di 8.8 metri. La corrente di alimentazione veniva modulata, intorno al suo valore medio, ad una frequenza il cui valore massimo non superò mai gli 80 mHz: tale scelta fu dettata da motivi tecnici. Una linea ottica di ritardo permetteva una amplificazione del cammino ottico pari a 34. Con un tempo di misura di circa  $2 \cdot 10^4$  sec il limite fissato per  $\Delta n_{vuoto}$  fu:

$$\Delta n_{vuoto} < 10^{-18} \quad \text{con } B^2 = 4 \times 10^8 \text{ gauss}^2 \quad (1.46)$$

ancora un fattore circa  $6 \times 10^4$  dall'effetto cercato.

Si noti come nell'esperimento PVLAS le migliorie avvengono in:

- uso del Fabry-Pérot di finezza 30000 equivalente ad una amplificazione di 20000 del cammino ottico
- campo magnetico quadro di circa 80 tesla<sup>2</sup>, ma della lunghezza di circa 1 metro
- modulazione a 2 Hz e quindi riduzione ulteriore del rumore a bassa frequenza
- nuovo tipo di laser ( $\lambda = 1064$  nm) con minor rumore

Nella tabella 1.2 vengono riassunte queste modifiche ed il parametro G fornisce l'atteso miglioramento globale del nuovo esperimento.

L'incremento globale è pari circa a 10000, l'ulteriore guadagno necessario per la misura lo si potrà ottenere aumentando il tempo di misura, che sarà possibile per un sistema stabile. Il fattore  $G=15$  sulla voce frequenza di modulazione è una stima della possi-

parametro	Esp. LAS	Esp. PVLAS	G
$B_0^2$	4 T <sup>2</sup>	80 T <sup>2</sup>	20
lunghezza	8.8 m	0.9 m	0.1
amplificazione	34	20000	600
freq. modul.	50 mHz	2 Hz	15
$\lambda$ luce	512 nm	1064 nm	0.5

Tabella 1.2: Miglioramento della misura di  $\Delta n$  indotto da un campo magnetico esterno, G è il fattore di guadagno

bile riduzione del rumore a bassa frequenza. Si basa essenzialmente sull'esperienza fatta riguardo misure di sensibilità in funzione della frequenza e sulle migliori caratteristiche del nuovo laser. Nell'esperimento LAS si usò un laser ad argon, non stabilizzato, multimodo, e con rumore in ampiezza causato dalla scarica in gas. Nell'esperimento PVLAS il laser è del tipo Nd:YAG a stato solido, stabilizzato, monomodo ed avente una cavità monoblocco che riduce le fluttuazioni di intensità.

Riguardo alla voce amplificazione si ha che cavità che forniscono aumenti del cammino ottico di un fattore 20000 sono già state realizzate (Capitolo 4) e sono in fase di sviluppo Fabry-Pérot con finezze ancora più elevate.

### 1.3.2 Misure indirette

Il grafico di interazione fotone-fotone contribuisce, in generale, alle correzioni radiative di secondo ordine di qualunque processo elettromagnetico, tali correzioni danno di solito contributo molto piccolo all'intero processo studiato. I due esperimenti di cui mi occuperò sono il  $g_\mu - 2$  e il Delbruck scattering.

L'esperimento per la misura del momento magnetico anomalo del muone, definito da:

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} \quad (1.47)$$

ove  $g_\mu$  è il rapporto giromagnetico, rappresenta una delle verifiche più precise della elettrodinamica quantistica.

A livello attuale la miglior misura di  $a_\mu$  viene da un esperimento svoltosi al CERN (Bailey *et al* 1979)<sup>3</sup>, che fornì il risultato:

$$a_\mu^{exp} = (1\,165\,923 \pm 8.5) \times 10^{-9} \quad (1.48)$$

Il calcolo teorico fornisce invece il valore (Kinoshita 1992):

$$a_\mu^{th} = (1\,165\,919.2 \pm 1.8) \times 10^{-9} \quad (1.49)$$

<sup>3</sup>E' in fase di allestimento un esperimento a Brookhaven che prevede un miglioramento nella precisione di un fattore 20.

La concordanza di tali valori dimostra come tale esperimento rappresenta una pietra miliare per la QED. Il calcolo viene fatto assumendo il muone una particella senza struttura descritta da un campo di Dirac, ed esso deriva dalle correzioni radiative al processo semplice di figura 1.9.

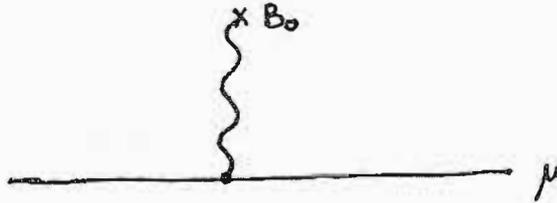


Figura 1.9: Interazione di un muone con il campo esterno

Nel calcolo di  $a_\mu$  vi è una parte dovuta al diagramma di Feynman di interazione fotone-fotone, la cui entità è:

$$a_\mu^{(\gamma-\gamma)} = (267.17 \pm 0.04) \times 10^{-9} \quad (1.50)$$

Ne consegue quindi, dati gli errori del calcolo e del risultato sperimentale, che tale esperimento verifica l'esattezza del grafico di interazione  $\gamma - \gamma$  ad un livello del 4 % circa, nonostante il fatto che il suo contributo sia dell'ordine di  $2.3 \times 10^{-4}$  volte l'intera anomalia. Questo test, però, deve essere considerato una verifica indiretta poichè è basato su una interpretazione del risultato sperimentale che richiede alcune ipotesi sulla interazione del muone. Nell'esperimento PVLAS quello che si va a cercare è direttamente una non linearità delle equazioni di Maxwell.

Lo scattering Delbruck è una correzione radiativa allo scattering Compton di un fotone su un nucleo. Assumendo il campo nucleare come un campo di Coulomb statico, al processo considerato contribuisce anche un termine di interazione fotone-fotone, descritto dal grafico di figura 1.10.

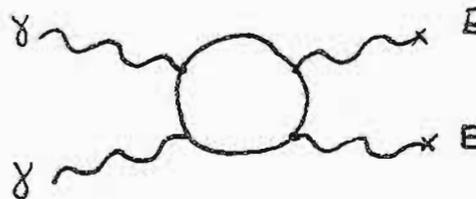


Figura 1.10: Diagramma di Feynman per lo scattering della luce da un potenziale elettrico

Nel calcolo della sezione d'urto differenziale compaiono altri termini, ed il processo dominante è lo scattering Thomson. Kahane *et al* (1977) misurarono l'andamento della sezione d'urto usando fasci  $\gamma$  di energia 9 MeV (cioè sopra la soglia di produzione di coppie)

su nuclei di  $^{181}\text{Ta}$  ( $Z=73$ ). In figura 1.11 sono riportati i loro risultati assieme alle previsioni teoriche con (linea continua) e senza (linea tratteggiata) il contributo derivante dal termine di interazione fotone-fotone. L'errore sulla verifica di quest'ultimo termine si può stimare intorno al 20%.

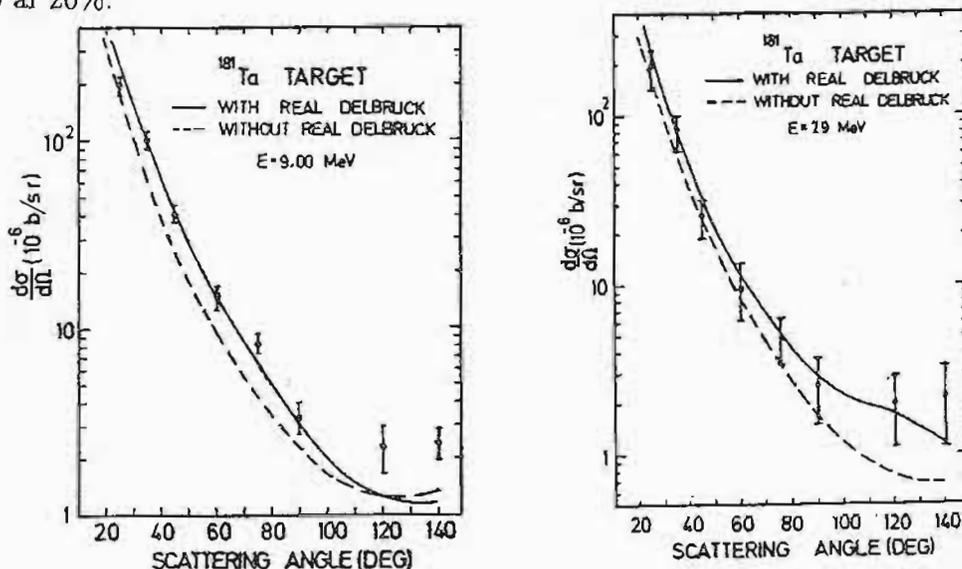


Figura 1.11: Risultati sperimentali concernenti lo scattering Delbruck su nuclei di tantalio

## 1.4 Altre proposte in corso

Esistono allo stato attuale una serie di proposte aperte per la verifica della non linearità delle equazioni di Maxwell. Vi accennerò brevemente per completezza. Un gruppo giapponese (Ni *et al* 1991) ha presentato un progetto in cui si vuole utilizzare un interferometro di Michelson con cavità Fabry-Pérot. Uno dei bracci attraversa una regione di campo magnetico e si prevede la possibilità di aggiungervi anche un campo elettrico per avere la tecnica da loro chiamata di 'Doppia modulazione'. Voglio qui notare che gli effetti non lineari indotti da campi elettrici non sono stati da me discussi, ma dalla forma della lagrangiana di Heisenberg-Euler si possono analogamente dedurre. I campi elettrici che si sanno produrre hanno effetti minori rispetto a quelli magnetici essenzialmente per la minor ampiezza dei campi che si riesce a realizzare.

Più recente la proposta di una collaborazione cino-americana (Ni *et al* 1994) in cui si pensa di utilizzare una sezione dismessa dell'acceleratore SSC (Superconducting Super Collider). In questo modo un braccio di un interferometro percorrerebbe una regione di campo magnetico della lunghezza di circa 155 metri avente un campo di 6.6 tesla.

Esiste una seconda proposta molto simile a quella appena citata (Lee *et al* 1994), che vuole sfruttare una diversa sezione dismessa dell'acceleratore SSC, con una lunghezza del campo intorno ai 70 metri.

## 1.5 Mescolamento del fotone con particelle di massa piccola

Una particella, se ha un vertice a due fotoni (figura 1.12a), può essere creata da un fotone attraversando una regione di campo magnetico esterno (effetto Primakoff, figura 1.12b).



Figura 1.12: (a) Particella con vertice a due fotoni e (b) effetto Primakoff.

In più, se tale particella è molto leggera o ha massa nulla si può ottenere una degenerazione con il fotone. Ci si attende in tal caso un fenomeno di mescolamento fra il fotone e la particella (Raffelt and Stodolsky 1987). Fra le particelle conosciute o proposte quella che maggiormente si può presentare come candidata per tali fenomeni è l'assione (Peccei and Quinn 1977a, 1977b). Tale particella fu introdotta per cercare di risolvere il cosiddetto 'Problema di CP forte' (Cheng 1988): la simmetria CP è violata dalla lagrangiana della cromodinamica quantistica ma a livello sperimentale tale violazione non è mai stata osservata nelle interazioni forti.

L'assione è una particella pseudoscalare a spin 0 che si accoppia a due fotoni mediante il grafico di figura 1.13, detto anomalia triangolare. Utilizzando la lagrangiana efficace (in unità naturali Heaviside-Lorentz usate per semplicità in questa sezione):

$$\mathcal{L}_p^{eff} = \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.51)$$

ove  $F_{\mu\nu}$  è il tensore e.m. ( $\tilde{F}$  è il suo duale),  $a$  è il campo assionico, e  $g_{a\gamma\gamma}$  una costante (dimensionale) che caratterizza l'interazione, si può esprimere l'interazione assione-fotone con un grafico del tipo di figura 1.12a. Nei tipici modelli per l'assione che si considerano

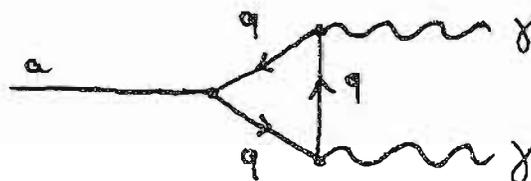


Figura 1.13: Anomalia triangolare

(Turner 1990), in cui tale particella viene incorporata nelle piú semplici teorie di grande unificazione, la costante di accoppiamento  $g_{a\gamma\gamma}$  risulta proporzionale alla massa  $m_a$  mediante la relazione:

$$g_{a\gamma\gamma} \sim \frac{m_a}{m_\pi} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{f_\pi} \quad (1.52)$$

ove  $m_\pi = 135$  MeV e  $f_\pi = 93$  MeV sono rispettivamente la massa e la costante di decadimento del pione neutro. Le varie ricerche sinora condotte per la rivelazione dell'assione hanno dato tutte risultato negativo, spiegabile essenzialmente con il debole accoppiamento previsto. La finestra di valori di massa  $m_a$  ancora ammissibili (Turner 1990) è la seguente:

$$10^{-6} \text{ eV} < m_a < 10^{-3} \text{ eV} \quad (1.53)$$

a cui corrispondono per l'accoppiamento  $g_{a\gamma\gamma}$  valori dell'ordine di  $10^{-13} \text{ GeV}^{-1}$ , ben al di sotto della scala debole.

### 1.5.1 Rivelazione dell'assione

L'esperimento PVLAS descritto in precedenza (sezione 1.2) permette di effettuare una ricerca di particelle che si accoppiano a due fotoni con un processo descritto dalla lagrangiana (1.51) (Maiani, Petronzio, Zavattini 1986). In tale esperimento un fascio laser di energia  $\omega$ , linearmente polarizzato, attraversa una regione di vuoto ove è presente un campo magnetico trasverso. Per un campo magnetico statico  $B_0$  e fotoni reali, la (1.51) si può scrivere:

$$\mathcal{L}_p^{eff} = g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{E}_f \cdot \mathbf{B}_0 \quad (1.54)$$

ove  $\mathbf{E}_f$  è il campo elettrico del fotone. A causa di questa forma dell'interazione, la produzione di particelle, come dal grafico di fig 1.12b, avviene solamente per la componente del campo elettrico del fotone parallela al campo esterno. Se la massa della particella  $m_a$  è inferiore all'energia  $\omega$  le particelle prodotte sono reali e si ha una conseguente attenuazione della componente parallela di  $\mathbf{E}_f$  (dicroismo), mentre l'altra rimane inalterata. Il vettore  $\mathbf{E}_f$  manifesta quindi una rotazione  $\rho$  dopo aver attraversato il campo magnetico (figura 1.14).

Se l'assione prodotto interagisce con il campo esterno si può riconvertire di nuovo in un fotone reale, come descritto dal diagramma di figura 1.15.

In questo caso non vi è assorbimento, ma la componente parallela della luce oscilla in un assione massivo per parte del suo cammino, ed è così ritardata in fase rispetto alla componente ortogonale. Questo ritardo appare come una ellitticità del fascio uscente. Si noti come nel processo di figura 1.15 l'assione che vi compare non debba essere necessariamente reale.

Notiamo infine che la produzione di assioni sarà massima in caso di coerenza, cioè quando i campi dell'assione e del fotone rimangono in fase lungo la zona di campo magne-



Figura 1.14: Rotazione dovuta ad assorbimento selettivo di una componente

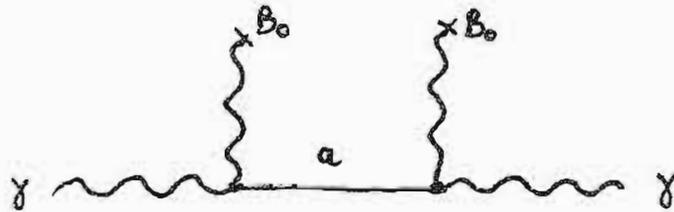


Figura 1.15: Produzione di assioni con riconversione

tico. Fissata la lunghezza  $l$  della zona di campo questo si traduce in un limite sui possibili valori di massa  $m_a$  che si possono ricercare, come verrà illustrato nel prossimo paragrafo.

### 1.5.2 L'assione e la propagazione del fotone

La lagrangiana di una particella pseudoscalare (indicata generalmente con "assione") in un campo elettromagnetico si scrive:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \frac{1}{2}(\partial_\mu a \partial^\mu a - m_a^2 a^2) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (1.55)$$

Le risultanti equazioni del moto, al primo ordine nel campo del fotone  $\mathbf{A}$  ed in quello dell'assione  $a$  si scrivono:

$$(\square + m_a^2)a - g_{a\gamma\gamma} \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (1.56)$$

$$\square \mathbf{A} + g_{a\gamma\gamma} \dot{a} \mathbf{B}_0 = 0$$

nella gauge  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e scelta la direzione di propagazione ortogonale a  $\mathbf{B}_0$  (Campo esterno trasverso).

Una elegante soluzione di queste equazioni è stata data da Raffelt e Stodolsky (1987) nel

caso del vuoto<sup>4</sup>. Essi ricavarono il ritardo di fase  $\phi_a$  e l'attenuazione  $\delta_a$  della componente del campo del fotone parallela al campo magnetico esterno, per un percorso di lunghezza  $z$ :

$$\phi_a = \theta_a^2 \left[ \frac{m_a^2 z}{2\omega} - \sin \left[ \frac{m_a^2 z}{2\omega} \right] \right] \quad (1.57)$$

$$\delta_a = 2\theta_a^2 \sin^2 \left[ \frac{m_a^2 z}{4\omega} \right]$$

ove  $\theta$  è l'angolo di mescolamento fra fotone e assione, definito da

$$\frac{1}{2} \tan 2\theta_a = g_{a\gamma\gamma} \frac{B_0 \omega}{m_a^2} \sim \theta_a \quad (1.58)$$

e l'approssimazione fatta vale in quanto il mescolamento è debole come si ricava sostituendovi i valori attesi.

I parametri fisici che si misurano sono una ellitticità  $\psi_a$  ed una rotazione  $\rho_a$  della polarizzazione del fascio luminoso. Per la loro determinazione si deve tener conto delle caratteristiche dell'apparato che si utilizza: campo magnetico rotante e cavità Fabry-Pérot. La dipendenza di  $\psi_a$  e  $\rho_a$  dall'angolo della polarizzazione va come  $\sin 2\varphi$ , con  $\varphi$  l'angolo fra il vettore campo elettrico del fotone ed il campo magnetico esterno. L'utilizzo del Fabry-Pérot consente di amplificare l'effetto da misurare, anche se qui non si può direttamente interpretare come un aumento del cammino ottico: gli specchi della cavità sono trasparenti per l'assione e quindi solo l'onda associata al fotone può essere riflessa. Per questo ogni riflessione agisce come un "filtro" per la componente assionica riportandola a zero. La fase e l'attenuazione in un singolo passaggio, di lunghezza  $l$ , scalano quindi linearmente con il parametro di amplificazione della cavità  $2\mathcal{F}/\pi$  (Appendice A). Scriviamo quindi le relazioni<sup>5</sup>:

$$\psi_a = g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 \omega^2}{\pi m_a^4} \left[ \frac{m_a^2 l}{2\omega} - \sin \left[ \frac{m_a^2 l}{2\omega} \right] \right] \sin 2\varphi \simeq g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 m_a^2 l^3}{48\pi\omega} \quad (1.59)$$

$$\rho_a = g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{2\mathcal{F} B_0^2 \omega^2}{\pi m_a^4} \sin^2 \left[ \frac{m_a^2 l}{4\omega} \right] \sin 2\varphi \simeq g_{a\gamma\gamma}^2 \frac{\mathcal{F} B_0^2 l^2}{8\pi} \quad (1.60)$$

Le espressioni approssimate in tali equazioni seguono dallo sviluppo del seno e sono valide solo nel limite:

$$m_a^2 l / 4\omega \ll 1 \quad (1.61)$$

<sup>4</sup>In presenza di gas a bassa pressione la soluzione è stata da me ricavata in un precedente lavoro (Ruoso 1991).

<sup>5</sup>Unità naturali Heaviside-Lorentz con  $1 \text{ T} = 195 \text{ eV}^2$ ,  $1 \text{ m} = 5 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$ .

questo coincide con la condizione di massima produzione di assioni reali e corrisponde alla condizione di coerenza:

$$m_a^2 < 2\pi\omega/l \quad (1.62)$$

che mantiene la fase relativa fra i campi sulla lunghezza del magnete. Nel caso della misura di ellitticità, la massima sensibilità si ottiene invece per:

$$m_a^2 = 2\pi\omega/l. \quad (1.63)$$

Data la lunghezza  $l = 0.9$  m del magnete ciò significa per le masse valori:

$$m_a \lesssim 10^{-3} \text{ eV}. \quad (1.64)$$

### 1.5.3 La ricerca dell'assione nell'esperimento PVLAS

Nell'esperimento PVLAS è possibile effettuare misure separate dei due parametri  $\psi_a$  e  $\rho_a$  definiti dalle (1.59) e (1.60).

Le misure di due parametri distinti permette di avere informazioni su  $g_{a\gamma\gamma}$  ed  $m_a$  indipendentemente dal modello scelto per la particella. Un segnale positivo fornirà quindi direttamente massa e costante di accoppiamento della particella, mentre la mancata rivelazione escluderà una zona del piano  $(g_{a\gamma\gamma}, m_a)$ . In figura 1.16 sono mostrati i limiti fissati dall'esperimento LAS (Cameron *et al* 1993), di cui si è parlato nella sezione precedente ed al quale ho partecipato nel primo anno di dottorato.

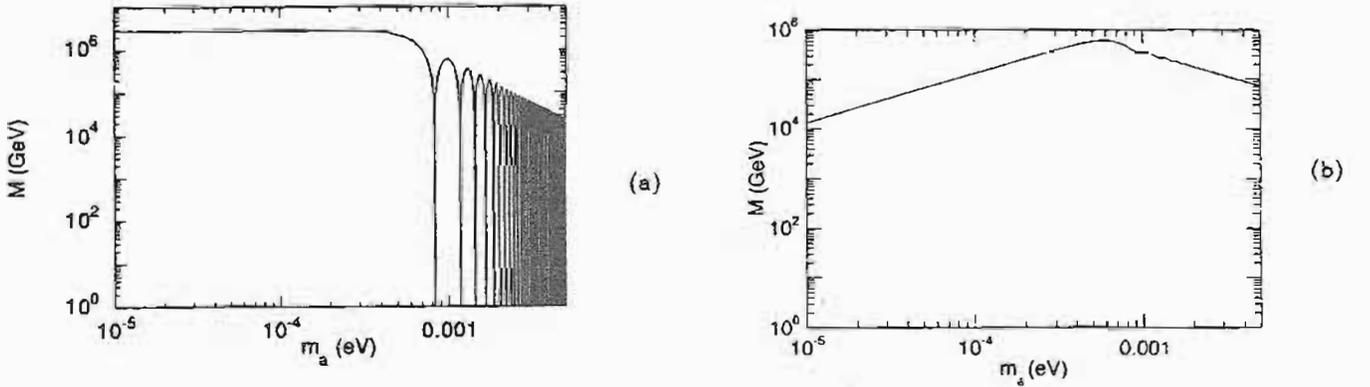


Figura 1.16: Limiti superiori per l'inverso dell'accoppiamento assione-fotoni ( $g_{a\gamma\gamma} = 1/M$ ) dall'esperimento LAS. (a) Limiti dalla misura di rotazione. (b) Limiti dalla misura di ellitticità.

Notiamo che il segnale relativo a particelle a massa piccola è perfettamente distinguibile da quello della birifrangenza magnetica del vuoto in quanto quest'ultimo fenomeno non contribuisce alla rotazione.

### 1.5.4 Particelle scalari

La lagrangiana (1.51) descrive il grafico di figura (1.12) nel caso di particelle pseudoscalari, e si deve modificare in:

$$\mathcal{L}_s^{eff} = g_{s\gamma\gamma}\phi_s F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.65)$$

qualora si abbia una particella scalare descritta dal campo  $\phi_s$ . In tal caso gli effetti che si manifestano sono del tutto simili a quelli previsti per l'assione, con la differenza che ora la componente della polarizzazione interessata è quella ortogonale al campo magnetico esterno. Detto  $\varphi_s$  l'angolo fra il campo magnetico del fotone ed il campo esterno, rispetto all'angolo  $\varphi$  che compare nelle (1.59 - 1.60) vi è una differenza di  $\pi/2$ . Si ha quindi:

$$\sin 2\varphi_s = -\sin 2\varphi \quad (1.66)$$

e gli effetti sono semplicemente cambiati di segno rispetto a quelli calcolati per il caso pseudoscalare.

## 1.6 Fenomeni meno rilevanti

In un apparato sperimentale come quello descritto in questo capitolo possono aver luogo anche altri tipi di fenomeni. Il processo chiamato 'photon splitting', cioè la conversione di un fotone in una coppia di fotoni, può avvenire in presenza di un campo esterno (Adler 1971). Tale processo è però omogeneo per i diversi stati di polarizzazione e quindi non sarebbe visibile con l'apparato proposto. I campi magnetici che si riescono a fare danno luogo comunque ad uno splitting molto al di sotto della sensibilità realizzabile per la verifica di tale processo in un laboratorio terrestre.

L'utilizzo di cavità a finezze sempre più elevate può invece avere come conseguenza che il campo magnetico associato al fotone non sia più trascurabile rispetto al campo esterno. In questo caso la soluzione data nel paragrafo 1.1.3 non è corretta e si deve risolvere un sistema di equazioni più complesso.

Ulteriori correzioni alla soluzione proposta in questa tesi sono in fase di studio (Bakalov 1994a), e riguardano ad esempio la presenza di gradienti nel campo esterno o la non uniformità del fascio luminoso, che proviene da un laser ed ha quindi profilo gaussiano (Si veda anche Ding e Kaplan 1991). Una prima stima ha comunque messo in evidenza che eventuali altri fenomeni sono molto al di sotto della sensibilità prevista per l'apparato di misura.



$E_t$  è l'ampiezza del campo trasmesso,  $\delta$  è il ritardo di fase sul percorso fra i due specchi (andata e ritorno):

$$\delta = 4\pi n \frac{d}{\lambda} \quad (2.3)$$

$n$  è l'indice di rifrazione.

Sia  $\delta_0$  lo sfasamento in risonanza, vale quindi:

$$e^{\pm i\delta_0} = 1 \quad \delta_0 = 2\pi k \quad k = \text{intero} \quad (2.4)$$

Fissata tale condizione possiamo calcolare il comportamento della funzione di trasferimento in presenza di birifrangenze infinitesime in un tratto del mezzo fra gli specchi.

Individuiamo due assi ortogonali per i quali si scrive:

$$\begin{aligned} n_{\parallel} &= n_0 + \frac{\Delta n}{2} \\ n_{\perp} &= n_0 - \frac{\Delta n}{2} \\ \Delta n &= n_{\parallel} - n_{\perp} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Piccole variazioni dell'indice di rifrazione implicano scostamenti dello sfasamento  $\delta$  dal valore di risonanza  $\delta_0$ , si considera quindi lo sviluppo in serie:

$$H^t(\delta) = H^t(\delta_0) + (\delta - \delta_0) H'^t(\delta_0) \quad (2.6)$$

e si calcolano le funzioni di trasferimento per i due assi considerati:

$$H_{\perp}^t(\delta) = H^t(\delta_0) - 2\beta H'^t(\delta_0) \quad (2.7)$$

$$H_{\parallel}^t(\delta) = H^t(\delta_0) + 2\beta H'^t(\delta_0)$$

$$2\beta = \delta(n_{\parallel}) - \delta(n_0) = 2\pi \frac{L}{\lambda} \Delta n \quad (2.8)$$

La distanza  $L$  che compare indica la lunghezza del mezzo birifrangente. Notiamo che la (2.8) ci dice che  $\beta$  è esattamente la ellitticità massima (vedi (1.25)) acquisita da un fascio luminoso in un passaggio singolo nel mezzo birifrangente.

Per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto, discussa nel capitolo 1, le due direzioni sono quelle parallela ed ortogonale al campo magnetico esterno  $\mathbf{B}_0$ . Dalla relazione per  $\Delta n$  di tabella 1.1 segue:

$$\beta = 3\pi \frac{L}{\lambda} A B_0^2 \sim 10^{-15} \quad (2.9)$$

il che giustifica ampiamente le approssimazioni fatte.

Sostituendo nelle (2.7) la (2.2) si ricava:

$$H_{\perp}^t(\delta) = h_1 - 2i\beta h_2 \quad (2.10)$$

$$H_{\parallel}^t(\delta) = h_1 + 2i\beta h_2 \quad (2.11)$$

$$h_1 = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \quad h_2 = \frac{t_1 t_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (2.12)$$

## 2.2 Misura con la tecnica eterodina

### 2.2.1 Matrici di Jones per gli elementi ottici

Nella sezione 1.2 si è illustrato lo schema generale della misura della birifrangenza del vuoto effettuata mediante la tecnica eterodina. Se ne illustrano ora le caratteristiche in dettaglio.

Per la misura di piccole ellitticità si utilizza un apparato come quello dello schema di figura 2.2.

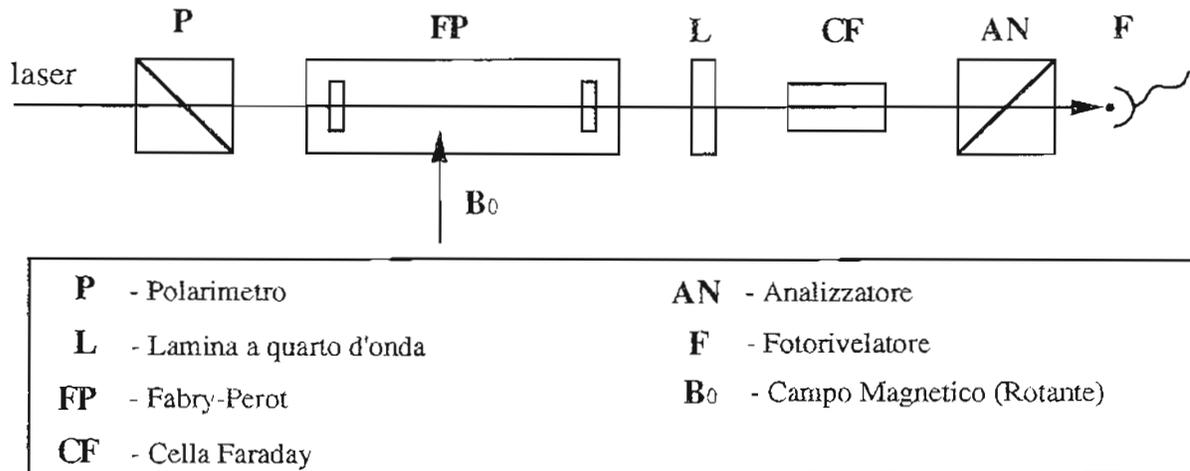


Figura 2.2: Schema per la misura di piccole birifrangenze.

In tale schema un fascio linearmente polarizzato tramite **P** acquisisce una ellitticità  $\psi$  nell'attraversare una regione di campo magnetico in vuoto. Una lamina a quarto d'onda, opportunamente orientata, trasforma l'ellitticità  $\psi$  del fascio in rotazione di pari ampiezza, che successivamente si mescola con la rotazione nota  $\eta$  introdotta da una cella di Faraday **CF**. Il segnale al fotodiode **F** è l'intensità luminosa associata alla componente selezionata dal polarizzatore **AN**, incrociato con quello d'ingresso **P**.

Per descrivere l'apparato si utilizza il formalismo delle matrici di Jones (Azzam e Bashara 1987). In tale rappresentazione, scegliendo come asse  $x$  la direzione di polarizzazione determinata da  $\mathbf{P}$ , si può scrivere il vettore campo elettrico della luce all'uscita del primo polarimetro:

$$\mathbf{E}_f(t) = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Le matrici per l'analizzatore e la lamina a quarto d'onda (ruotata di  $\alpha_L$  rispetto alla polarizzazione iniziale):

$$\mathbf{AN} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_L + i \cos^2 \alpha_L & (i-1) \sin \alpha_L \cos \alpha_L \\ (i-1) \sin \alpha_L \cos \alpha_L & i \sin^2 \alpha_L + \cos^2 \alpha_L \end{bmatrix}$$

ove  $\sigma^2$  è l'estinzione (in genere dell'ordine di  $10^{-7}$  per dei buoni polarizzatori come i Glan Thompson).

La cella di Faraday effettua semplicemente una rotazione della polarizzazione di un angolo  $\eta \ll 1$ , modulato nel tempo:

$$\mathbf{CF} = \begin{bmatrix} 1 & \eta(t) \\ -\eta(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\eta(t) = \eta_0 \cos \omega_f t \quad (2.15)$$

Ampiezze tipiche per  $\eta_0$  sono dell'ordine di  $10^{-3}$  radianti, con  $\omega_f/2\pi$  dell'ordine di  $10^2$  Hz.

Per ricavare la matrice associata al Fabry-Pérot si deve tener conto che l'effetto di birifrangenza è dovuto al campo esterno rotante. Fissato in  $\varphi(t)$  l'angolo fra la polarizzazione della luce e  $\mathbf{B}_0$  scriveremo:

$$\begin{aligned} \mathbf{FP} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{\parallel}^t(\delta) & 0 \\ 0 & H_{\perp}^t(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_{\perp}^t(\delta) \sin^2 \varphi(t) + H_{\parallel}^t(\delta) \cos^2 \varphi(t) & \frac{1}{2}(H_{\parallel}^t(\delta) - H_{\perp}^t(\delta)) \sin 2\varphi(t) \\ \frac{1}{2}(H_{\parallel}^t(\delta) - H_{\perp}^t(\delta)) \sin 2\varphi(t) & H_{\parallel}^t(\delta) \sin^2 \varphi(t) + H_{\perp}^t(\delta) \cos^2 \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 + 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) & 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) \\ 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) & h_1 - 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\varphi(t) = \omega_m t + \phi_m \quad (2.17)$$

con  $\omega_m/2\pi = 1$  Hz come enunciato al paragrafo 1.2.3.

Si deve inoltre introdurre una ulteriore matrice  $\mathbf{S}$  che tenga conto di eventuali errori di allineamento degli elementi ottici. Per esempio, a causa di rilassamenti meccanici o

di variazioni di temperatura, gli angoli fra gli assi dei polarizzatori possono variare lentamente nel tempo spostandosi dalle condizioni ottimali di misura. Chiamiamo  $\theta_s$  l'angolo di misallineamento (che possiamo pensare costante in questa analisi) e scriviamo la matrice:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_s \\ -\theta_s & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Tale matrice commuta con **AN** e **CF** ma non con le altre. Poichè però si può pensare quale elemento fisso il primo polarizzatore, la considereremo posta giusto prima della cella di Faraday. Sperimentalmente si riesce a mantenere  $\theta_s$  inferiore a  $10^{-5}$  rad.

## 2.2.2 Rivelazione del segnale

La quantità fisica da misurare è l'ellitticità  $\psi$  introdotta dal vuoto reso birifrangente tramite il campo magnetico esterno. All'uscita del Fabry-Pérot possiamo rappresentare la luce mediante:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = E_0 e^{i\omega t} \mathbf{FP} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} h_1 + 2i\beta h_2 \cos 2\varphi(t) \\ 2i\beta h_2 \sin 2\varphi(t) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

L'ellitticità è il rapporto fra le ampiezze delle due componenti (minore su maggiore) e si scrive:

$$\psi \simeq \frac{|E_y|}{|E_x|} \simeq 2\beta \frac{h_2}{h_1} \sin 2\varphi(t) = \psi_0 \sin 2\varphi(t) \quad (2.20)$$

$$\psi_0 = 2\beta \frac{h_2}{h_1} \simeq 2\beta \frac{\mathcal{F}}{\pi}$$

ove si è tenuto conto della definizione di finezza  $\mathcal{F}$  data in precedenza (paragrafo 1.2.2). Ricordando che  $\beta$  è l'ellitticità per un passaggio nel mezzo birifrangente, come visto dalla (2.8), la (2.20) ci dice che l'effetto del Fabry-Pérot è di amplificare per il fattore  $2\mathcal{F}/\pi$ .

Vediamo quindi quali sono i segnali attesi. Seguendo la figura 2.2 l'intensità  $I_{ph}$  della luce che incide sul fotodiode è:

$$I_{ph} = I_0 |\mathbf{m}_t|^2 \quad (2.21)$$

$$\mathbf{m}_t = \mathbf{AN} \times \mathbf{CF} \times \mathbf{S} \times \mathbf{L} \times \mathbf{FP} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ove  $I_0 \propto E_0^2$  è l'intensità della luce che esce dal polarizzatore **P**, e  $\mathbf{m}_t$  assume la forma:

$$\mathbf{m}_t = \begin{pmatrix} m_\sigma \\ m_t \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Sostituendovi le matrici di Jones per ogni elemento, scegliendo  $\alpha_L = 0$  e trascurando per  $m_i$  i termini  $\eta\theta_s\beta$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} m_i &= 2\eta(t)\beta h_1 \cos 2\varphi(t) + 2\theta_s\beta h_1 \cos 2\varphi(t) + \\ &+ i[-\eta(t)h_1 - \theta_s h_1 + 2\beta h_2 \sin 2\varphi(t)] \\ m_\sigma &\simeq i\sigma h_1 \end{aligned}$$

Trascurando ora i termini contenenti i fattori  $\theta_s\beta$ ,  $\theta_s^2$ ,  $\beta^2$ , l'intensità della luce sul fotodiodo si scrive:

$$\begin{aligned} I_{ph}(t) &\simeq I_0 \left[ \sigma^2 h_1^2 + \eta^2(t) h_1^2 + 2\eta(t)\theta_s h_1^2 - 4\eta(t)\beta h_1 h_2 \sin 2\varphi(t) \right] = \\ &= I_0 \left[ \sigma^2 h_1^2 + \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2 + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2 \cos 2\omega_f t + \right. \\ &\quad \left. + 2h_1^2 \theta_s \eta_0 \cos \omega_f t + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_0 \beta h_1 h_2 \cos \left[ (\omega_f + 2\omega_m)t + 2\phi_m + \frac{\pi}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\eta_0 \beta h_1 h_2 \cos \left[ (\omega_f - 2\omega_m)t - 2\phi_m - \frac{\pi}{2} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

ove si sono esplicitate le dipendenze temporali come date nel paragrafo precedente. Il segnale  $I_{ph}(t)$  viene successivamente analizzato armonicamente mediante un analizzatore di spettro, che esegue la trasformata di Fourier. In tabella 2.1 sono esplicitate le componenti armoniche principali (in unità di intensità  $I_0$ )

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza	fase
$I_{dc}$	0	$\sigma^2 h_1^2 + \frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2$	
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$2\beta h_1 h_2 \eta_0$	$\phi_- = -2\phi_m - \frac{\pi}{2}$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0 \theta_s h_1^2$	
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$2\beta h_1 h_2 \eta_0$	$\phi_+ = 2\phi_m + \frac{\pi}{2}$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2} h_1^2 \eta_0^2$	

Tabella 2.1: Componenti del segnale trasmesso, l'ampiezza è in unità  $I_0$ .

Utilizzando tali componenti armoniche si ricava il rapporto:

$$\frac{I_- + I_+}{I_{2f}} = 8 \frac{\beta h_2}{\eta_0^2 h_1} = 4 \frac{\psi_0}{\eta_0} \quad (2.25)$$

ove si è utilizzata la definizione di  $\psi_0$  della (2.20). Invertendo l'ultima relazione scritta segue:

$$\psi_0 = \eta_0 \frac{I_- + I_+}{4I_{2f}} \quad (2.26)$$

Al secondo membro compaiono tutte quantità note e quindi si può ricavare la grandezza  $\psi_0$ , direttamente legata all'effetto di birifrangenza del vuoto da (si veda (2.9)):

$$\psi_0 = 6\mathcal{F}AB_0^2 \frac{L}{\lambda} \quad (2.27)$$

Un tipico spettro che mostra l'andamento di  $I_{ph}$  in funzione della frequenza è mostrato in figura 2.3.

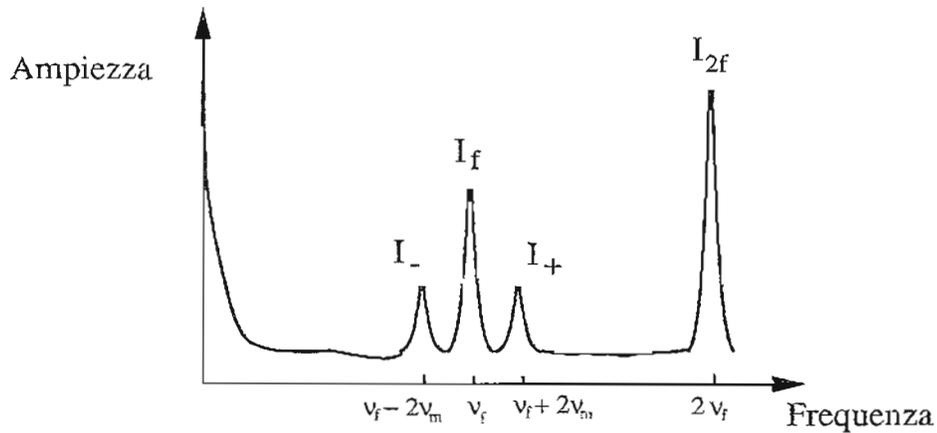


Figura 2.3: Tipico spettro di  $I_{ph}$ .

A causa dei piccoli valori ottenibili per  $\omega_m$  il segnale relativo a  $\psi$  appare come due picchi satelliti rispetto ad una portante alla frequenza di modulazione della cella Faraday. Il tutto sopra un fondo che è il rumore connesso alla misura, di cui si discuterà in seguito.

### 2.2.3 rivelazione in riflessione

Lo schema di figura 2.2 utilizza il Fabry-Pérot nel modo 'trasmissione'. E' possibile però utilizzare la cavità in riflessione, adottando uno schema come quello di figura 2.4.

Le tecniche sono sostanzialmente equivalenti. Il modo in trasmissione è più "pulito": come si vedrà in seguito per agganciare la frequenza del laser alla risonanza del Fabry-Pérot bisogna modulare il fascio ad alta frequenza e tali componenti di modulazione si ritrovano solo sul segnale riflesso.

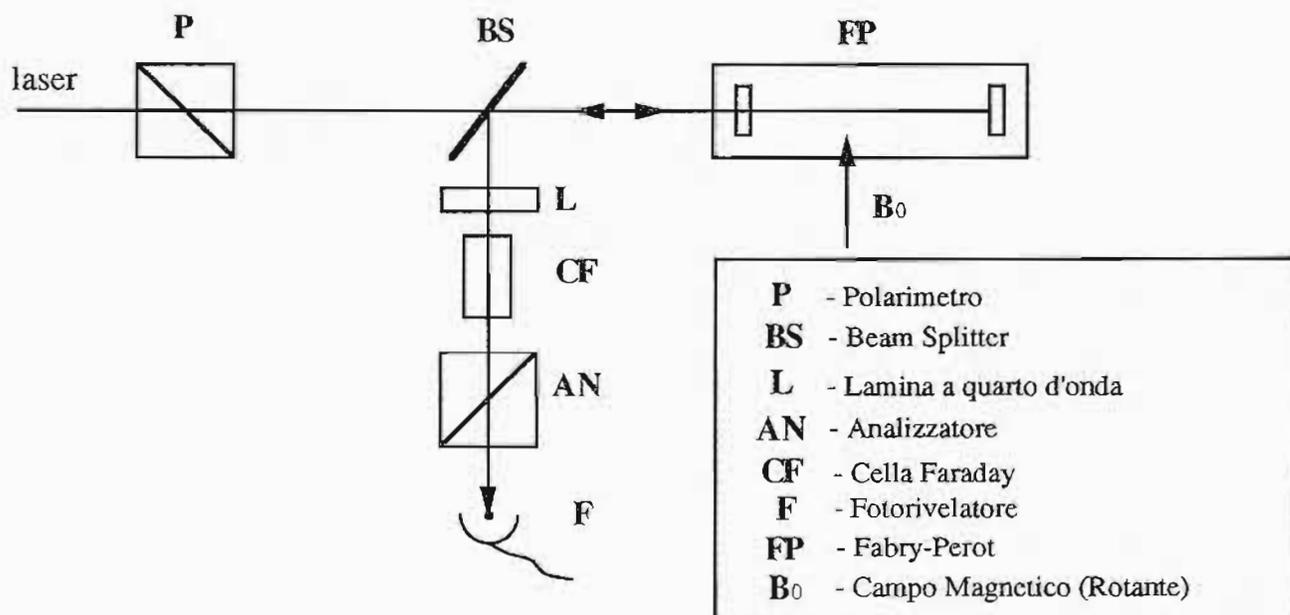


Figura 2.4: Schema per la rivelazione in riflessione.

## 2.3 Rapporto segnale rumore e tempo di misura

Come discusso in precedenza l'informazione cercata è l'ampiezza dell'intensità al fotodiode in corrispondenza delle frequenze  $\omega_f \pm 2\omega_m$ . A causa del valore dell'ellitticità  $\psi_0$  tali ampiezze risultano molto piccole rispetto al segnale che si ha in continua.

La componente continua genera un rumore shot a cui corrisponde una corrente  $i_{shot}$  di ampiezza spettrale:

$$i_{shot} = \sqrt{2ei_{dc}\Delta f} \quad (2.28)$$

ove  $\Delta f$  è la banda di misura, e  $i_{dc}$  è la corrente continua uscente dal fotodiode, legata alla intensità  $I_{dc}$  della luce sul fotodiode dalla efficienza quantica  $q$ :

$$i_{dc} = \frac{eI_{dc}q}{h\nu} \quad (2.29)$$

Poniamoci quindi nella condizione in cui il solo rumore presente sia quello shot, e andiamo a discutere la visibilità dei picchi associati al segnale.

Definiamo per la cavità il coefficiente efficienza  $\eta_{FP} = h_1^2$  che esprime il rapporto fra la potenza trasmessa e quella incidente. Valori tipici per  $\eta_{FP}$  sono fra il 10 % ed il 30%. Riscriviamo la tabella 2.1 esplicitando la ellitticità  $\psi_0$  che si misura, scrivendo le ampiezze in unità  $\eta_{FP}I_0$ .

Con i dati della nuova tabella 2.2 calcoliamo la corrente  $i_{shot}$  del rumore shot:

$$i_{shot} = \sqrt{2e^2 \left( \sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2 \right) \frac{\eta_{FP}I_0q}{h\nu} \Delta f} \quad (2.30)$$

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza
$I_{dc}$	0	$\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2$
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$\psi_0\eta_0$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0\theta_s$
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$\psi_0\eta_0$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2}\eta_0^2$

Tabella 2.2: Componenti del segnale trasmesso, ampiezze in unità  $\eta_{FP}I_0$

e quella  $i_s$  associata ad uno dei picchi del segnale:

$$i_s = eI_+ \frac{q}{h\nu} = e\psi_0\eta_0\eta_{FP} \frac{q}{h\nu} I_0 \quad (2.31)$$

Se si tiene conto che abbiamo due picchi il segnale raddoppia rispetto alla (2.31) e il rumore cresce di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto alla (2.30). Si ottiene quindi il rapporto segnale rumore SNR in caso di solo rumore shot (si considera ora il valore di picco anzichè quello rms dato dalla (2.28)):

$$\text{SNR} = \frac{i_s}{i_{shot}} = \frac{\psi_0\eta_0}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta_0^2}} \sqrt{\frac{\eta_{FP}I_0q}{2h\nu}} \sqrt{T} \quad (2.32)$$

ove  $T$  è il tempo di misura. Supporremo ora di effettuare una modulazione alla cella di Faraday tale che  $\frac{1}{2}\eta_0^2 \gg \sigma^2$ . In questo caso la (2.32) assume la forma semplice:

$$\text{SNR} = \psi_0 \sqrt{\frac{I_0\eta_{FP}q}{h\nu}} \sqrt{T} \quad (2.33)$$

La sensibilità è definita come l'ellitticità che si misura in un secondo tale che  $\text{SNR}=1$ . Sostituendo tali valori nella relazione appena trovata si ricava la sensibilità  $\psi_{sh}$  corrispondente al rumore shot:

$$\psi_{sh} = \sqrt{\frac{hc}{I_0\eta_{FP}q\lambda}} \quad (2.34)$$

Proviamo a sostituire dei valori tipici per un apparato sperimentale<sup>1</sup>:

$$I_0 = 50 \text{ mW} \simeq 5 \times 10^5 \text{ erg/sec}$$

$$q \simeq 0.9$$

$$\lambda = 10^{-6} \text{ m} = 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\eta_{FP} = 0.2$$

<sup>1</sup>si ricorda  $hc \simeq 2 \cdot 10^{-25} \text{ J m} \simeq 2 \cdot 10^{-16} \text{ erg cm}$ .

si ottiene:

$$\psi_{sh} \simeq 4.7 \times 10^{-9} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (2.35)$$

Ricordiamo che l'ellitticità dovuta alla birifrangenza del vuoto è (si veda equazione (1.36)):

$$\psi_0 = 2\beta \frac{\mathcal{F}}{\pi} = 6 \frac{L\mathcal{F}}{\lambda} AB_0^2 \simeq 2.02 \times 10^{-11} \text{ rad} \quad (2.36)$$

Il che significa che con questi parametri si ottiene SNR=1 per la misura dell'effetto di elettrodinamica quantistica con un tempo di integrazione:

$$T \simeq 5.4 \times 10^4 \text{ sec} \simeq 15 \text{ ore} \quad (2.37)$$

In realtà nella realizzazione dell'esperimento si verifica la presenza di altri rumori, il cui contributo verrà analizzato in seguito (capitolo 5).

## 2.4 Misura di dicroismi per la rivelazione dell'assione

Per la rivelazione di particelle quali l'assione (vedi sezione 1.5) si rende necessaria la misura di rotazioni. Lo schema dell'apparato in questo caso differisce da quello di figura 2.2 soltanto per il fatto che si deve togliere la lamina a quarto d'onda. In questo modo una eventuale rotazione prodotta in cavità può direttamente interferire con la rotazione nota  $\eta(t)$  della cella di Faraday, e si ottengono così segnali simili a quelli visti per la misura di ellitticità.

Possiamo scrivere la matrice di Jones per il Fabry-Pérot in presenza di assorbimento selettivo  $\delta_a$  (Si veda eq. 1.59) della componente del campo elettrico del fotone parallela al campo magnetico esterno (Asse x), chiamando ancora con  $\varphi(t)$  l'angolo di rotazione del magnetone <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{FP} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} H^t(\delta_0) \begin{bmatrix} 1 - \delta_a \frac{2\mathcal{F}}{\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \\ -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{bmatrix} \\ &= h_1 \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \cos^2 \varphi(t) & -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \\ -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) & 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin^2 \varphi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ove  $\varphi(t) = \omega_m t + \phi_m$  e  $h_1 = H^t(\delta_0)$  come visto in 2.1.1.

La luce, polarizzata linearmente in ingresso, all'uscita della cavità si scrive:

---

<sup>2</sup>Si veda l'appendice A.3 per il calcolo esplicito della 2.38

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = h_1 E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \cos^2 \varphi(t) \\ -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

che è luce linearmente polarizzata e ruotata rispetto alla direzione iniziale di un angolo  $\rho(t)$ :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= -\frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \sin 2\varphi(t) \\ &= -\rho_0 \sin 2\varphi(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\rho_0 = \frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} \quad (2.41)$$

Usando anche in questo caso le matrici di Jones per i vari elementi ottici si ricava, fissata con  $I_0$  l'intensità della luce dopo il polarizzatore  $\mathbf{P}$ , l'intensità  $I_{ph}(t)$  al fotodiode:

$$\begin{aligned} I_{ph}(t) &\simeq \eta_{FP} I_0 \left[ \sigma^2 + \eta^2(t) + 2\theta_s \eta(t) + 2\rho_0 \eta(t) \sin 2\varphi(t) - 4\rho_0 \eta^2(t) \cos^2 \varphi(t) \right] \simeq \\ &\simeq \eta_{FP} I_0 \left[ \sigma^2 + \frac{1}{2} \eta_0^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_0^2 \cos 2\omega_f t + \\ &\quad + 2\theta_s \eta_0 \cos \omega_f t + \\ &\quad + \eta_0 \rho_0 \cos \left[ (\omega_f + 2\omega_m)t + 2\phi_m + \frac{\pi}{2} \right] + \\ &\quad \left. + \eta_0 \rho_0 \cos \left[ (\omega_f - 2\omega_m)t - 2\phi_m - \frac{\pi}{2} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.42)$$

Le cui componenti armoniche (In unità  $\eta_{FP} I_0$ ) sono date in tabella 2.3.

componente	frequenza ( $\times 2\pi$ )	ampiezza	fase
$I_{dc}$	0	$\sigma^2 + \frac{1}{2} \eta_0^2$	
$I_-$	$\omega_f - 2\omega_m$	$\rho_0 \eta_0$	$\phi_- = -2\phi_m - \frac{\pi}{2}$
$I_f$	$\omega_f$	$2\eta_0 \theta$	$\phi_f$
$I_+$	$\omega_f + 2\omega_m$	$\rho_0 \eta_0$	$\phi_+ = 2\phi_m + \frac{\pi}{2}$
$I_{2f}$	$2\omega_f$	$\frac{1}{2} \eta_0^2$	

Tabella 2.3: Componenti del segnale trasmesso per rivelazioni di rotazioni, ampiezze in unità  $\eta_{FP} I_0$

Anche in questo caso si ricava la rotazione  $\rho_0$ , direttamente legata alla attenuazione  $\delta_a$ , da:

$$\rho_0 = \frac{\delta_a \mathcal{F}}{\pi} = \eta_0 \frac{I_- + I_+}{4I_{2f}} \quad (2.43)$$

La misura di una rotazione non presenta quindi differenze sostanziali da una misura di ellitticità.

## 2.5 Calibrazione dell'apparato: effetto Cotton-Mouton

Una sostanza in presenza di un campo magnetico esterno diventa birifrangente con un fenomeno noto come effetto Cotton-Mouton (Landsberg 1979). Supponendo di avere un fascio luminoso che attraversa il mezzo si può definire la costante di Cotton-Mouton  $C_{CM}$  mediante la relazione :

$$\Delta n_{CM} = n_{\parallel} - n_{\perp} = C_{CM} \lambda B^2 \quad (2.44)$$

ove  $n_{\parallel}$  e  $n_{\perp}$  sono gli indici di rifrazione per la luce polarizzata rispettivamente parallela e perpendicolare al campo magnetico.  $B$  è la componente del campo esterno ortogonale alla direzione di propagazione della luce di lunghezza d'onda  $\lambda$ . In tabella 2.4 sono riportati i valori di  $C_{CM}$  per alcuni gas a pressione normale.

gas	$C_{CM}$ (gauss <sup>-2</sup> cm <sup>-1</sup> )	condizioni	riferimento
H <sub>2</sub>	$(1.61 \pm 0.11) \times 10^{-18}$	273° K, $\lambda = 514$ nm	Scuri <i>et al</i> 1986
He	$(3.5 \pm 0.7) \times 10^{-20}$	273° K, $\lambda = 514$ nm	Cameron <i>et al</i> 1991
N <sub>2</sub>	$-5.1 \times 10^{-17}$	298° K, $\lambda = 514$ nm	Carusotto <i>et al</i> 1984
O <sub>2</sub>	$-(4.89 \pm 0.11) \times 10^{-16}$	290° K, $\lambda = 514$ nm	Carusotto <i>et al</i> 1982

Tabella 2.4: Costanti di Cotton-Mouton per alcuni gas a pressione normale

Seguendo lo schema sperimentale proposto in figura 2.2 supponiamo di avere all'interno del Fabry-Pérot un gas alla pressione  $P_{gas}$  (espressa in mbar). Ne segue che dopo la cavità la polarizzazione del fascio luminoso avrà una ellitticità:

$$\psi_0^{CM} = 2 \frac{\mathcal{F}L}{\lambda} \Delta n_{CM} \frac{P_{gas}}{1013} = 2\mathcal{F}LC_{CM}B_0^2 \frac{P_{gas}}{1013} \quad (2.45)$$

Se si pone all'interno della cavità 1 mbar di azoto, seguendo tabella 2.4 l'ellitticità prevista è (si suppone  $C_{CM}$  indipendente da  $\lambda$ ):

$$\psi_0^{CM}(N_2, 1 \text{ mbar}) \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (2.46)$$

Questo valore è estremamente più grande di quello dovuto alla birifrangenza magnetica del vuoto ed è misurabile con precisione, fornendo un ottimo metodo di calibrazione per l'apparato.

L'apparato stesso può essere utilizzato per la misura della costante di Cotton-Mouton dei gas per i quali non è ancora nota. Come descritto nella mia tesi di laurea (Ruoso 1991) tale metodo fu usato nell'esperimento LAS (Cameron *et al* 1991) per la misura del valore di  $C_{CM}(\text{He})$  che compare nella tabella.

Notiamo infine che la presenza dell'effetto Cotton-Mouton pone limiti sulle pressioni parziali residue dei gas in cavità durante la misura della birifrangenza magnetica del vuoto. Quest'ultimo effetto vale (1.19):

$$\Delta n_{QED} = 3AB_0^2 \quad (2.47)$$

per cui:

$$\frac{P_{gas}}{1013} \lambda C_{CM} < 3A = 4 \times 10^{-32} \text{ gauss}^{-2} \quad (2.48)$$

che significa, con  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ :

$$\begin{aligned} P(H_2) &< 2.4 \times 10^{-7} \text{ mbar} \\ P(He) &< 1.1 \times 10^{-5} \text{ mbar} \\ P(O_2) &< 0.8 \times 10^{-9} \text{ mbar} \end{aligned} \quad (2.49)$$

## 2.6 Caratteristiche dell'ottica

### 2.6.1 Specchi sferici e perdite per diffrazione

Una cavità Fabry-Pérot reale non si può ottenere con specchi piani come nel caso ideale visto in precedenza, in quanto la cavità stessa non risulta stabile e si hanno elevate perdite per diffrazione che non permettono di ottenere la risonanza. Si devono costruire delle cavità in cui almeno uno degli specchi sia curvo, ed in tale modo nel risonatore si possono avere dei modi stabili. Si definisce per ogni specchio il parametro:

$$g_i = 1 - \frac{d}{R_i} \quad (2.50)$$

ove  $d$  è la distanza fra gli specchi della cavità ed  $R_i$  è il raggio di curvatura dello specchio  $i$ -esimo. La condizione di stabilità è allora (Svelto 1972):

$$0 < g_1 g_2 < 1 \quad (2.51)$$

In questo modo la cavità risulta stabile. Il modo risonante principale è indicato con  $TEM_{00}$ , avente l'intensità a simmetria cilindrica rispetto all'asse del risonatore. In presenza di asimmetrie si possono avere modi trasversi  $TEM_{lm}$ , con  $l, m$  indici del modo (Kogelnik and Li 1966). Per ora si considera solo il modo  $TEM_{00}$  che realizza le perdite minime.

Il profilo del fascio all'interno della cavità è gaussiano, con una semilarghezza pari a:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (2.52)$$

$w$  è la distanza radiale in cui il campo è attenuato di un fattore  $e$  rispetto al valore in asse,  $w_0$  è il waist minimo e  $z$  la distanza da esso lungo l'asse. Il waist minimo è legato alla geometria della cavità, che ora, per proseguire, sceglieremo piano concava, cioè con lo specchio di ingresso piano (vedi figura 2.5):

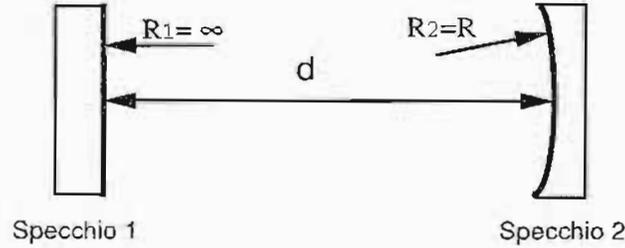


Figura 2.5: Schema della cavità piano concava

$$w_0^2 = \left( \frac{\lambda}{\pi} \right) \sqrt{d(R-d)} \quad (2.53)$$

Si può ora dare una stima delle perdite per diffrazione, dovute alle dimensioni finite degli specchi che si devono usare.

Tali perdite possono costituire un limite per la realizzazione di finezze elevate. La finezza si può anche scrivere (App. A):

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\pi}{\mathcal{T} + p + p_d + 2\alpha d} \quad (2.54)$$

ove si sono esplicitate le perdite per diffrazione  $p_d$ ;  $\mathcal{T}$  e  $p$  sono i parametri degli specchi (supposti con le stesse caratteristiche) ed  $\alpha$  è l'assorbimento per unità di lunghezza del mezzo.

Sia  $a$  il raggio della superficie riflettente di uno specchio, la parte di intensità che non viene riflessa si può scrivere:

$$p_d = \left[ \frac{\int_a^\infty E^2(r) r dr}{\int_0^a E^2(r) r dr} \right] \quad (2.55)$$

per il modo TEM<sub>00</sub> la distribuzione radiale del campo è data da:

$$E(r) = E_0 e^{-r^2/w^2} \quad (2.56)$$

e si ottiene:

$$p_d = \frac{\frac{1}{4}w^2 e^{-2a^2/w^2}}{-\frac{1}{4}w^2 e^{-2a^2/w^2} + \frac{1}{4}w^2} \simeq e^{-2a^2/w^2} \quad (2.57)$$

Riscriviamo ora la relazione (2.52) sostituendo a  $z$  la distanza  $d$ . L'espressione  $w(d)$  rappresenta le dimensioni massime del fascio, che si hanno in corrispondenza dello specchio curvo, al variare del raggio di curvatura  $R$ :

$$w^2(d) = R \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{d}{R-d}} \quad (2.58)$$

sostituendo tale relazione nella (2.57) si ricava:

$$R \sqrt{\frac{d}{R-d}} = -\frac{2a^2}{\ln p_d} \frac{\pi}{\lambda} \quad (2.59)$$

che fissa delle condizioni su  $R$  una volta note le dimensioni  $a$  degli specchi e le perdite massime richieste.

Una condizione sul raggio di curvatura segue inoltre dalla richiesta che il modo risonante TEM<sub>00</sub> non sia degenerare in frequenza con dei modi trasversi. Tale richiesta permette di distinguere il modo principale da quelli secondari qualora questi si manifestino a causa di asimmetrie che si possono manifestare nella cavità.

Le frequenze di risonanza di una cavità Fabry-Pérot, ove si considerino anche i modi secondari, sono date da (Siegman 1986):

$$\nu_{qlm} = \left[ q + (l + m + 1) \frac{\arccos \sqrt{g_1 g_2}}{\pi} \right] \times \frac{c}{2d} \quad (2.60)$$

ove  $q$  è l'ordine di interferenza. Affinchè non vi sia degenerazione fra il modo principale ed i secondari deve valere la condizione:

$$\arccos \sqrt{g_1 g_2} \neq \frac{\pi}{k+1} \quad k = \text{intero} \quad (2.61)$$

che nel caso della cavità piano concava scelta si traduce in:

$$R \neq \frac{d}{\sin^2 \pi/(k+1)} \quad (2.62)$$

## 2.6.2 Esempio numerico con scelta del raggio di curvatura

Nello schema sperimentale proposto nel capitolo 1 si deve costruire una cavità la cui lunghezza sia dell'ordine di 5 metri per poter rendere accessibili gli specchi. Poniamo quindi  $d = 5$  m, la condizione di stabilità mi dice immediatamente che  $R$  deve essere maggiore di 5 m, e non troppo vicino a tale valore altrimenti minime variazioni di lunghezza renderebbero il sistema instabile.

Si voglia poi ottenere una finezza elevata, ne consegue che si pone, ad esempio, un valore di perdite massime  $p_d \lesssim 10^{-8}$ . Se il raggio  $a$  degli specchi è plausibilmente di  $10^{-2}$  m, dalla relazione (2.59) segue allora:

$$5.1 \text{ m} < R < 238 \text{ m} \quad (2.63)$$

La condizione sui modi secondari esclude ulteriormente alcuni di questi valori. Per i modi di ordine più basso i risultati sono riportati nella tabella 2.5.

k	1	2	3	4	5	6	7
raggio escluso (m)	5	6.7	10	14.5	20	26.6	34.1

Tabella 2.5: Valori di  $R$  esclusi per non avere modi degeneri

Fra i valori ammessi facciamo quindi la seguente scelta:

$$R = 23 \text{ metri} \quad (2.64)$$

che significa:

$$w_0 = 1.8 \text{ mm} \quad (2.65)$$

$$w(d) = 2.5 \text{ mm} \quad (2.66)$$

$$p_d \sim 10^{-14} \quad (2.67)$$

$$g_1 g_2 = 0.78 \quad (2.68)$$

La stima per  $p_d$  è stata ottenuta con la relazione (2.57). Tale valore si può ottenere anche estrapolando i valori delle tabelle riportate nei libri di sistemi laser (Kogelnik and Li 1966). Tali tabelle riportano in genere solo sistemi in cui le perdite ammontano a qualche decimo di percentuale.

Notiamo infine che dare le dimensioni del fascio sugli specchi significa dare anche la densità superficiale di energia che incide sugli specchi stessi. Se  $I_0$  è l'intensità che incide sul Fabry-Pérot, quella che incide sullo specchio di uscita è:

$$I_{s2} = \eta_{FP} I_0 / \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \mathcal{F}^2 I_0 / \pi^2 \quad (2.69)$$

Per cui la densità di potenza superficiale è:

$$D_W = \mathcal{T}_2 \frac{\mathcal{F}^2 I_0}{\pi^3 w^2(d)} \quad (2.70)$$

che con una intensità incidente di 10 mW, una finezza di 30000 ed una trasmittività di  $2 \cdot 10^{-5}$  significa, per la scelta di cavità fatta:

$$D_W \sim 10 \text{ W/mm}^2 \quad (2.71)$$

I valori limite forniti dalle case produttrici sono di questo ordine di grandezza per specchi di qualità standard, mentre sono molto più alti (dell'ordine di kW/mm<sup>2</sup>) per specchi di migliore qualità.

### 2.6.3 Birifrangenza degli specchi

Gli specchi ad alta riflettività che si utilizzano sono interferenziali dielettrici. Tali specchi sono costituiti da un supporto (tipicamente vetro BK7 o silice) su cui sono depositati alcune decine di strati riflettenti di spessore  $\lambda/4$ .

E' stato visto che tali specchi presentano birifrangenza (Carusotto *et al* 1989). Nel caso di cavità Fabry-Pérot questo si traduce in diverse frequenze di risonanza per i due autostati di polarizzazione.

Scriviamo in forma più generale il ritardo di fase  $\delta$  per un giro in cavità:

$$\delta = \frac{4\pi \sum_i n^{(i)} L^{(i)}}{\lambda} \quad (2.72)$$

ove  $L^{(i)}$  sono i tratti di cammino percorsi nella cavità, in cui si deve tener conto anche dello spessore della parte dielettrica riflettente, ed  $n^{(i)}$  sono gli indici di rifrazione corrispondenti. Se si può definire  $n_p \neq n_o$  su due assi ( $p, o$ ) ortogonali all'asse di propagazione, allora le componenti della luce lungo tali assi subiranno ritardi di fase diversi, e si avranno diverse frequenze di risonanza.

Utilizzando un Fabry-Pérot di finezza circa 300, costituito da due specchi di scarsa qualità, si è potuto osservare sperimentalmente tale fenomeno. In figura 2.6 è riportato l'andamento del segnale trasmesso dalla cavità al variare della frequenza della luce incidente. Quest'ultima è linearmente polarizzata lungo un asse diverso dalle direzioni  $p$  ed  $o$  definite in precedenza. Per ognuna delle due risonanze il picco trasmesso è proporzionale alla proiezione della polarizzazione della luce lungo l'asse corrispondente.

Qualora si abbia un Fabry-Pérot risonante, una birifrangenza del tipo qui discusso significa che la cavità stessa si comporta anche da polarimetro.

Tale comportamento ostacolerebbe l'esecuzione di un esperimento quale PVLAS, in cui si cercano variazioni di polarizzazione che avvengono all'interno di una cavità risonante.

La richiesta che si fa è che eventuali picchi come quelli di figura 2.6 siano sovrapposti, cioè le due frequenze di risonanza siano degeneri entro la risoluzione dello strumento, data dalla larghezza della riga.

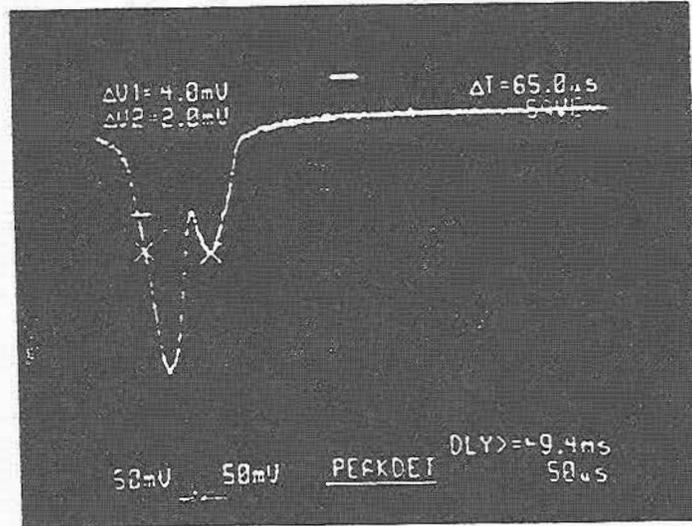


Figura 2.6: Andamento della trasmittività di un FP con specchi birifrangenti, al variare della frequenza della luce incidente

Chiamo  $\delta_b$  lo sfasamento dovuto alla birifrangenza. Seguendo la figura 2.7,  $\delta_b$  è la differenza di fase fra le due risonanze. La larghezza  $\delta_{picco}$  di un singolo picco segue direttamente dalla definizione di finezza:

$$\delta_{picco} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}} \quad (2.73)$$

Si può porre come condizione di fattibilità della misura:

$$\delta_b < \frac{\delta_{picco}}{4} \quad (2.74)$$

da cui:

$$\delta_b \mathcal{F} < \frac{\pi}{2} \quad (2.75)$$

che è proprio la condizione di lavoro che si cercava.

Per lo studio della birifrangenza di specchi interferenziali dielettrici è stato costruito un apposito apparato (Micossi *et al* 1993). Durante il primo anno di dottorato ho partecipato allo studio, con l'apparato citato, di diversi specchi interferenziali, che hanno mostrato caratteristiche di birifrangenza con sfasamenti  $\delta_b \sim 10^{-4}$ . Tali specchi pur essendo del tipo interferenziale non erano appositamente fatti per cavità Fabry-Pérot ad elevata finezza. Passando a specchi di migliore qualità non si sono più visti picchi in trasmissione sul tipo di figura 2.6. Questo significa che con gli specchi di finezza  $\mathcal{F} = 30000$ , la più alta ottenuta, la condizione (2.75) impone  $\delta_b < 5 \cdot 10^{-5}$ .

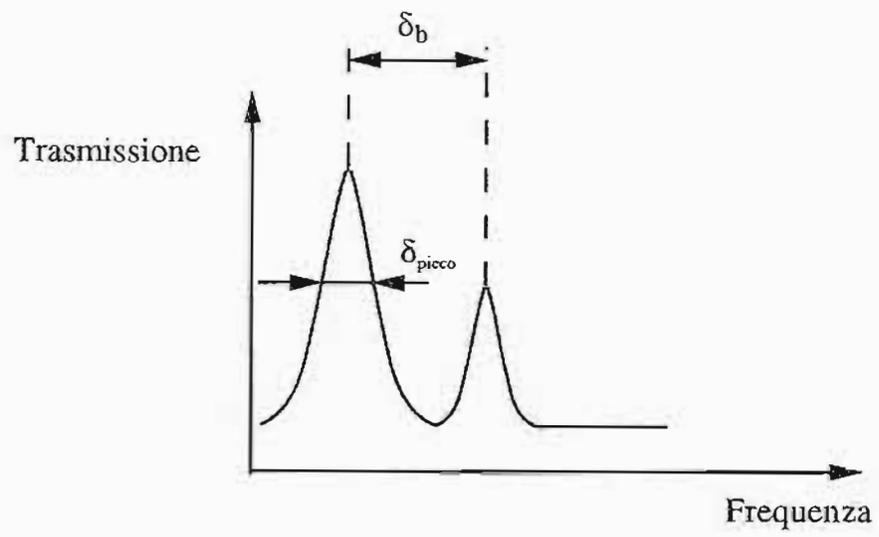


Figura 2.7: Parametri per la trasmissività di un FP con specchi birifrangenti

## Capitolo 3

# Agganciamento in frequenza di un laser ad una cavità Fabry-Pérot con la tecnica di Pound-Drever

### 3.1 Generalità

Per realizzazione di Fabry-Pérot si intende la costituzione di una cavità ottica nella quale è mantenuta stabile la condizione di risonanza. Si tratta quindi di eseguire un agganciamento in frequenza fra una sorgente luminosa e la cavità. Tale problema può essere trattato nell'ambito della teoria del controllo. In figura 3.1 si ha uno schema di principio del problema.

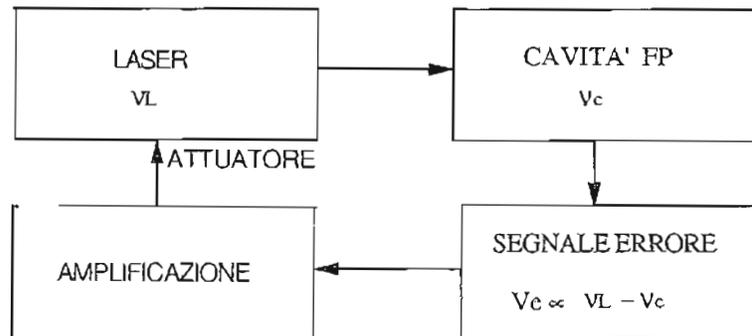


Figura 3.1: Schema logico per la realizzazione di cavità risonanti ottiche

In questo caso la frequenza di risonanza della cavità  $\nu_c$  è pensata come una frequenza di riferimento alla quale si deve asservire la frequenza  $\nu_L$  del fascio luminoso.

In generale le due frequenze saranno soggette a fluttuazioni temporali: per la sorgente queste sono ad esempio connesse al meccanismo di emissione non strettamente monocromatico, per la cavità derivano essenzialmente dalle modificazioni della geometria dovute a vibrazioni meccaniche e variazioni termiche.

L'asservimento si esegue rendendo minima la differenza

$$\nu_N = \nu_L - \nu_c \quad (3.1)$$

e qualora tale differenza sia inferiore alla larghezza di riga della cavità si ha risonanza del fascio incidente.

Le differenze in frequenza fra la sorgente luminosa e la frequenza di risonanza del Fabry-Pérot sono rivelate attraverso una tecnica di discriminazione che le converte con pendenza  $D_V$  (Misurata in V/Hz) in variazioni di tensione, fornendo un segnale errore  $V_e$ .

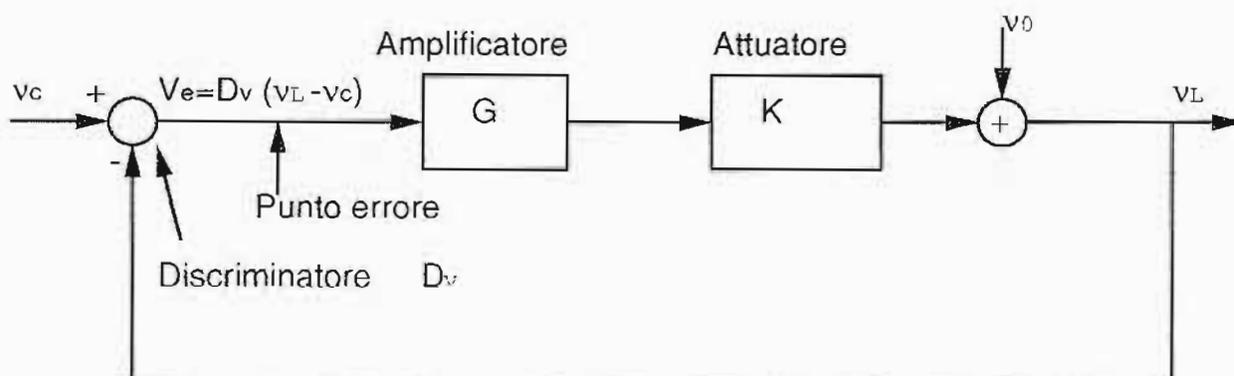


Figura 3.2: Schema del circuito di controllo

Seguendo lo schema di figura 3.2, vediamo che il segnale errore viene amplificato con un guadagno  $G$  da un amplificatore (Indicato anche servo nel seguito). L'uscita dell'amplificatore, mediante un attuatore tensione frequenza di guadagno di conversione  $K$  (misurato in V/Hz), è poi utilizzata per regolare la frequenza della sorgente. La sorgente si trova, in generale, nei pressi di una frequenza  $\nu_0$  prossima ad una frequenza di risonanza  $\nu_c$  della cavità. In questo modo l'anello di controllo verifica e sopprime in maniera attiva la differenza di frequenza  $\nu_N$ . Usando il simbolismo introdotto si ha che vale:

$$\nu_L = \frac{\nu_0 + KG D_V \nu_c}{1 + KG D_V} \xrightarrow{KG D_V \gg 1} \nu_c \quad (3.2)$$

Tale relazione ci dice che nel limite in cui si ha alto guadagno ad anello aperto  $KG D_V$  la frequenza del laser tende ad essere pari a quella della cavità. L'effetto del loop è infatti quello di ridurre al minimo il segnale nel punto di errore, corrispondente ad una tensione:

$$V_e = D_V \nu_N = D_V (\nu_L - \nu_c) \quad (3.3)$$

Le funzioni  $K$ ,  $G$ ,  $D_V$  saranno in generale dipendenti dalla frequenza<sup>1</sup>, ed il loro comportamento determinerà la banda di funzionamento e le caratteristiche di stabilità del sistema a retroazione.

<sup>1</sup>Qui per frequenza si intende quella di Fourier che si incontra nell'analisi spettrale.

Come si vedrà in seguito, l'attuatore tensione frequenza che si utilizza presenta una banda limitata a 100 kHz. Per questo motivo la banda di funzionamento scelta per il loop è stata di circa 50 kHz.

Per la stabilità si deve avere che la pendenza della curva di guadagno ad anello aperto sia minore di 12 dB/ottava nel punto di guadagno unitario (Marro 1992). Ciò in pratica significa una funzione di risposta ad anello aperto con un comportamento di tipo  $1/f$  intorno ai 50 kHz.

### 3.1.1 La sorgente luminosa e l'attuatore tensione frequenza

La sorgente luminosa è un laser di tipo NPRO (Non Planar Ring Oscillator). Questo dispositivo fu inventato da Kane e Byer (1985) ed è costituito da un cristallo laser (Nd:YAG) monolitico in cui un cammino ottico ad anello non planare è ottenuto mediante riflessione totale interna su 3 superfici (Figura 3.3).

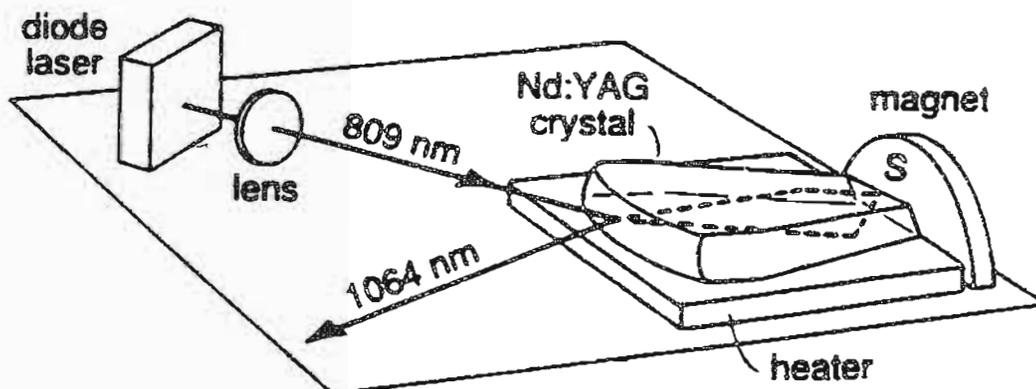


Figura 3.3: Schema del laser NPRO

Il pompaggio è di tipo ottico effettuato mediante un diodo laser. In tabella 3.1 sono riportate alcune caratteristiche, come fornite dalla casa, per il modello utilizzato in questa tesi (Lightwave Electronics model 124, con potenza di 50 mW).

Le elevate caratteristiche riguardo al rumore in ampiezza ed alla stabilità in frequenza possono essere attribuite all'uso del pompaggio a diodo assieme alla costruzione di tipo monolitico della cavità laser. Il pompaggio a diodo evita il rumore associato alle lampade a scarica. L'utilizzo di un piccolo campo magnetico in cavità permette inoltre di avere una propagazione unidirezionale, ottenendo isolamento dalla luce di ritorno e forzando l'operazione a modo singolo (Nilsson, Gustafson and Byer 1989).

La costruzione monolitica permette di avere un facile controllo in temperatura sul cristallo mediante un termoregolatore ad esso connesso. In questo modo, oltre ad ottenere l'isolamento dall'ambiente esterno è possibile agire sulle dimensioni della cavità laser sem-

Frequenza di emissione	$\lambda = 1064 \text{ nm}$
Rumore in ampiezza (5 Hz - 10 MHz)	$< 0.1\% \text{ rms}$
Deriva di potenza	$< \pm 5\%/8 \text{ ore}$
Stabilità in frequenza	
Larghezza di riga	$< 5 \text{ kHz/msec}$
Jitter	$< 75 \text{ kHz/sec}$
Deriva di frequenza	$< 50 \text{ MHz/ora}$
Modo Spaziale	$\text{TEM}_{00}$
Polarizzazione, verticale	$> 1000:1$

Tabella 3.1: Caratteristiche del laser utilizzato

plícemente variando in maniera controllata la temperatura. Ne consegue la variazione della frequenza della luce emessa, con un andamento descritto dal grafico di figura 3.4.

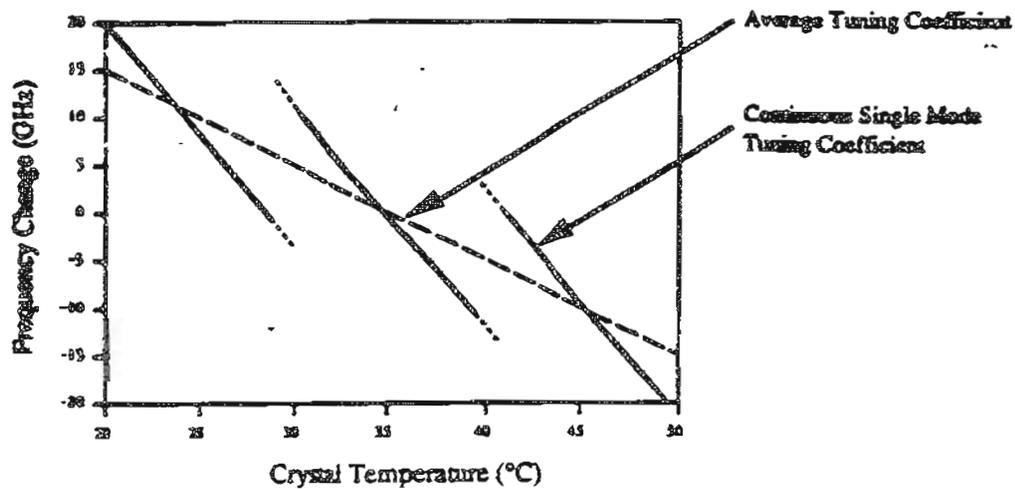


Figura 3.4: Andamento della frequenza di emissione al variare della temperatura del cristallo

La pendenza di ciascun tratto è di circa  $2.5 \text{ GHz}/^\circ\text{C}$  equivalenti a  $5 \text{ GHz/V}$  sul termostato. Variando di molto la temperatura si possono avere dei salti di modo (hops), e la pendenza media (linea tratteggiata in figura) è circa  $1 \text{ GHz}/^\circ\text{C}$ . Tale controllo è però lento, avendo una banda passante di circa  $1 \text{ Hz}$ .

La tecnica che permette di ottenere variazioni di frequenza con una banda molto maggiore è il controllo della lunghezza del cammino ottico mediante un trasduttore piezoelettrico. In figura 3.5 si ha uno schema del montaggio.

Il cristallo laser ha dimensioni lineari di qualche mm e la risposta in frequenza è piatta sino a circa  $100 \text{ kHz}$  con un coefficiente di attuazione  $K$  misurato pari a:

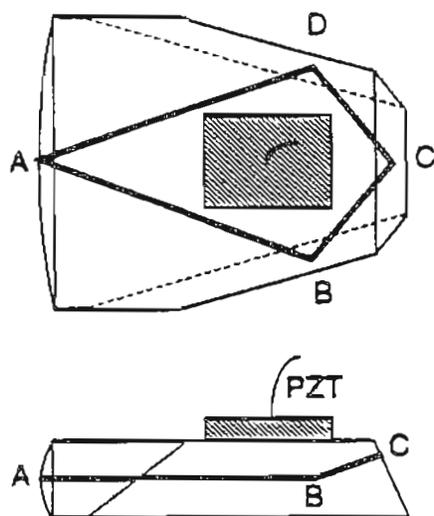


Figura 3.5: Schema della cavità del laser NPRO con il trasduttore piezoelettrico PZT

$$K = 5.0 \text{ MHz} / \text{V} \quad (3.4)$$

Valore che corrisponde a quello fornito dalla casa costruttrice. In questo caso l'ampiezza delle correzioni è però limitata a circa 250 MHz (50 V di segnale massimo sul piezoelettrico). Notiamo infine che le specifiche fornite dalla casa prevedono un massimo per la frequenza di modulazione di 100 kHz. Oltre tale frequenza abbiamo in realtà verificato che la risposta del sistema non diminuisce, vi sono però delle zone a comportamento non lineare legate probabilmente ad eventuali risonanze del cristallo. Solamente oltre il MHz il segnale d'ingresso viene attenuato con risposta pressochè nulla.

### 3.2 Tecnica di Pound-Drever

Neila tecnica di Pound-Drever (Pound 1946, Drever *et al* 1983) la radiazione del laser è modulata in fase e l'agganciamento avviene utilizzando il segnale riflesso della cavità Fabry-Pérot. Per ottenere il segnale di errore si utilizza una rivelazione di fase. Poichè la luce riflessa contiene informazioni sulla pulsazione istantanea del laser con tale tecnica si ovvia ai problemi che derivano dai ritardi associati ai tempi di caricamento dell'interferometro. In figura 3.6 è presentato uno schema di realizzazione.

La luce del laser è modulata in fase ad una radiofrequenza  $\Omega_m/2\pi$  grande rispetto alla larghezza di riga della cavità FP. La portante è accordata alla frequenza del Fabry-Pérot e le bande laterali del fascio sono quindi completamente riflesse da FP con un ritardo di fase nullo (Si veda appendice A per l'andamento del segnale riflesso). La componente portante viene anch'essa in parte riflessa, ed in corrispondenza della risonanza essa presenta una variazione di fase molto accentuata. La portante riflessa, ritardata in fase, si mescola con le

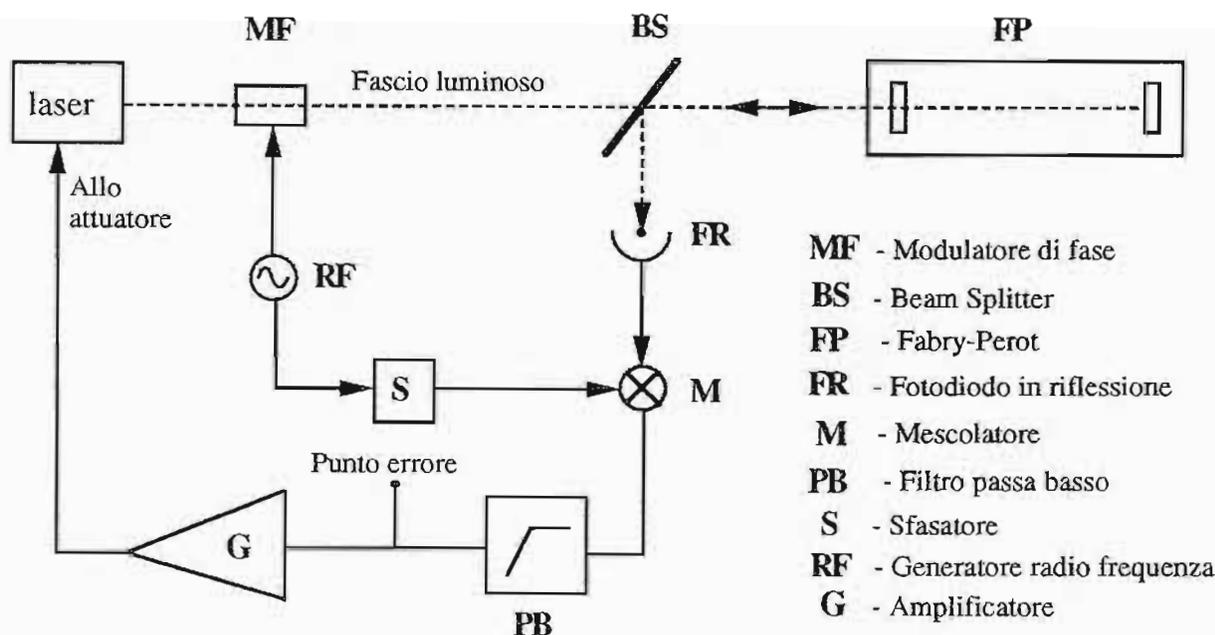


Figura 3.6: Schema dell'agganciamento alla Pound-Drever

bande laterali e viene rivelata attraverso un fotodiodo veloce. Nel segnale del rivelatore si ha la presenza di un termine (AM) alla frequenza  $\Omega_m$ , ed avente una ampiezza proporzionale al seno del ritardo di fase  $\delta$  su un giro. Nei pressi della risonanza tale fase dipende linearmente dallo scarto in frequenza  $\nu_N = \nu_L - \nu_c$  tra la radiazione incidente e la frequenza risonante della cavità:

$$\sin \delta \simeq \delta = \frac{4\pi d}{c} \nu_N \quad (3.5)$$

ove  $d$  è la lunghezza della cavità.

Cioè, nel caso di sfasamento della portante, si ha un termine AM sul fotorivelatore. Il segnale di errore si ottiene mescolando una parte del segnale RF usato per modulare il laser con l'uscita del fotodiodo. Un filtro passa basso viene poi usato per rivelare l'andamento del termine AM che contiene l'informazione sulla grandezza  $\nu_N$  che interessa. Tale segnale, una volta amplificato, può essere mandato sull'attuatore del laser per il controllo.

Questo sistema è limitato dal rumore in ampiezza della luce laser. La presenza di rumore in ampiezza alla frequenza di modulazione  $\Omega_m$  non si distingue dal segnale e viene quindi tradotto come correzione di frequenza sul laser stesso.

Per questa ragione la modulazione della fase deve avvenire ad una frequenza ove il fascio luminoso presenta il minimo rumore di intensità. Il laser utilizzato raggiunge il limite di rumore shot ad una frequenza intorno ai 10 MHz. Come si vedrà in seguito la modulazione è stata invece effettuata ad una frequenza inferiore, alla quale l'effetto del rumore in ampiezza è ancora tollerabile e diventa molto più semplice la realizzazione dei circuiti di controllo.

Si noti infine che una modulazione di ampiezza può essere introdotta direttamente anche dal modulatore di fase, ad esempio nel caso di non perfetto allineamento.

### 3.2.1 Il segnale di discriminazione

Supponiamo quindi di avere la cavità che risuoni ad una frequenza  $\nu_c$ , e le si voglia asservire un laser. Se pensiamo che la radiazione laser sia alla frequenza  $\nu_L$ , potremo scrivere:

$$\nu_L = \nu_c + \nu_N \quad (3.6)$$

ove  $\nu_N$  è lo scarto in frequenza. Si tratterà di ricavare un segnale d'errore in funzione di  $\nu_N$ <sup>2</sup> (vedere ad esempio Day *et al* (1992)).

Sia quindi  $E_i$  il campo elettrico della luce del laser (da ora in avanti si utilizzano le pulsazioni corrispondenti  $\omega_i = 2\pi\nu_i$ ):

$$E_i(t) = E_i e^{i(\omega_c + \omega_N)t} \quad (3.9)$$

In seguito alla modulazione in fase, ottenuta ad esempio utilizzando un cristallo elettroottico, il campo elettrico  $E_m$  dopo il modulatore si può scrivere, supponendo di avere un indice di modulazione  $\beta$  alla pulsazione  $\Omega_m$ :

$$E_m(t) = E_i e^{i(\omega_c t + \omega_N t + \beta \sin \Omega_m t)} \quad (3.10)$$

che usando lo sviluppo in funzioni di Bessel diventa:

$$E_m(t) \simeq E_i e^{i(\omega_c + \omega_N)t} [J_0(\beta) + 2iJ_1(\beta) \cos \Omega_m t] + \dots \quad (3.11)$$

$$\simeq E_i e^{i(\omega_c + \omega_N)t} [J_0(\beta) + iJ_1(\beta)e^{i\Omega_m t} + iJ_1(\beta)e^{-i\Omega_m t}] + \dots \quad (3.12)$$

ove  $J_0$  e  $J_1$  sono rispettivamente le funzioni di Bessel di ordine zero ed uno (Le armoniche di ordine superiore sono assunte trascurabili). Il campo come scritto nella (3.12) è costituito

---

<sup>2</sup>Quello che in realtà si fa in questo modo è una analisi dello sfasamento che la luce del laser acquista nell'interagire con la cavità. Dato un segnale luminoso con diverse componenti in frequenza diventerebbe importante anche la fase relativa fra esse. In generale, nel caso di rumore bianco, tali fasi sono completamente scorrelate fra loro. Il Fabry-Pérot non è comunque in grado di vedere le singole componenti, ma può solo dare informazioni sulla fase globale istantanea acquisita. Per cui, pur scrivendo come in 3.6, dobbiamo ricordarci che stiamo lavorando su una fase  $\varphi$  definita da:

$$\varphi = \arg [H^r(\delta)] \quad (3.7)$$

ove  $H^r$  è la funzione di trasferimento in riflessione del Fabry-Pérot. Ne segue che scrivere la differenza di frequenza come  $\nu_N$  è semplicemente un altro modo per dire che lo scarto in fase istantaneo è:

$$\varphi_N = \arg [H^r(\delta(\nu_N))] \quad (3.8)$$

da una portante per la quale si vuole la risonanza e da due bande laterali a  $\pm\Omega_m$  dalla portante.

La luce incide quindi sul Fabry-Pérot e la parte da questi riflessa è raccolta dal fotodiiodo di riflessione per mezzo del beam splitter (vedi figura 3.6). Utilizzando la funzione di trasferimento in riflessione  $H^r(\delta(\omega))$  per la cavità, è possibile ricavare l'espressione della tensione di uscita  $V_f$  dal fotodiiodo:

$$V_f(t) = \eta_f R_R \gamma (1 - \gamma) |E_f(t)|^2 \quad (3.13)$$

$$E_f(t) = E_i e^{i(\omega_0 + \omega_N)t} \times \left[ J_0(\beta) H^r(\omega_N) + i J_1(\beta) H^r(\omega_N + \Omega_m) e^{i\Omega_m t} + i J_1(\beta) H^r(\omega_N - \Omega_m) e^{-i\Omega_m t} \right] \quad (3.14)$$

ove si sono utilizzati i seguenti parametri:  $\eta_f$ , efficienza di conversione del fotodiiodo (in A/W);  $\gamma$ , trasmissività del beam splitter;  $R_R$ , resistenza di carico del fotodiiodo; si è inoltre tenuto conto che  $H^r(\omega)$  è periodica con periodo  $\omega_{\text{FSR}} = \pi c/d$ .

A causa del modulo quadro la tensione  $V_f(t)$  conterrà dei termini alla frequenze  $\Omega_m$ ,  $2\Omega_m$  ed in continua. L'uso del mixer, di efficienza  $\chi$ , permette di isolare il solo termine in  $\Omega_m$ . Si effettua infatti il battimento fra  $V_f(t)$  ed un segnale del tipo  $\cos(\Omega_m t + \varphi_0)$ . Nel segnale dal mixer, dato da

$$\chi V_f(t) \cos(\Omega_m t + \varphi_0) \quad (3.15)$$

la componente continua rappresenta proprio la tensione d'errore cercata  $V_e$ , che si ricava utilizzando un filtro passa basso. All'uscita del filtro si ha un segnale<sup>3</sup> avente una componente in fase ed una in quadratura il cui andamento è mostrato in figura 3.7. Notiamo che nei grafici delle funzioni è rispettata la condizione precedentemente posta:

$$\frac{\Omega_m}{2\pi} > \Delta\nu_c = \frac{c}{2d\mathcal{F}} \quad (3.19)$$

con  $\Delta\nu_c$  larghezza di riga della cavità Fabry-Pérot.

---

<sup>3</sup>Può essere utile avere l'espressione completa del segnale d'errore  $V_e$ ; indicando:

$$R(x) = \Re\{H^r(x)\} \quad (3.16)$$

$$I(x) = \Im\{H^r(x)\} \quad (3.17)$$

si ricava:

$$V_e = -\chi\eta_f\gamma(1-\gamma)R_R J_0(\beta)J_1(\beta)|E_i|^2 \times \left\{ \begin{aligned} & [R(\omega_N)I(\omega_N - \Omega_m) - I(\omega_N)R(\omega_N - \Omega_m) + R(\omega_N)I(\omega_N + \Omega_m) - I(\omega_N)R(\omega_N + \Omega_m)] \cos \varphi_0 + \\ & [R(\omega_N)R(\omega_N - \Omega_m) + I(\omega_N)I(\omega_N - \Omega_m) - R(\omega_N)R(\omega_N + \Omega_m) - I(\omega_N)I(\omega_N + \Omega_m)] \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

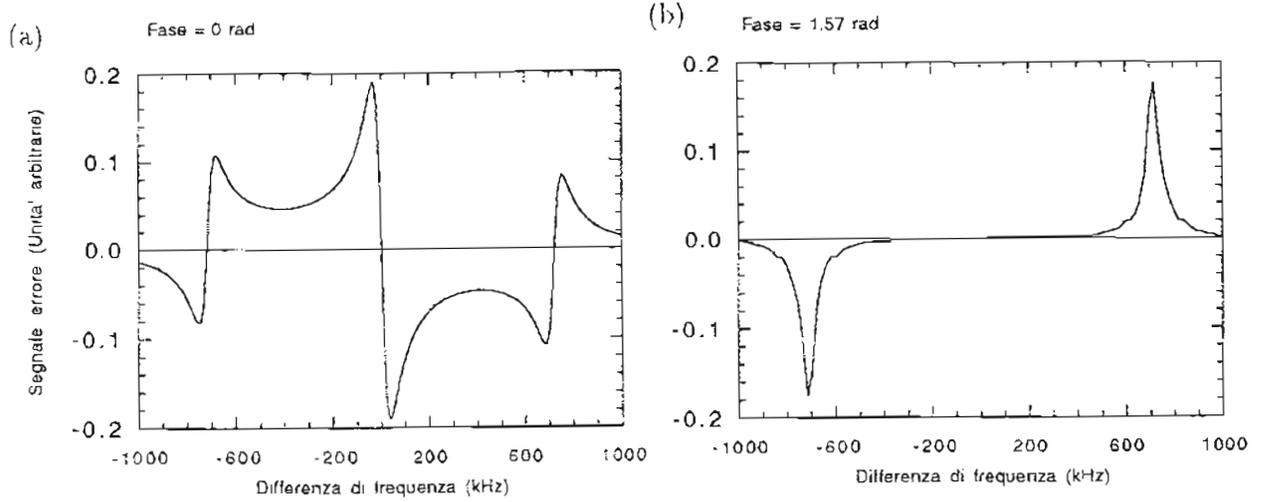


Figura 3.7: Segnale d'errore, componenti in fase (a) e in quadratura (b), per una cavità con  $\Delta\nu_c = 70$  kHz ed  $L = 0.9$  m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ), avendo  $\Omega_m = 717.7$  kHz.

La scelta  $\varphi_0 = 0$  rappresenta quella che fornisce il segnale d'errore corretto. Questo segnale, nei pressi del punto di zero, assume una pendenza pari a:

$$\delta V_e|_{\nu_N=0} = -8\chi\eta\gamma(1-\gamma)R_R \frac{\mathcal{T}_1\mathcal{F}^2}{\pi r_1} J_0(\beta)J_1(\beta)|E_i|^2 \frac{d}{c} \delta\nu_N \quad (3.20)$$

ove si ricorda che  $\mathcal{T}_1$  è la trasmittività del primo specchio ed  $r_1$  il suo coefficiente di riflessione.

Se indichiamo con  $V_0$  il valore di tensione sul fotodiode in riflessione quando non vi è risonanza:

$$V_0 = \eta\gamma(1-\gamma)R_R|E_i|^2 \quad (3.21)$$

si ricava:

$$\delta V_e|_{\nu_N=0} = -8\chi V_0 \frac{\mathcal{T}_1\mathcal{F}^2}{\pi r_1} J_0(\beta)J_1(\beta) \frac{d}{c} \delta\nu_N \quad (3.22)$$

Si ricava quindi la pendenza di discriminazione  $D_V$  per il metodo di Pound-Drever, che assume valore massimo, nel punto  $\nu_N = 0$ , pari a:

$$D_V^0 = \frac{\delta V_e|_{\nu_N=0}}{\delta\nu_N} = -8\chi V_0 \frac{\mathcal{T}_1\mathcal{F}^2}{\pi r_1} J_0(\beta)J_1(\beta) \frac{d}{c} \quad (3.23)$$

Al variare dell'indice di modulazione  $\beta$  tale pendenza assume il valore massimo per  $\beta = 1.08$  ove il termine  $J_0(1.08)J_1(1.08)$  vale circa 0.34. Notiamo che per specchi uguali si può scrivere l'efficienza  $\eta_{FP}$  (pagina 32), e approssimando  $r_1 \simeq 1$  si ottiene:

$$D_V^0 \simeq -8V_0\chi\sqrt{\eta_{FP}}\frac{\mathcal{F}d}{c}J_0(\beta)J_1(\beta) \quad (3.24)$$

Quindi cavità con finezza piú elevata forniscono una maggiore pendenza del segnale errore.

### 3.2.2 Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria

Supponiamo ora di avere un termine ulteriore nella luce laser. Tale termine sia dovuto a modulazione di ampiezza spuria indotta dal sistema di modulazione di fase. La indicheremo con RAM (Residual Amplitude Modulation). Una luce con modulazione di ampiezza la possiamo scrivere nel seguente modo:

$$E = E_i [1 + b \cos(\Omega_m t + \theta_R)] e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

e si suppone  $b \ll 1$ . La luce che si utilizza la scriveremo quindi:

$$E = E_i [1 + b \cos(\Omega_m t + \theta_R)] [J_0(\beta) + iJ_1(\beta)e^{i\Omega_m t} + iJ_1(\beta)e^{-i\Omega_m t}] e^{i(\omega_0 + \omega_N)t} \quad (3.26)$$

da confrontarsi con la relazione (3.12).

Eseguito lo stesso procedimento fatto in precedenza si trova che al segnale d'errore  $V_e$  si somma un termine costante legato all'ampiezza  $b$ . Infatti il termine di RAM alla frequenza di modulazione non può essere separato dagli altri segnali e quindi viene demodulato dal mixer che fornisce un segnale in continua.

Si può dimostrare che il contributo è massimo quando  $\theta_R = 0$ ; in tal caso si ottiene che la tensione continua all'uscita del mixer è del tipo (per  $\nu_N < \Delta\nu_c/2$ ):

$$V_{out} \propto \left[ \text{cost} \times J_0(\beta)J_1(\beta)\nu_N + \frac{b}{2}J_0^2(\beta) + \frac{3b}{2}J_1^2(\beta) \right] \quad (3.27)$$

ove il primo addendo è legato alla  $V_e$  calcolata in precedenza (equazione (3.24)). Utilizzando la (3.22) e supponendo di porci nella condizione di modulazione  $\beta = 0.9$  che fornisce:

$$J_1^2 \simeq \frac{1}{4}J_0^2 \quad (3.28)$$

si ottiene:

$$V_{out} = D_V^0 [\nu_N + \nu_{offset}] \quad (3.29)$$

avendo definito:

$$\nu_{offset} \simeq \frac{b}{\pi} \Delta\nu_c \quad (3.30)$$

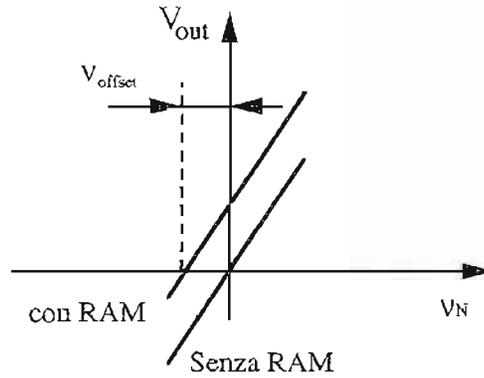


Figura 3.8: Effetto dovuto a modulazione di ampiezza spuria.

Che rappresenta quindi una stima della massima variazione del punto di zero (offset, si veda figura 3.8) dovuta a modulazione di ampiezza spuria (RAM) di ampiezza  $b$ .

Nel caso, ad esempio,  $b \simeq 10^{-4}$ , si ricava

$$\nu_{\text{offset}} \simeq 5 \text{ Hz} \quad (3.31)$$

per una cavità con  $\mathcal{F} \simeq 3000$  e  $L = 1 \text{ m}$ .

### 3.2.3 Banda di funzionamento e rapporto segnale rumore

Osservando l'andamento, al variare della frequenza  $\nu_N$ , del segnale d'errore in figura 3.7, si vede come la pendenza di discriminazione sia massima solo in una banda ristretta di frequenze, corrispondente al tratto lineare intorno a  $\nu_N = 0$ . Tale banda coincide esattamente con la larghezza di riga della cavità. Al di fuori di questa banda la pendenza di discriminazione diminuisce in modulo sino a cambiare segno quando si raggiunge la frequenza di modulazione  $\Omega_m$ .

Nella realizzazione del sistema completo di aggancio in genere è buona norma avere una banda di retroazione circa una decade minore della banda massima  $\Omega_m$ .

Notiamo che entro la banda ridotta il comportamento del segnale di discriminazione è simile a quello di un filtro passa basso con frequenza di taglio pari alla semilarghezza di riga della cavità  $\Delta\nu_c/2$ . Questo comportamento è stato dimostrato in maniera analitica (vedi per esempio Tonini 1995), ma si può stimare facendo un grafico di  $V_e/\nu_N = D_V$ , entro la banda considerata. In figura 3.9 si vede come al di fuori della larghezza di riga si abbia il tipico andamento di un filtro.

Questo significa che per fluttuazioni del laser a frequenza di Fourier minore della larghezza di riga della cavità il segnale dal mixer è proporzionale alla fluttuazione di frequenza del laser; mentre per variazioni a frequenze di Fourier maggiori della larghezza di riga il segnale ha un andamento del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}} \text{ con } f_c = \frac{\Delta\nu_c}{2} \quad (3.32)$$

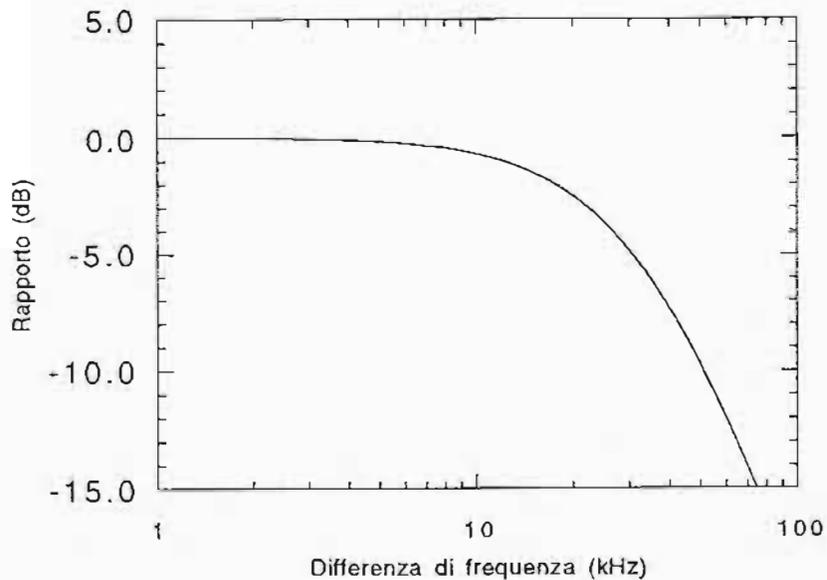


Figura 3.9: Grafico di  $V_c/(\nu_N D_V^0) = D_V/D_V^0$  per una cavità con  $\Delta\nu_c = 70$  kHz ed  $L = 0.9$  m ( $\mathcal{F} \simeq 2500$ ).

Le prestazioni del sistema di controllo saranno limitate dalla presenza di rumori. Si vuole ora calcolare il rumore shot, derivante dalla parte continua del segnale sul fotodiodo in riflessione. Ad esso contribuiscono essenzialmente le bande laterali della luce modulata, in quanto completamente riflesse dalla cavità, ed inoltre la parte della portante che viene riflessa essendo in generale  $\tau_{FP} \neq 0$ .

Si tratta di determinare la componente continua  $V_{dc}$  del segnale  $V_f(t)$  dato nella (3.13). La tensione di rumore shot avrà una densità spettrale pari a:

$$V_{shot} = \sqrt{2eR_R V_{dc}} \quad (\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (3.33)$$

costante a tutte le frequenze. All'uscita del mixer la tensione di rumore sarà:

$$V_{noise} = 2\chi \sqrt{eR_R V_{dc}} \quad (\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (3.34)$$

Utilizzando la pendenza  $D_V^0$  si ottiene l'equivalente in frequenza dello shot-noise, la cui densità spettrale  $\tilde{\nu}_{noise}$  è:

$$\tilde{\nu}_{noise} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2eR_R}{\eta_{FP} V_0} c} \frac{\sqrt{J_0^2(\beta) \left(\frac{p}{\tau+p}\right)^2 + 2J_1^2(\beta)}}{J_0(\beta)J_1(\beta)} \quad (\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (3.35)$$

ove  $V_0$  è l'intensità della luce che incide sul fotodiodo in riflessione fuori risonanza. La (3.35) rappresenta il limite intrinseco della tecnica adottata. Nel caso ad esempio di finezza 3000, perdite  $p \sim \mathcal{T}$ ,  $\beta = 0.9$ ,  $d \sim 1$  m,  $V_0 = 0.5$  V,  $R_R = 1$  k $\Omega$ , il limite è:

$$\nu_{noise} \simeq 1 \text{ mHz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (3.36)$$

### 3.3 La modulazione di fase

Allo scopo di avere un buon agganciamento si deve avere la banda il più larga possibile per il circuito di retroazione. Si ha come conseguenza la necessità di utilizzare frequenze di modulazione  $\Omega_m$  piuttosto elevate. Ciò in generale pone dei problemi riguardo alla componentistica da utilizzare: ad esempio il fotodiodo in riflessione non deve tagliare il segnale a frequenza  $\Omega_m$ , ed inoltre se devo costruire circuiti di amplificazione prima del mescolatore questi devono avere caratteristiche piuttosto spinte. Per fare un esempio se volessi ottenere in uscita dal fotodiodo una amplificazione  $\times 10$  usando  $\Omega_m/2\pi \sim 10$  MHz dovrei utilizzare un amplificatore avente un prodotto banda-guadagno di 100 MHz.

Come detto in precedenza, si vuole che il rumore di intensità della luce alla frequenza di modulazione sia minimo. Al massimo della potenza, 50 mW, il livello shot della luce emessa dal laser è raggiunto intorno ai 10 MHz. Nell'agganciamento alla Pound-Drever, però, solo una parte della potenza totale viene utilizzata per la discriminazione. In particolare, per il sistema realizzato in questa tesi, la potenza sul fotodiodo in riflessione è dell'ordine di qualche mW. A tali potenze si è visto che il rumore in ampiezza è dell'ordine del livello shot per frequenze di qualche MHz. Si è quindi scelto di utilizzare, almeno in partenza, un valore di  $\Omega_m/2\pi$  intorno al MHz, con una notevole semplificazione per l'elettronica.

L'altro problema connesso alla modulazione di fase è la presenza di modulazione di ampiezza spuria (RAM). Utilizzando dei tipici modulatori di fase costituiti da cristalli di Niobato di Litio ( $\text{LiNbO}_3$ ) si ottiene una RAM residua stabile dell'ordine di  $10^{-4}$  (Valore ottenuto usando due celle New Focus modello 4003). Per ottenere valori minori si devono utilizzare accorgimenti particolari (Ad esempio la termostatazione dei cristalli).

Notiamo infine che essendo l'attuatore  $K$  del laser non lineare oltre i 100 KHz, la banda di funzionamento del servo sarà scelta attorno alla decina di kHz. In questo modo la frequenza di modulazione risulta sufficientemente maggiore della prevista banda di controllo.

#### 3.3.1 Modulazione di fase del laser

L'attuatore  $K$  del laser agisce sulla frequenza di risonanza della cavità monolitica variando la frequenza del fascio luminoso. La relazione fra la fase  $\varphi(t)$  e la frequenza angolare  $\omega(t)$  di un'onda è:

$$\varphi(t) - \varphi_0(t) = \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad (3.37)$$

Se si modula la frequenza del laser allora

$$\omega(t) = \omega_0 + A_m \cos(\Omega_m t + \phi) \quad (3.38)$$

con  $\Omega_m$  frequenza di modulazione. Perciò

$$\varphi(t) = \int_0^t [\omega_0 + A_m \cos(\Omega_m t + \phi)] = \omega_0 t + \beta \sin(\Omega_m t + \phi) - \beta \sin \phi \quad (3.39)$$

ove si è introdotto l'indice di modulazione  $\beta = A_m/\Omega_m$ . Modulazione in frequenza è quindi equivalente a modulazione in fase. Questo fornisce la possibilità di modulare in fase la luce laser direttamente sull'attuatore piezoelettrico. Per frequenze di modulazione maggiori di 100 kHz abbiamo visto che la risposta del cristallo non è più lineare, ma può comunque essere usato come modulatore di fase a frequenza fissa.

Utilizzando un sommatore è possibile mandare contemporaneamente al laser sia il segnale a radiofrequenza che il segnale di correzione del circuito di controllo. In questo modo l'attuatore  $K$  viene usato sia come modulatore di fase che come elemento di feedback.

Tale schema è stato realizzato per la prima volta durante lo svolgimento di questo lavoro di tesi (Ruoso and Zavattini 1994, Cantatore *et al* 1994).

Il criterio usato per la scelta di  $\Omega_m$  è stato quello di avere minima modulazione di ampiezza residua per un dato indice di modulazione  $\beta$ . Infatti, come mostrato in figura 3.10, per determinate frequenze la RAM indotta dalla modulazione di fase assume dei valori minimi locali.

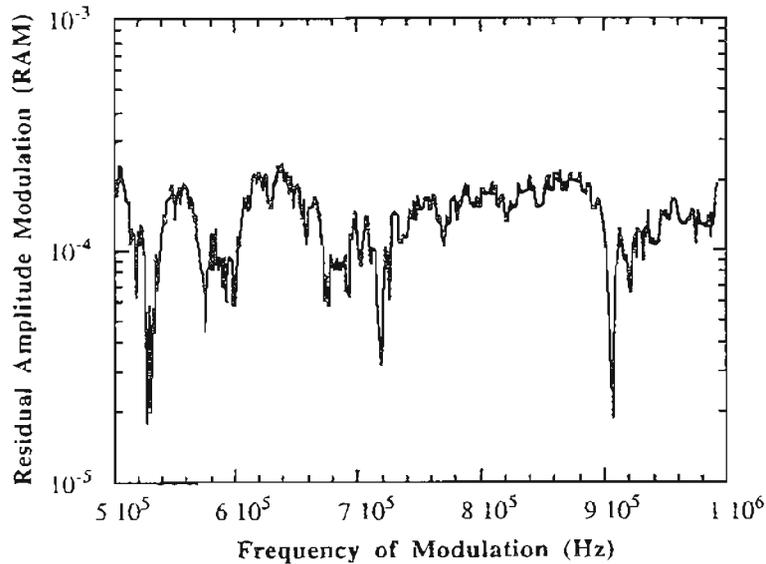


Figura 3.10: Modulazione di ampiezza residua al variare della frequenza di modulazione di fase sul laser per una tensione sul piezoelettrico di ampiezza 50 mV (Ruoso and Zavattini 1994).

Per queste frequenze il rapporto  $\text{RAM}/\beta$  risulta minimo  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ . In più il rapporto  $\text{RAM}/\beta$  è costante al variare della tensione applicata al trasduttore piezoelettrico (A frequenza fissa). Tipicamente si ha che il voltaggio che fornisce  $\beta = 2\pi$  è circa 0.5 volt.

In tabella 3.2 sono mostrati i valori di  $\beta$  e RAM misurati al variare della tensione picco applicata per diverse frequenze. Le frequenze segnate con un asterisco corrispondono a dei minimi locali.

$\Omega_m/2\pi$ (kHz)	$V_{pp}/\beta$ (mV)	RAM/ $V_{pp}$ ( $\text{mV}^{-1}$ )	RAM/ $\beta$
537.6*	109	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
600	161	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$
630	61	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$
717.7*	62	$6.0 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$
870	79	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$

Tabella 3.2: RAM e  $\beta$  al variare della frequenza e della tensione applicata al laser. Gli asterischi marcano i minimi locali.

In diversi mesi di operazione non si è osservata alcuna variazione nel comportamento del cristallo per quanto riguarda le frequenze dei minimi e la risposta del laser.

La frequenza alla quale si è deciso di lavorare è stata  $\Omega_m = 717.7$  kHz.

### 3.4 Il circuito di amplificazione

Il circuito di amplificazione fornisce l'alto guadagno  $G$  necessario per il controllo. Per la richiesta di stabilità si vuole che la pendenza del guadagno ad anello aperto sia minore di 12 dB/ottava alla frequenza ove il guadagno è unitario. Al di sotto di tale frequenza la pendenza della curva di guadagno può essere più elevata, compatibilmente con le prestazioni dell'elettronica. Si è quindi realizzato un circuito avente una funzione di trasferimento con un andamento di tipo  $1/f$  nella zona oltre i 30 kHz, ed avente la possibilità, per frequenze inferiori, di aumentare la pendenza sino ad andamenti del tipo  $1/f^4$  corrispondenti a 24 dB/ottava.

Il controllo avviene essenzialmente sul piezoelettrico  $K$  di figura 3.5, ma per compensare le derive a bassa frequenza si rende necessaria anche una regolazione automatica della temperatura di lavoro della cavità laser. Il circuito di amplificazione è quindi dotato di due uscite, denominate 'FAST' e 'SLOW' (dai nomi dei corrispondenti ingressi sul controllo del laser): la prima agisce sul piezoelettrico, la seconda sul termostato che regola la temperatura del cristallo laser. Il punto d'incrocio, cioè la frequenza ove i due sistemi forniscono correzioni uguali, è stata scelta a 0.16 Hz. Per frequenze inferiori a tale valore l'elevato range dinamico (vedi figura 3.4) del controllo di temperatura permette di compensare derive molto ampie rendendo praticabile la realizzazione di cavità risonanti stabili per lunghi periodi di tempo. Dalla figura 3.4 si vede che si possono compensare variazioni di frequenza fino a 15 GHz (con una velocità di 1 GHz/sec), che significa una variazione di lunghezza pari a:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{c} d_0 \Delta \nu \simeq 0.3 \text{ mm} \quad (3.40)$$

per una cavità di 5 metri di lunghezza<sup>4</sup>.

Notiamo infine che, qualora la cavità abbia una semilarghezza  $\Delta\nu_c/2$  minore della frequenza di guadagno unitario  $\nu_{G1}$ , è la cavità stessa a fornire l'andamento di tipo  $1/f$  come descritto nella caratterizzazione di  $D_V$  nel paragrafo 3.2.3. In tal caso la risposta del servo è costruita piatta per frequenze di Fourier maggiori di  $\Delta\nu_c/2$  in modo che si abbiano 6 dB/ottava alla frequenza  $\nu_{G1}$ .

### 3.4.1 Schemi del circuito

Lo schema circuitale semplificato è riportato in figura 3.11, mentre in figura 3.12 è mostrata la realizzazione pratica.

L'ingresso, che preleva direttamente il segnale  $V_\varepsilon$  all'uscita del filtro passa basso posto dopo il mescolatore, viene prima amplificato tramite uno stadio di pura amplificazione  $G1$ . Successivamente vi sono tre integratori  $I1, I2, I3$  che possono essere disabilitati mediante l'utilizzo degli interruttori  $Si$  corrispondenti. Il segnale è successivamente prelevato da due altri integratori:  $IF$ , per la correzione sul piezoelettrico ed  $IS$ , per quella sul termostato. Alla correzione sul piezoelettrico è sommato il segnale a radiofrequenza  $RF$  per la modulazione di fase.

L'aggancio si ottiene inizialmente mediante  $IF$  (interruttori  $Si$  chiusi), il quale è un integratore con il polo alla frequenza  $f_1 = 0.16$  Hz, ed avente uno zero alla frequenza  $f_2 = \Delta\nu_c/2$ . Lo zero nel tratto ad alta frequenza serve per avere un comportamento, ad anello aperto, di tipo  $1/f$ . Si ricorda infatti che per frequenze maggiori di  $\Delta\nu_c/2$  il comportamento corretto è già fornito dal segnale di discriminazione.

Per frequenze inferiori ad  $f_1 = 0.16$  Hz le correzioni avvengono mediante la regolazione di temperatura, cioè utilizzando lo stadio di integrazione puro  $IS$ .

Aperto gli interruttori  $Si$  è possibile aumentare la pendenza della curva di guadagno globale  $G(f)$  per le frequenze inferiori agli zeri  $f_{zi}$ . Questi sono scelti in modo da essere almeno un'ottava più in basso del punto a guadagno 1 dell'anello. Le frequenze  $f_{zi}$  sono di volta in volta selezionabili fra una serie di valori previsti (Si veda lo schema dettagliato), e qualora tutti gli stadi siano abilitati si ottiene un andamento per  $G(f)$  del tipo  $1/f^4$  per frequenze inferiori al kHz.

Tale sistema raggiunge guadagni molto elevati, alla frequenza di 1 Hz tipicamente si ottiene  $G(1 \text{ Hz}) \sim 10^{13}$ . Questo non crea grossi problemi in quanto i segnali che si utilizzano sono prossimi a zero essendo un loop di controllo. In fase di avvio vi possono essere dei fenomeni di saturazione, a cui si ovvia chiudendo temporaneamente gli interruttori  $Si$ .

---

<sup>4</sup>Se ad esempio si suppone di avere un sistema con un coefficiente di dilatazione  $\Delta l/l \sim 10^{-5}$  per °C, ciò significa che si richiede una stabilità in temperatura entro i 5 °C.

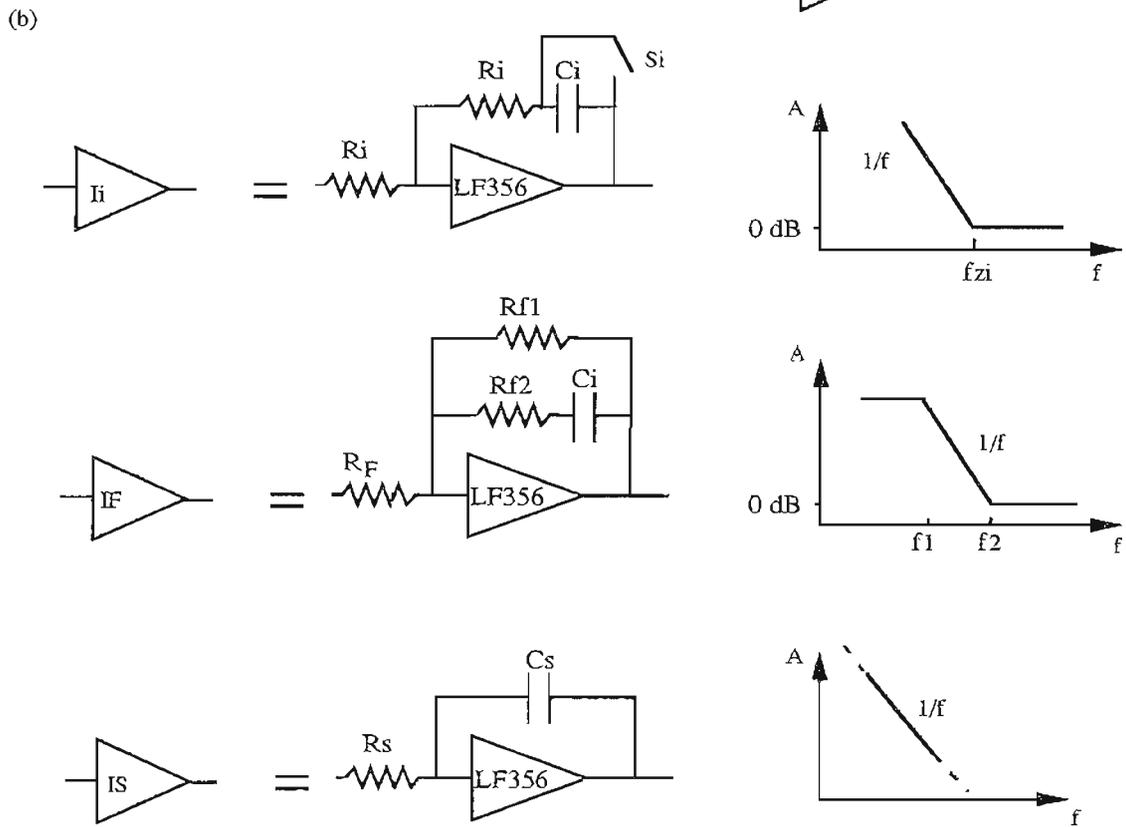
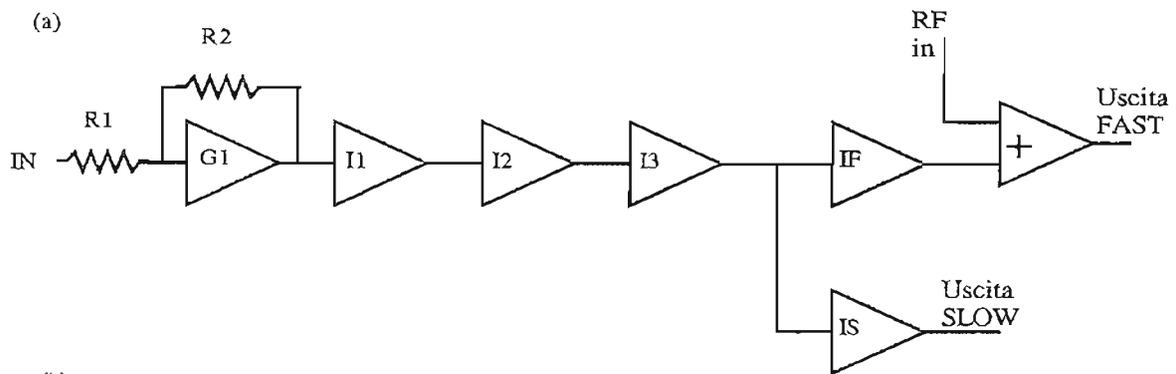
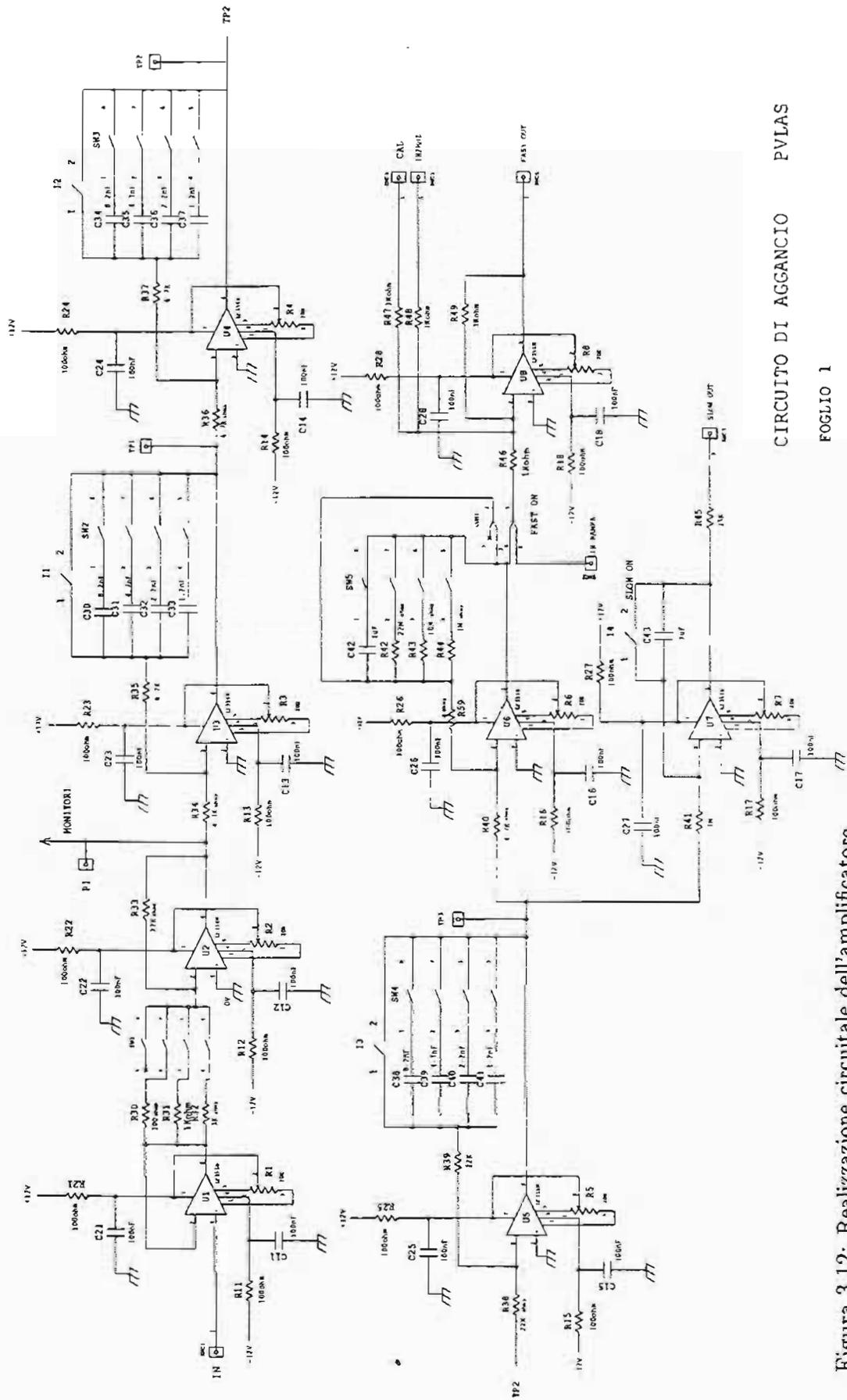


Figura 3.11: (a) Schema a blocchi del circuito di amplificazione (Servo). (b) Andamento (scala log-log) delle funzioni di trasferimento per ciascun blocco



CIRCUITO DI AGGANCIO PVLAS

FOGLIO 1

Figura 3.12: Realizzazione circuitale dell'amplificatore

# Capitolo 4

## Caratteristiche delle cavità realizzate

### 4.1 Generalità

Verranno ora illustrate le caratteristiche delle cavità realizzate durante il dottorato. Si farà particolare attenzione a quelle specifiche utili per derivare la fattibilità dell'esperimento per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto. In questo caso infatti, più che la stabilità relativa fra il laser e la cavità, risulta essenziale conoscere il rumore in ampiezza della luce trasmessa dal Fabry-Pérot. Si dovranno poi verificare le caratteristiche di polarizzazione del fascio stesso uscente dalla cavità, per controllare se il Fabry-Pérot depolarizza il fascio.

La realizzazione di finezze elevate, capaci di migliorare il fattore di amplificazione del Fabry-Pérot, è stato un altro degli obiettivi perseguiti. Per cavità di dimensioni macroscopiche alcune precedenti realizzazioni sono riportate in tabella 4.1, ove ne vengono date anche le caratteristiche.

indice	sito	$\mathcal{F}$	$d$	$\Delta\nu_c$	struttura	riferimento
(a)	Stanford	200000	17 cm	4.4 kHz	monolitica	Sampas et al 1993
(b)	Tokyo	103000	20 cm	7.3 kHz	monolitica	Uehara e Ueda 1994
(c)	Caltech	1900	40 m	2 kHz	specchi sospesi	Vogt et al 1989
(d)	Glasgow	4000	10 m	4 kHz	specchi sospesi	Hough et al 1991

Tabella 4.1: Alcune fra le cavità macroscopiche già realizzate

I modelli (c) e (d) sono dei prototipi realizzati nell'ambito dello sviluppo di interferometri per la rivelazione di onde gravitazionali. I modelli (a) e (b) sono stati sviluppati per la stabilizzazione di sorgenti laser. Per struttura monolitica si intende che gli specchi formano un corpo unico assieme ad un cilindro di sostegno, forato sull'asse centrale, sul quale sono stati incollati mediante contatto ottico. In questo modo la struttura rigida garantisce la stabilità della cavità. Nel caso degli specchi sospesi la stabilità è invece ottenuta mediante l'uso di grandi masse sospese che fanno da supporto agli specchi stessi.

Nel caso della cavità dell'esperimento PVLAS vi sono delle difficoltà di realizzazione per entrambi i tipi di strutture. L'utilizzo di un cilindro di sostegno è reso difficile dalla limitata sezione disponibile per l'alloggiamento del Fabry-Pérot (diametro  $\leq 2.5$  cm). Avere delle masse sospese come portaspecchi è reso complicato essenzialmente dalla prevista dislocazione verticale.

Per tale motivo, come si vedrà in seguito, si sono realizzate delle cavità in cui gli specchi risultano alloggiati su normali supporti ottici indipendenti e rigidamente connessi al tavolo ottico di lavoro, in modo da poter simulare quello che si prevede si avrà nell'esperimento finale. Si vuole notare che ciò non significa aver scartato le altre soluzioni. In particolare si sono anche realizzate delle cavità con cilindro di sostegno fra gli specchi, ma in questo caso lo sviluppo non è ancora giunto a termine e si sono ottenuti risultati più modesti.

#### 4.1.1 Schema generale dell'apparato

In figura 4.1 è mostrato un disegno della disposizione degli elementi ottici utilizzati. Per quanto riguarda i Fabry-Pérot si sono indicati gli specchi entro un perimetro tratteggiato: mentre all'inizio si lavorava in aria e quindi non c'era alcuna precauzione particolare per la cavità, successivamente si è dovuto porre la cavità stessa in vuoto per ottenere finzze più elevate, altrimenti irrealizzabili a causa della diffusione nel mezzo.

La luce del laser, polarizzata, attraversa un isolatore Faraday (Optics for Research OFR-I0I-5-YAG) avente una capacità di rigetto di  $\sim 35$  dB sulla luce di ritorno. Tale elemento s'è dimostrato necessario poichè in caso di ottimo allineamento si ha una grossa parte di luce che torna al laser, il quale mostra comportamenti anomali se non isolato. Dopo il diaframma  $D1$ , usato per allineamento, vi sono due lenti  $L1$  ed  $L2$ . Tali lenti formano un telescopio per l'adattamento geometrico del fascio laser alla cavità. Poichè si sono realizzate cavità con caratteristiche geometriche differenti si sono dovuti utilizzare telescopi diversi. Dopo aver fatto un calcolo di massima (si veda ad esempio Svelto 1972 o Murino 1992) delle specifiche necessarie per le lenti e della distanza di separazione fra esse, la disposizione effettiva si otteneva mediante l'ausilio di uno strumento apposito (Coherent BeamMaster) per la misura della dimensione e posizione del waist del fascio dopo le lenti: tale procedura ha fornito ottimi risultati di adattamento fra laser e cavità.

I successivi specchi di rimando  $SR1$  ed  $SR2$ , montati su dei supporti orientabili, servono per il corretto allineamento del fascio con l'asse del risonatore. Il beam splitter  $BS$  successivo permette alla luce riflessa dalla cavità di essere raccolta sul fotodiodo  $FR$  (Hamamatsu S1223) attraverso la lente  $LR$ . Il diaframma  $DR$  è utilizzato per eliminare delle riflessioni spurie. Il beam splitter è in realtà un normale vetrino ottico con una riflettività di circa il 4 %. Ciò permette di avere in ingresso alla cavità una maggiore percentuale dell'intensità iniziale del laser, diminuendo l'incidenza relativa del rumore shot sul segnale trasmesso dal risonatore. Con la cavità non in risonanza la potenza sul fotodiodo  $FR$  è circa 2 mW.

Il segnale dal fotodiodo è mandato in ingresso al mixer (Mini Circuits ZP10514) per l'agganciamento alla Pound-Drever. All'uscita del filtro, successivo al mixer, vi è il punto di controllo ove si misura il segnale d'errore  $V_e$  (Si veda capitolo 3).

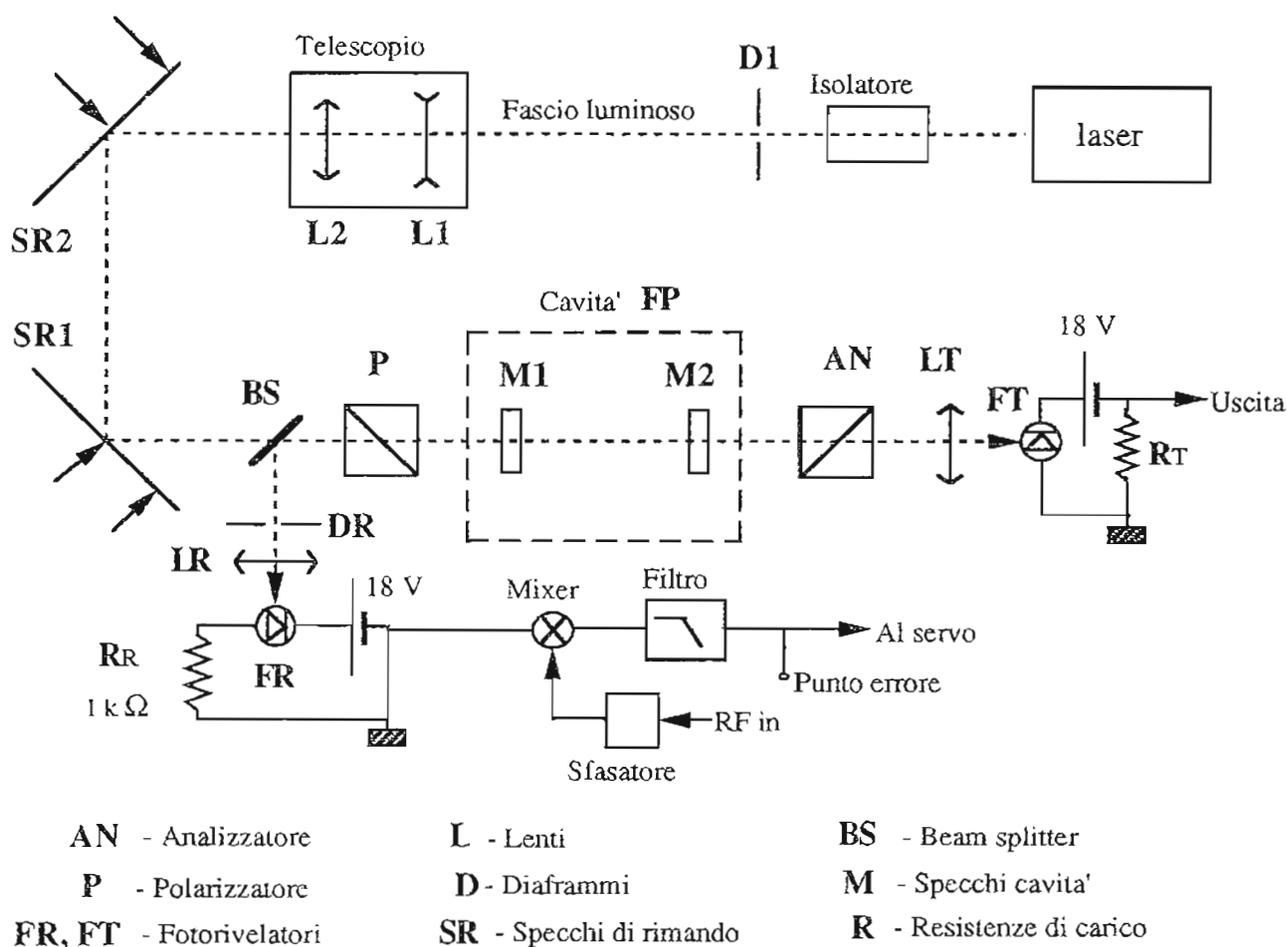


Figura 4.1: Schema del set-up ottico per la realizzazione di cavità Fabry-Pérot

I due polarizzatori  $P$  ed  $AN$  sono di tipo Glan-Thompson (Karl Lambrecht MGLAD-DW-12), e hanno fornito, in aria, una estinzione  $\sigma^2 \sim 10^{-7}$ . Per le misure di questo capitolo sono orientati per massima trasmissione. La lente  $LT$  focalizza il fascio in uscita sul fotodiode FT (Hamamatsu S1223).

Il montaggio degli specchi del Fabry-Pérot si effettua in diverse fasi successive. Si monta lo specchio  $M2$  e vi si manda il fascio laser mediante gli specchi di rimando  $SR1$  ed  $SR2$ . L'orientazione dello specchio  $M2$ , concavo, si regola in modo che il fascio riflesso ritorni su sé stesso. A tale scopo si usa un braccio di leva il più lungo possibile, ottenuto usando il diaframma  $D1$ . Si compie poi la stessa operazione con lo specchio piano  $M1$ .

Avendo fatto le cose per bene la cavità risulta quasi allineata, per migliorarne l'allineamento si deve ora controllare il segnale trasmesso. Variando con un segnale a dente di sega la frequenza del laser si controlla la presenza di picchi di trasmissione in presenza di modi risonanti. Identificato il modo principale  $TEM_{00}$  (Mediante osservazione con telecamera) si

cerca di eliminare i modi secondari, dovuti ad asimmetrie, agendo con cautela sui controlli sia degli specchi di rimando che degli specchi della cavità. Quando i modi secondari risultano trascurabili rispetto al principale si può procedere all'aggancio, cioè alla chiusura del loop di controllo.

#### 4.1.2 Le cavità realizzate

La prima cavità, indicata d'ora in avanti con RAF1 (Risunatore Alta Finezza 1), è stata realizzata in aria utilizzando degli specchi di prestazioni standard (LASEROPTIK GmbH) con una trasmittività misurata  $\mathcal{T} \simeq 3.8 \cdot 10^{-4}$ . I supporti (Microcontrole serie SL) sono dotati di regolazione manuale con vite micrometrica. La distanza fra gli specchi era  $d = 0.87$  metri, corrispondente ad un range spettrale FSR  $\simeq 170$  MHz. La finezza è stata ricavata dalla misura della larghezza di riga della cavità. In figura 4.2 si vede l'andamento del segnale in trasmissione al variare della frequenza del laser, ove è presente una modulazione di fase alla frequenza di 717.7 kHz.

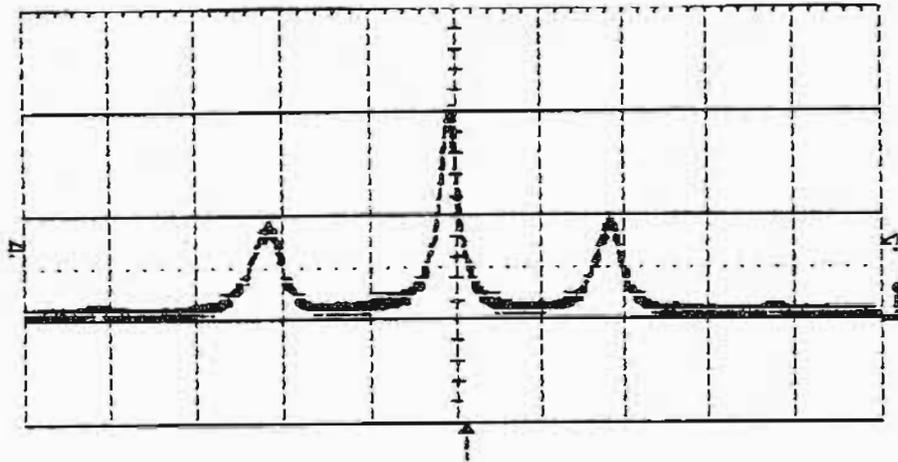


Figura 4.2: Andamento del segnale trasmesso, ottenuto variando lentamente la frequenza del laser, per luce modulata in fase alla frequenza di 717.7 kHz.

Le bande laterali forniscono quindi un riferimento di frequenza e si è ottenuto:

$$\Delta\nu_c (\text{RAF1}) \simeq 60 \text{ kHz} \quad (4.1)$$

che corrisponde ad una finezza:

$$\mathcal{F} (\text{RAF1}) = \frac{\text{FSR}}{\Delta\nu_c} \simeq 2800 \quad (4.2)$$

Si è notato che dopo qualche ora di funzionamento si ha un degrado della finezza. La pulizia degli specchi (usando alcool) ripristina le condizioni iniziali e si è quindi attribuito

il fenomeno al deposito di particelle di polvere sugli specchi. Come si vedrà, nel caso della cavità realizzata in vuoto non si è visto degrado.

La seconda cavità, indicata d'ora in avanti con RAF2, è stata realizzata in vuoto utilizzando degli specchi denominati Supermirror (Newport Inc.), con specifiche fornite dalla casa  $\mathcal{R} > 99.98\%$ ,  $p < 50$  ppm.

La camera a vuoto (Figura 4.4) è stata costruita utilizzando due croci a 6 vie, per l'alloggio degli specchi, e da un tubo che le connette. Scegliendo tubi di lunghezza diversa è possibile variare la distanza fra gli specchi mantenendo inalterate le altre parti meccaniche. In questo caso si è fissato  $d = 0.78$  metri. Gli specchi sono posti al centro delle croci mediante dei supporti ad L, fissati su una flangia di chiusura delle croci stesse, e sono sostenuti da portaspecchi Oriel (Modello 14350). Questi portaspecchi permettono, mediante delle viti che ne deformano leggermente la struttura in acciaio, di cambiare l'orientazione degli specchi per piccoli angoli ( $\leq 10^{-2}$  rad).

Due finestre di quarzo permettono al fascio di entrare ed uscire dalla zona di vuoto. Le croci sono quindi rigidamente connesse al tavolo ottico di lavoro.

Si è ricavata la finezza dal tempo di decadimento della cavità. Data una cavità in risonanza, qualora venga a mancare il segnale d'ingresso, l'intensità della luce trasmessa decade esponenzialmente con una costante di tempo pari a (Rempe 1992):

$$\tau_d = \frac{\mathcal{F}d}{c\pi} \quad (4.3)$$

In figura 4.3 si vede una misura di decadimento della luce trasmessa con il risultato della relativa interpolazione che ha fornito:

$$\tau_d \simeq 24 \mu\text{sec} \quad (4.4)$$

corrispondenti ad una finezza

$$\mathcal{F} \simeq 29000 \quad (4.5)$$

In tabella 4.2 sono riportate le specifiche delle cavità realizzate.

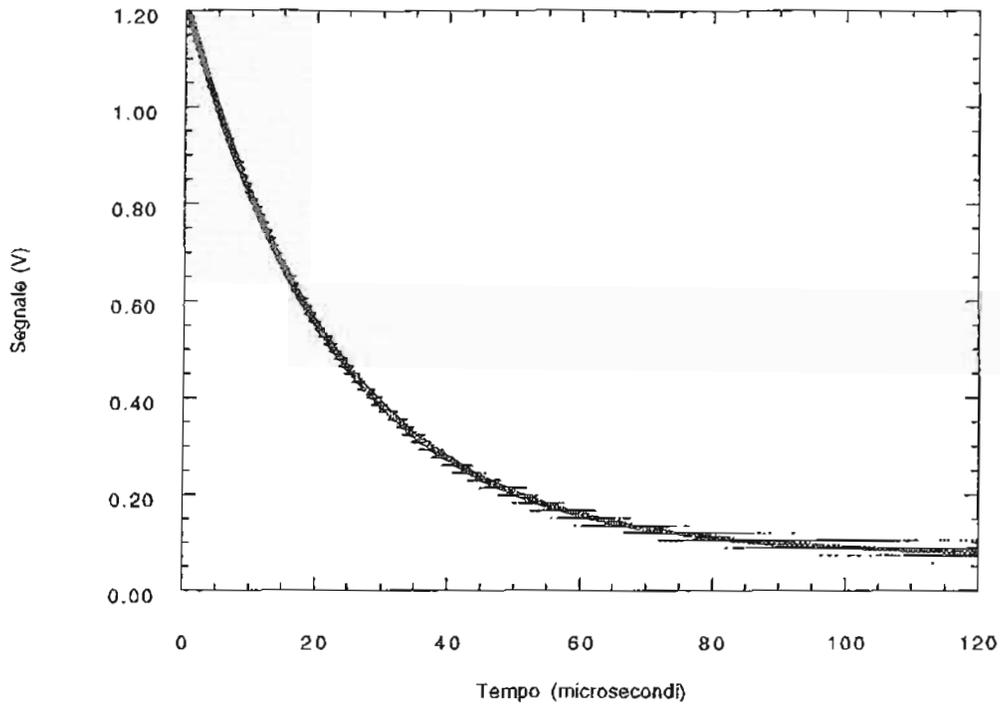


Figura 4.3: Andamento della luce trasmessa dalla cavità risonante RAF2 in seguito alla mancanza del segnale d'ingresso

parametro	RAF1	RAF2
specchi	LASEROPTIK	Newport Supermirrors
diametro	2.5 cm	2.5 cm
riflettività $\mathcal{R}$ (dalla casa)	$> 99.8\%$	$> 99.98\%$
trasmissività $\mathcal{T}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$
d	87 cm	78 cm
curvatura specchio concavo	5 m	1 m
waist $w_0$	0.78 mm	0.36 mm
$g_1 g_2$	0.83	0.22
range spettrale FSR	170 MHz	192 MHz
mezzo	aria	vuoto
modo	TEM <sub>00</sub>	TEM <sub>00</sub>
luce accoppiata al modo	98 %	95 %
efficienza $\eta_{FP} = I_t/I_0$	14 %	25 %
$\tau_d$	2.5 $\mu\text{sec}$	24 $\mu\text{sec}$
finezza $\mathcal{F}$	2800	29000
$\Delta\nu_c$	60 kHz	7 kHz

Tabella 4.2: Caratteristiche delle cavità Fabry-Pérot realizzate

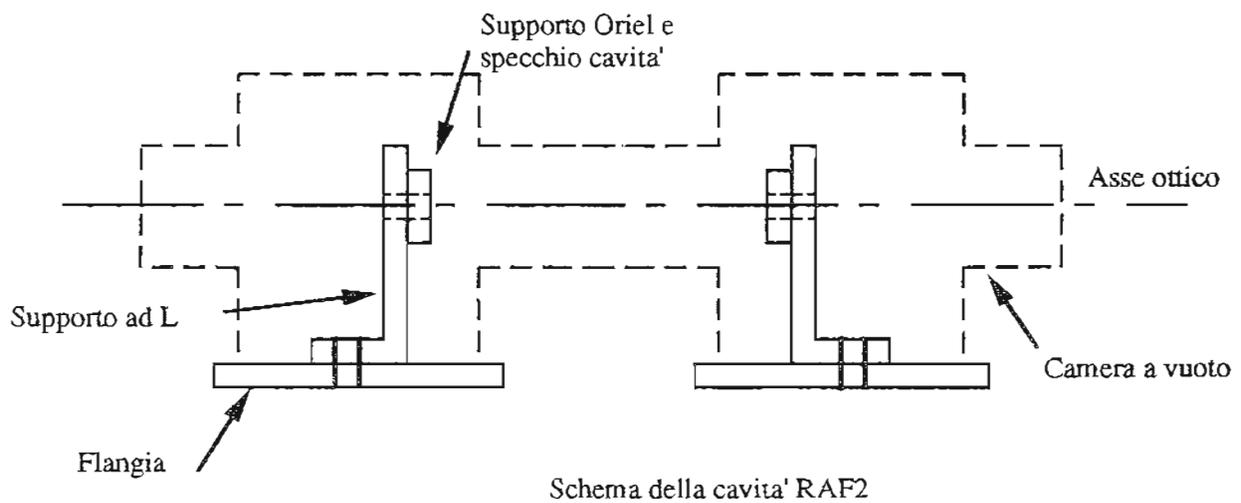
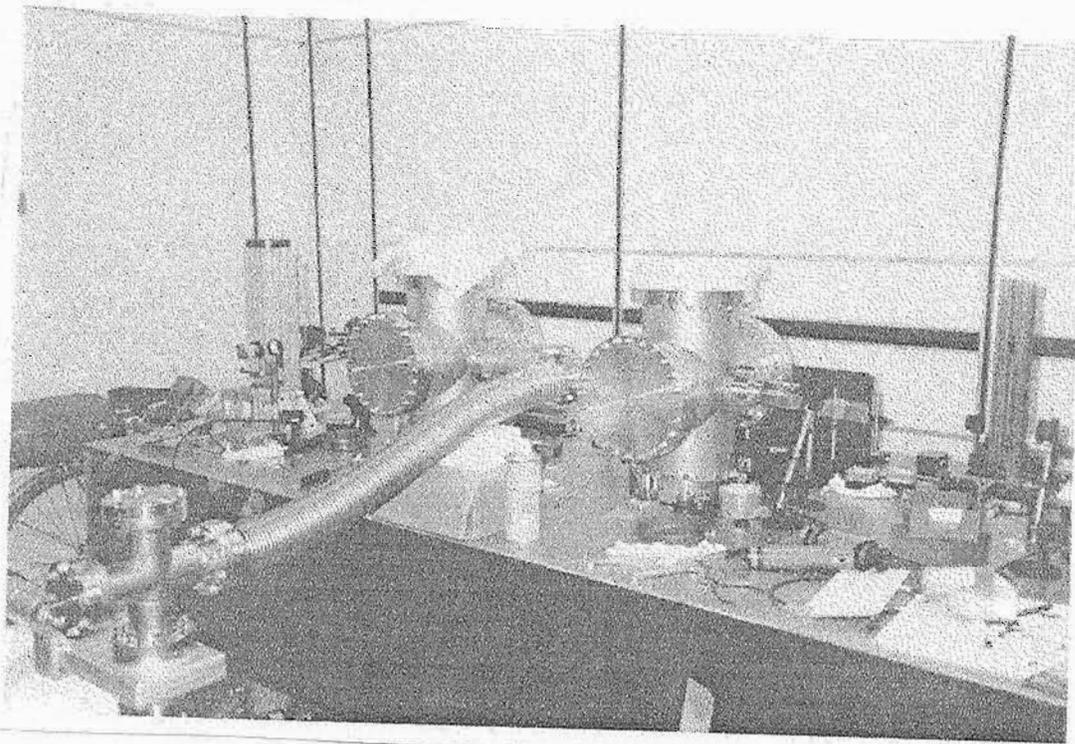


Figura 4.4: Camera a vuoto per la realizzazione di Fabry-Pérot ad alta finezza (Fotografia e schema di realizzazione)

## 4.2 Caratteristiche dell'aggancio

### 4.2.1 Misura di $D_V^0$

Si consideri lo schema di figura 3.2. Il segnale d'errore  $V_e$  è proporzionale alla differenza di frequenza fra il laser e la cavità, mediante la relazione:

$$V_e = D_V^0(\nu_L - \nu_c) = D_V^0\nu_N \quad \text{se } \nu_N < \frac{\Delta\nu_c}{2} \quad (4.6)$$

Dalla misura di  $V_e$  è quindi possibile risalire alla differenza  $\nu_N$ . Utilizzando un analizzatore di spettro si ottiene la densità spettrale  $\tilde{V}_e$ , in unità  $V/\sqrt{\text{Hz}}$ , in funzione della frequenza. Lo spettro corrispondente di  $\tilde{\nu}_N$  (in unità  $\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) si ottiene mediante la (4.6) una volta misurata  $D_V^0$ .

A loop aperto e variando la frequenza della sorgente, ad esempio con un segnale tipo dente di sega sull'attuatore piezoelettrico, si ottiene sperimentalmente l'andamento del segnale d'errore. In figura 4.5 si vede tale andamento per la cavità RAF1, l'indice di modulazione nel caso considerato è  $\beta = 0.9$ .

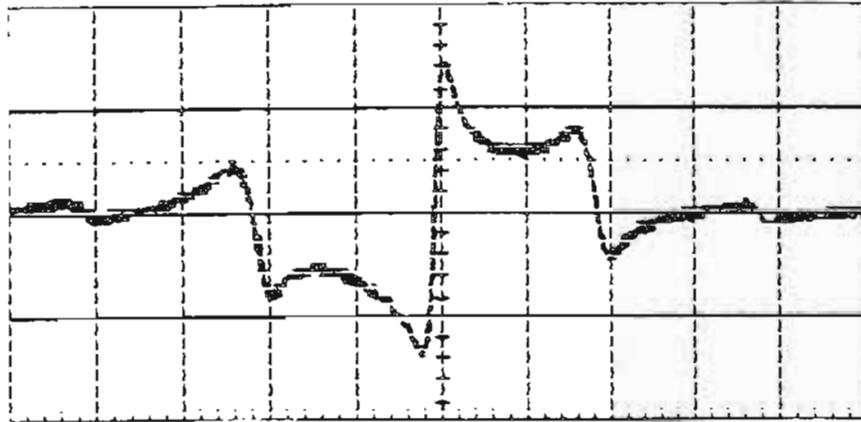


Figura 4.5: Andamento sull'oscilloscopio del segnale d'errore per la cavità RAF1,  $\beta = 0.9$ .

La distanza fra due zeri successivi è pari alla frequenza di modulazione  $\Omega_m/2\pi = 717.7$  kHz. Le misure effettuate sulla pendenza intorno al punto di zero centrale hanno fornito:

$$D_V^{mis}(\text{RAF1}) \simeq 1.1 \times 10^{-6} \quad \text{V/Hz} \quad (4.7)$$

In questa sezione sono riportati i risultati relativi alla cavità RAF1 nelle condizioni di regime. Come già detto in precedenza, si è osservato un degrado della finezza per il risonatore in aria. In tabella 4.3 sono riportate le specifiche di questa cavità in condizioni normali, mentre i dati riportati nella precedente tabella 4.2 sono da considerarsi l'ottimo raggiunto.

parametro	RAF1
efficienza $\eta_{FP}$	6 %
$\tau_d$	1.8 $\mu\text{sec}$
$\mathcal{F}$	2000
$\Delta\nu_c$	85 kHz

Tabella 4.3: Caratteristiche a regime del risonatore RAF1

Con questi valori, noto che sul fotodiodo in riflessione si ha una tensione  $V_0 = 0.66$  V, la pendenza attesa (vedi formula (3.24)):

$$D_V^{\text{th}}(\text{RAF1}) \simeq 1.2 \times 10^{-6} \text{ V/Hz} \quad (4.8)$$

di poco superiore al valore misurato (4.7).

La misura di  $D_V^0$  per la cavità RAF2 è stata eseguita in altro modo, a causa della alta finezza di questa cavità. Infatti, in questo caso, a causa delle fluttuazioni presenti nel sistema, non si riesce ad avere caricamento completo della cavità al variare della frequenza della luce incidente.

Il parametro  $D_V^0$  è stato misurato in maniera dinamica sfruttando le proprietà dell'anello di retroazione.

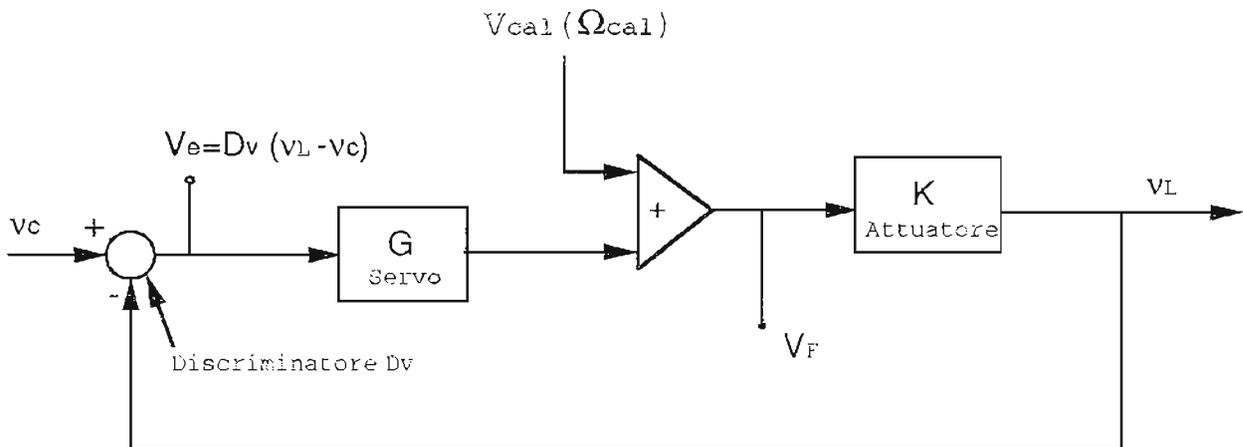


Figura 4.6: Schema per la misura dinamica di  $D_V$ .

Seguendo la figura<sup>1</sup> 4.6, si somma all'attuatore  $K$  del laser un segnale sinusoidale di frequenza  $\Omega_{cal}$  inferiore alla frequenza di taglio del sistema di discriminazione  $\Delta\nu_c/2$ . Tale segnale sarà corretto dall'anello, e quindi comparirà attenuato nel punto di misura  $V_F$ .

<sup>1</sup>In questa figura non compare la frequenza  $\nu_0$  in quanto supposta uguale a  $\nu_c$ .

oltre che nel punto d'errore  $V_e$ . Misurando le ampiezze corrispondenti al segnale  $V_{cal}(\Omega_{cal})$  nei punti  $V_F$  e  $V_e$ , si ottiene  $D_V$  dalla relazione:

$$D_V^0 \simeq \frac{V_e(\Omega_{cal})}{V_F(\Omega_{cal})K} \quad (4.9)$$

che segue direttamente dalla figura 4.6. Le misure fatte hanno quindi fornito:

$$D_V^{mis}(\text{RAF2}) \simeq 1.7 \times 10^{-5} \text{ V/Hz} \quad (4.10)$$

In questo caso si era usato un indice di modulazione  $\beta = 0.3$ . Questo valore di  $\beta$  ridotto è stato scelto affinché vi fosse maggiore luce trasmessa dalla cavità. In questo modo si ha piú intensità disponibile per le misure di ellissometria (Capitolo 2). Dai dati della tabella 4.2 si ricava la pendenza attesa per la cavità RAF2, ancora utilizzando la relazione (3.24):

$$D_V^{th}(\text{RAF2}) \simeq 1.9 \times 10^{-5} \text{ V/Hz} \quad (4.11)$$

In questo caso la potenza, fuori risonanza, sul fotodiodo  $FR$  è circa 4 mW che da' una tensione continua  $V_0 = 0.9 \text{ V}$ .

#### 4.2.2 Spettri del segnale d'errore

Misurando la densità spettrale  $\tilde{V}_e$  del segnale d'errore  $V_e$  ed usando la (4.6) si ottiene la densità spettrale  $\tilde{V}_N$  dello scarto in frequenza fra il laser e la risonanza della cavità.

Tali risultati sono dati in figura 4.7 per la cavità RAF1 ed in figura 4.8 per la cavità RAF2.

I picchi che appaiono sono dovuti all'alimentazione ed alle sue armoniche superiori.

Con il laser agganciato si sono misurate le tensioni  $V_{dc}$  sul fotodiodo  $FR$ :

$$V_{dc}(\text{RAF1}) = 0.4 \text{ V} \quad (4.12)$$

$$V_{dc}(\text{RAF2}) = 0.5 \text{ V} \quad (4.13)$$

per le quali si trova un corrispondente rumore shot all'uscita del mixer, calcolabile mediante la (3.35). Da questo si ricava il livello shot in frequenza:

$$\tilde{V}_{noise}(\text{RAF1}) \simeq 7 \times 10^{-3} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.14)$$

$$\tilde{V}_{noise}(\text{RAF2}) \simeq 5 \times 10^{-4} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (4.15)$$

Tali valori risultano compatibili con quelli che si ottengono mediante la relazione (3.35). Dalla figura 4.7 si vede che, per alcune frequenze, il rumore misurato è inferiore al livello shot. Questo non deve meravigliare, in quanto in un sistema ideale il segnale d'errore è nullo.

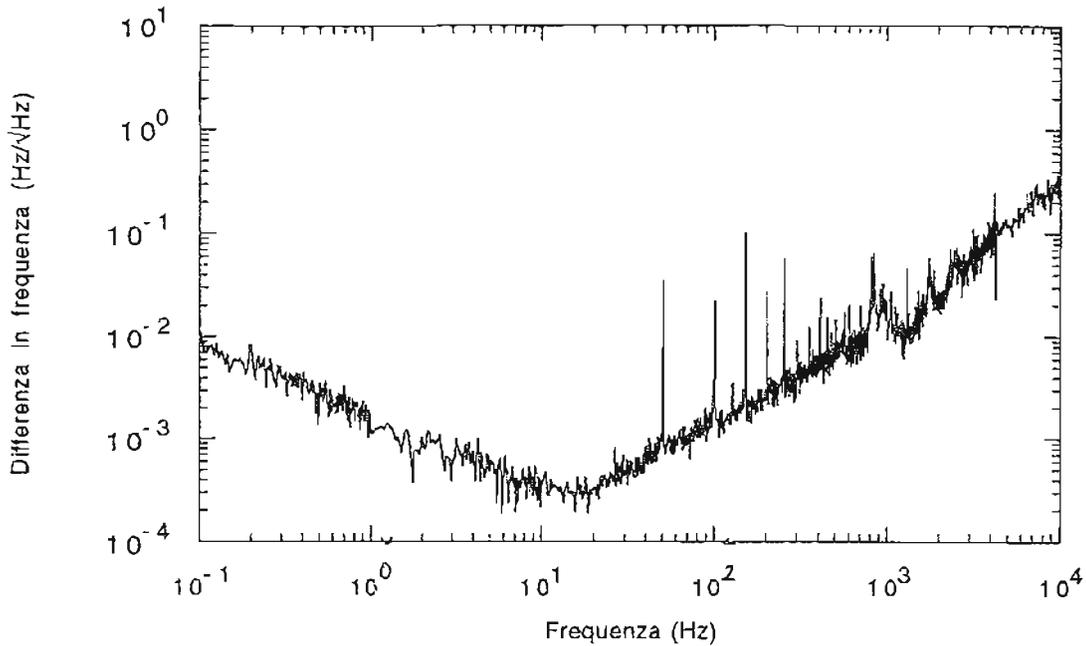


Figura 4.7: Densità spettrale  $\bar{\nu}_N$  della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF1.

In figura 4.9 è mostrato l'andamento del segnale di correzione  $V_F$ , cioè del segnale sul piezoelettrico  $K$ , ottenuto con la cavità RAF1. Questo spettro è una stima superiore del rumore in frequenza del laser libero. Si assume cioè che la cavità sia stabile e non introduca fluttuazioni di frequenza. Per frequenze di Fourier inferiori a 0.16 Hz la correzione avviene sul controllo in temperatura del laser e quindi tale ragionamento vale solo per frequenze superiori a tale soglia.

Il loop riduce tale rumore a quello delle figure 4.7 ed 4.8, agendo su una banda di circa 30 kHz. Per tali figure il servo era nella configurazione in cui gli zeri degli stadi integratori intermedi erano posti a circa 7 kHz (Frequenze  $f_i$  in figura 3.11). Il margine di fase ad anello chiuso è stato calcolato essere di circa 30 gradi (Per una analisi in frequenza più dettagliata della risposta del servo si veda Tonini 1995).

Si noti inoltre che, a causa della presenza di modulazione di ampiezza spuria (RAM), tra la frequenza di aggancio e la frequenza di risonanza del Fabry-Pérot è presente un offset (paragrafo 3.2.2). In questo caso risulta essere dell'ordine di qualche Hz per RAF1, inferiore all'Hz per RAF2.

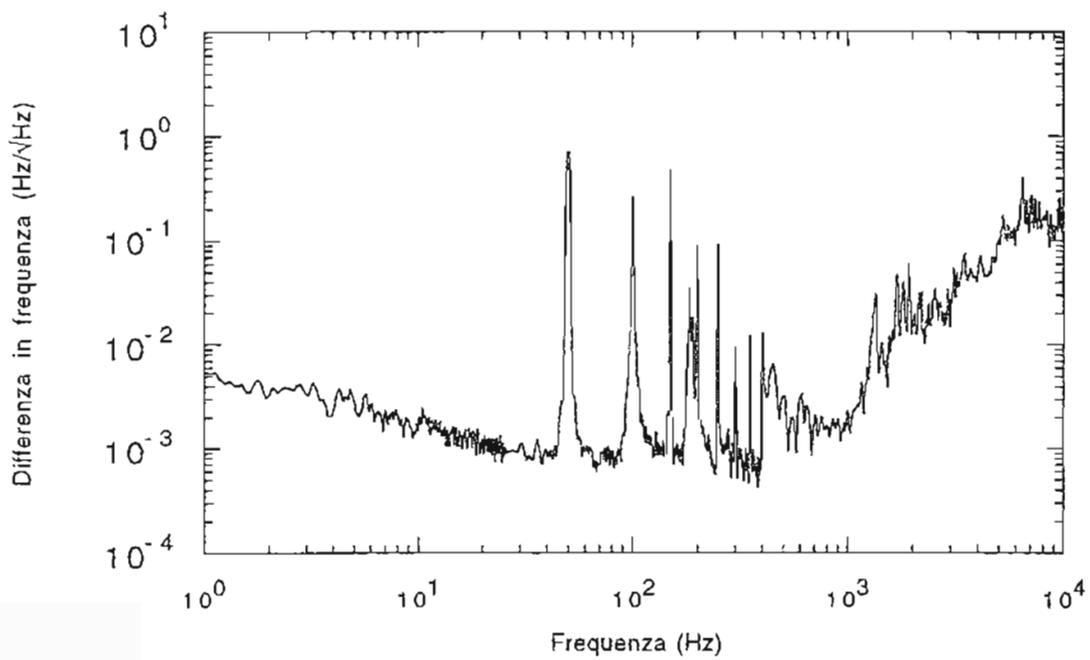


Figura 4.8: Densità spettrale  $\bar{\nu}_N$  della differenza in frequenza fra il laser e la frequenza di risonanza della cavità RAF2

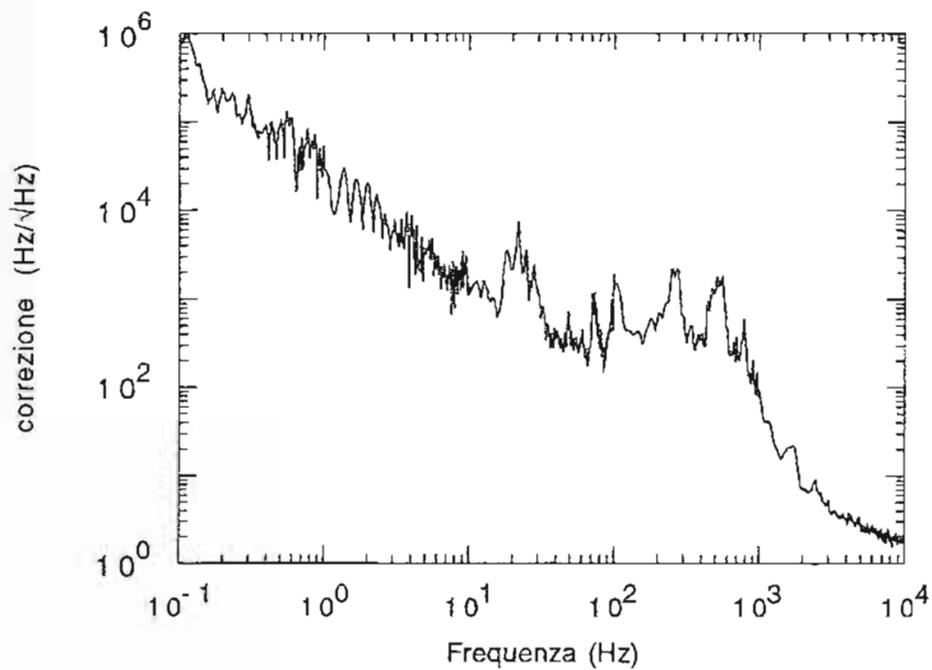


Figura 4.9: Densità spettrale del segnale di correzione al laser, misurato sull'attuatore piezoelettrico  $K$

## 4.3 Caratteristiche del fascio trasmesso

### 4.3.1 Rumore in ampiezza

Il fascio trasmesso dalla cavità Fabry-Pérot è utilizzato, nell'esperimento PVLAS, per ricavare l'informazione sulla birifrangenza magnetica del vuoto (capitolo 1), mediante la tecnica ellissometrica descritta nel capitolo 2.

Il segnale cercato si trova, all'uscita della cavità, alla frequenza di 2 Hz (paragrafo 1.2.3), indistinguibile da eventuali rumori presenti. Si è quindi studiato l'andamento del rumore in ampiezza della luce trasmessa, con particolare interesse per la banda a bassa frequenza compresa fra l'Hz e la decina di Hz.

La luce trasmessa è prelevata dal fotodiode *FT* (figura 4.1), polarizzato inversamente ed avente una resistenza di carico selezionabile  $R_T = \{1 \text{ k}\Omega, 100 \text{ k}\Omega, 1 \text{ M}\Omega, 100 \text{ M}\Omega\}$ , e viene quindi studiata per mezzo di un analizzatore di spettro.

Il rumore in ampiezza è in genere espresso tramite la grandezza  $RIN(\omega)$  (Relative Intensity Noise):

$$RIN(\omega) = \frac{V_{noise}(\omega)}{V_{dc}} \quad (4.16)$$

ove  $V_{noise}$  è la densità spettrale della tensione misurata in  $V/\sqrt{\text{Hz}}$ , e  $V_{dc}$  è il valore, in volt, della continua.

Il rumore in ampiezza del laser libero è mostrato in figura 4.10.

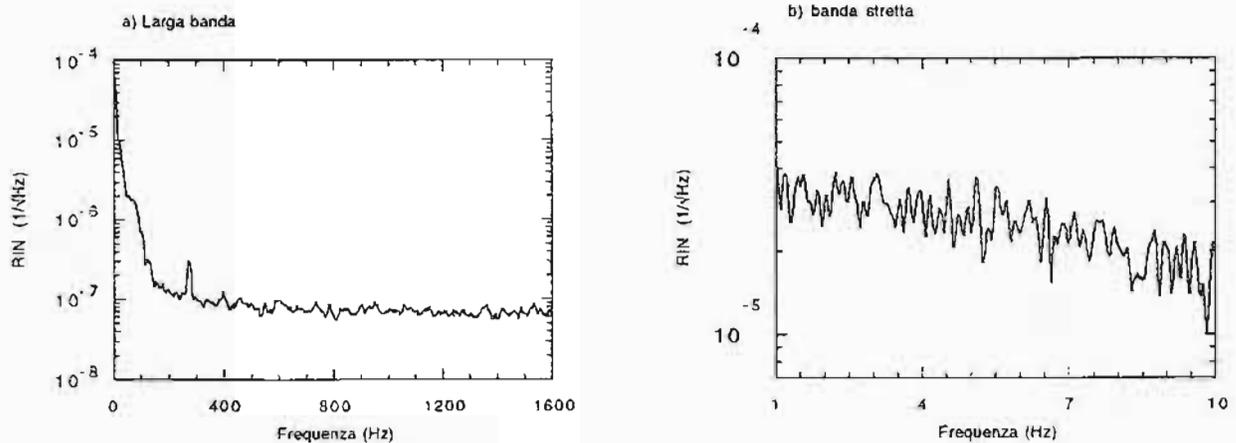


Figura 4.10: Rumore in ampiezza ( $RIN$ ) del laser libero, misurato alla distanza di 3 metri dalla sorgente

La figura si riferisce ad una misura effettuata con il fotodiode *FT* posto nella sua posizione standard ed in mancanza degli specchi della cavità FP. Si è visto infatti che, probabilmente a causa di fenomeni di turbolenza dell'aria, il rumore in ampiezza è più grande all'aumentare della distanza fra la sorgente ed il punto di misura. Il rumore all'uscita

del Fabry-Pérot deve essere quindi paragonato ad una misura effettuata in condizioni simili. In figura 4.11 è riportato lo spettro ottenuto con la cavità RAF1: l'intensità trasmessa era 2 mW corrispondenti a circa 450 mV sul fotodiode ( $R_T=1\text{ k}\Omega$ ).

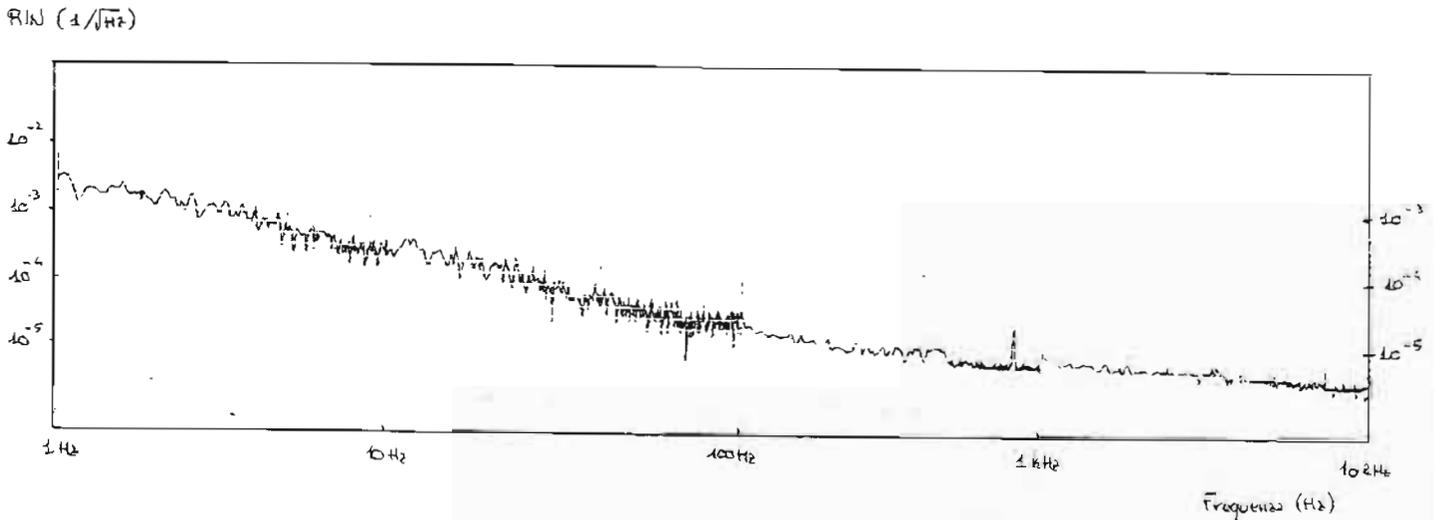


Figura 4.11: Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF1.

In questo caso si osserva un notevole peggioramento rispetto al laser libero, soprattutto alle basse frequenze. Si ricorda che, per la cavità RAF1, il fascio luminoso prima di giungere al fotodiode percorre in aria una distanza equivalente dell'ordine del km.

Il risultato ottenuto per la cavità RAF2 è mostrato in figura 4.12.

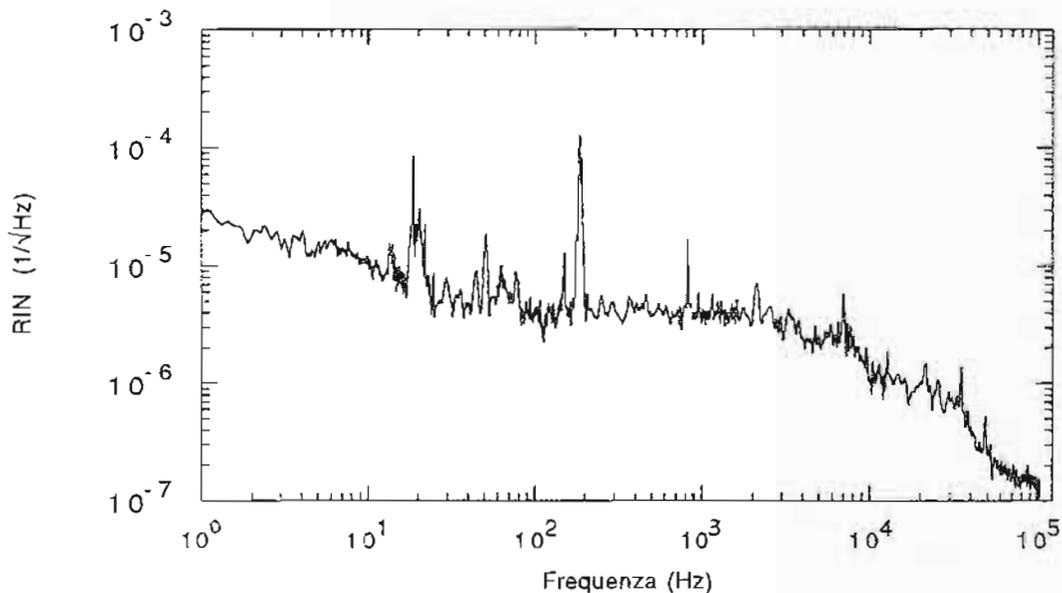


Figura 4.12: Rumore in ampiezza (RIN) della luce trasmessa dalla cavità RAF2.

L'intensità sul fotodiodo è circa 10 mW, pari ad un segnale di 2.3 V in continua ( $R_T=1$  k $\Omega$ ). In questo caso il mezzo della cavità è il vuoto (la pressione residua era circa  $10^{-5}$  mbar), e si vede un notevole miglioramento rispetto al caso precedente. Il picco intorno ai 180 Hz è stato attribuito a vibrazioni meccaniche dei supporti degli specchi di rimando *SR1* ed *SR2*.

In figura 4.13 è presentato uno spettro del rumore a bassa frequenza per la luce trasmessa dalla cavità RAF2, in modo da mettere in evidenza la banda attorno alla frequenza di interesse  $\omega_m = 2$  Hz. Tale spettro è stato ottenuto con 11 minuti di misura. I larghi picchi nella regione intorno ai 20 Hz sono probabilmente dovuti a risonanze meccaniche.

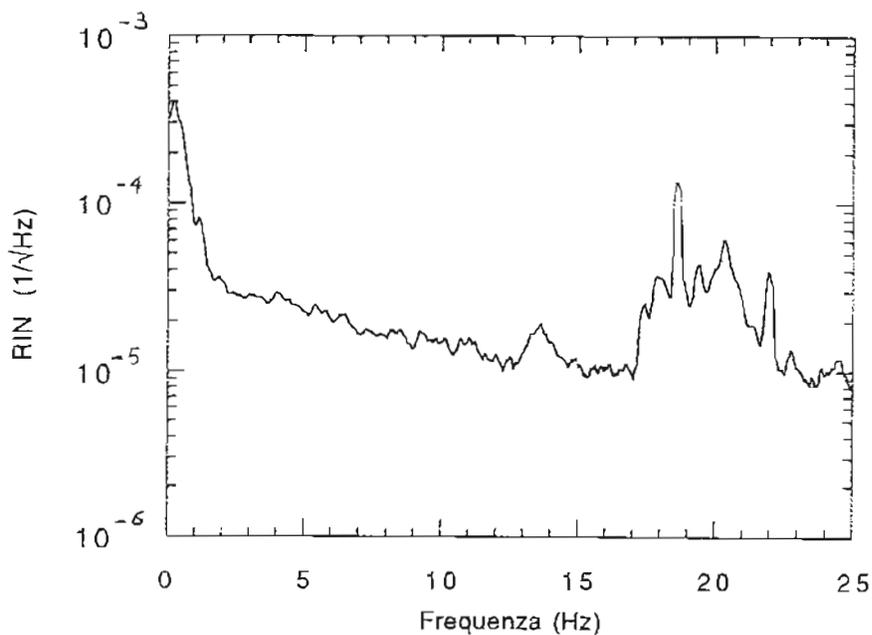


Figura 4.13: Rumore in ampiezza (RIN), a bassa frequenza, della luce trasmessa dalla cavità RAF2.

### 4.3.2 La polarizzazione

Utilizzando i polarimetri  $P$  ed  $AN$  (figura 4.1) si sono studiate le caratteristiche di polarizzazione del fascio uscente dal Fabry-Pérot. In assenza degli specchi della cavità la miglior estinzione raggiunta è stata  $\sigma^2 \sim 10^{-7}$ .

Gli specchi della cavità sono costituiti da depositi di dielettrico sopra un supporto (substrato) di vetro di spessore 0.5 cm. Il substrato presenta caratteristiche di birifrangenza, per cui ci si aspetta che il fascio che lo attraversa diventi a polarizzazione ellittica. Ciò è stato confermato dalla misura: con la cavità RAF1 montata l'estinzione è peggiorata al valore  $\sigma^2 \simeq 10^{-2}$ . Anche utilizzando una lamina di compensazione esterna il miglior valore ottenuto è stato circa  $10^{-4}$ . Poichè gli specchi si comportano come una lamina, è possibile orientarne l'asse lungo la polarizzazione iniziale del fascio, determinata dal polarimetro  $P$ , in modo da diminuire gli effetti di birifrangenza sul fascio stesso.

Si sono quindi ruotati gli specchi, attorno all'asse della cavità, sino a quando si è ottenuto un valore minimo di estinzione, pari a :

$$\sigma_{min}^2(\text{RAF1}) \simeq 2 \times 10^{-7} \quad (4.17)$$

Nel caso della cavità RAF2 la polarizzazione ellittica è causata sia dagli specchi che dalle finestre per l'accesso del fascio nella zona di vuoto. In questo caso, però, il diverso montaggio meccanico non ha permesso la ricerca della corretta disposizione degli elementi ottici in modo da avere birifrangenza minima. Per la cavità RAF2 l'estinzione ottenuta è stata:

$$\sigma^2(\text{RAF2}) \simeq 10^{-3} \quad (4.18)$$

E' possibile guadagnare un fattore circa 10 utilizzando una lamina compensatrice opportunamente orientata e posta all'uscita della cavità.

## Capitolo 5

# Misure di ellissometria: sensibilità attese ed effetto Faraday nell'aria

### 5.1 Rumori presenti nella misura

Nel capitolo 2 si è ricavato il tempo di misura dell'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto in caso di solo rumore shot. In una misura reale tale condizione è in genere difficile da ottenere, in quanto si manifestano altri rumori che degradano la sensibilità.

Fra essi ricordo:

- rumore in frequenza della luce
- rumore in ampiezza della luce (comprende il rumore  $1/f$ )
- rumore Johnson della resistenza del fotodiode
- rumori dell'elettronica

Vi sono poi altri fenomeni che possono indurre effetti spuri, come ad esempio:

- effetto Cotton-Mouton del gas residuo in cavità (discusso nella sezione 2.5 )
- effetto Cotton-Mouton negli elementi ottici indotto dal campo magnetico di fuga

Il rumore in ampiezza sul fascio può anche essere introdotto, ad esempio, da fluttuazioni di puntamento del laser stesso, dovute sia alla sorgente che a vibrazioni dei supporti ottici utilizzati. In più, se tali vibrazioni sono causate dal sistema di rotazione del magnete, si manifesteranno fluttuazioni in ampiezza alla frequenza fondamentale  $\omega_m$  ed alle sue armoniche.

Di tutto questo si deve tener conto nella realizzazione dell'esperimento PVLAS.

Il presente lavoro di tesi ha dimostrato che, mediante l'aggancio del laser, il rumore in frequenza non disturba la misura.

Nel prossimo paragrafo si esaminano gli effetti del rumore Johnson e del rumore in ampiezza della luce.

Il rumore dell'elettronica non viene qui considerato essendo in genere trascurabile rispetto agli altri.

### 5.1.1 Limiti richiesti sul rumore

Si indichi con  $S(\omega)$  la densità spettrale del rumore all'uscita del fotodiodo in trasmissione  $FT$ , funzione della frequenza angolare di Fourier  $\omega$ . Tale grandezza, misurata in  $V/\sqrt{\text{Hz}}$ , è costituita da diverse componenti; fissata  $R_T$  la resistenza di carico del fotodiodo segue:

- rumore Johnson

$$S^J(\omega) = \sqrt{4kT R_T} \quad (5.1)$$

ove  $k$  è la costante di Boltzman e  $T$  la temperatura in  $^\circ\text{K}$ <sup>1</sup>.

- rumore da fluttuazioni in ampiezza della luce:

$$S^A(\omega) = R_T \frac{eq\lambda}{hc} I_N(\omega) \quad (5.2)$$

ove  $I_N(\omega)$  è la densità spettrale dell'intensità della luce che incide sul fotodiodo, che si stima utilizzando i valori misurati per  $RIN(\omega)$ .

Consideriamo lo schema di ellissometro illustrato in figura 2.2. Le componenti spettrali del segnale al fotodiodo sono state riportate nella tabella 2.2. A causa del rumore in ampiezza presente nel fascio uscente dalla cavità, ognuna delle componenti deve essere moltiplicata per  $RIN(\omega)$ . Il rumore alle frequenze del segnale  $\omega_f \pm 2\omega_m$  diventa la somma di piú contributi, che scriviamo, ad esempio, per la frequenza  $\omega_f + 2\omega_m$ :

$$S_{dc} : I_{out}[\sigma^2 + \eta_0^2/2]RIN(\omega_f + 2\omega_m) \simeq I_{out}[\sigma^2 + \eta_0^2/2]RIN(\omega_f) \quad (5.3)$$

$$S_f : 2I_{out}\eta_0\theta_s RIN(2\omega_m) \quad (5.4)$$

$$S_{2f} : \frac{1}{2}I_{out}\eta_0^2 RIN(\omega_f - 2\omega_m) \simeq \frac{1}{2}I_{out}\eta_0^2 RIN(\omega_f) \quad (5.5)$$

si è indicato con  $I_{out} = \eta_{FP} I_0$  la luce trasmessa dalla cavità, ed i pedici alle grandezze  $S$  stanno ad indicare il corrispondente termine nella tabella 2.2 da cui provengono. Le approssimazioni fatte valgono in quanto si ha  $\omega_f \gg \omega_m$ . Si considererà inoltre sia sempre realizzabile la condizione  $\eta_0^2/2 > \sigma^2$  (Che può significare si devono ruotare gli specchi della cavità FP).

Nelle approssimazioni fatte si ottiene la seguente densità spettrale del rumore all'uscita del fotodiodo, alla frequenza che interessa  $\omega_f + 2\omega_m$ :

<sup>1</sup>A temperatura ambiente  $\sqrt{4kT} = 1.26 \times 10^{-10} \text{ J}^{1/2}$ .

$$S^A(\omega_f + 2\omega_m) = \frac{R_T e q \lambda \eta_0 I_{out}}{hc} [\eta_0 \text{RIN}(\omega_f) + \theta_s \text{RIN}(\omega_m)] \quad (5.6)$$

Affinchè si ottenga rivelazione al limite shot noise si deve avere:

$$S^A(\omega_f + 2\omega_m) < R_T e \eta_0 \sqrt{\frac{q \lambda I_{out}}{2hc}} \quad (5.7)$$

che significa:

$$\sqrt{\frac{2q \lambda I_{out}}{hc}} [\eta_0 \text{RIN}(\omega_f) + \theta_s \text{RIN}(2\omega_m)] < 1 \quad (5.8)$$

che, utilizzando la definizione di sensibilità shot data dalla (2.34), si scrive anche:

$$\eta_0 \text{RIN}(\omega_f) + \theta_s \text{RIN}(2\omega_m) < \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{sh} \quad (5.9)$$

Si deve avere inoltre, a causa della presenza del rumore Johnson:

$$\frac{4}{e \eta_0} \sqrt{\frac{kT hc}{q \lambda I_{dc} R_T}} < 1 \quad (5.10)$$

Per meglio capire il significato delle espressioni trovate, poniamoci nelle condizioni:

$$\begin{aligned} I_{out} &= 10 \text{ mW} \\ q &= 0.9 \\ T &= 298 \text{ }^\circ\text{K} \end{aligned}$$

Le disuguaglianze precedenti diventano:

$$\eta_0 \text{RIN}(\omega_f) + \theta_s \text{RIN}(2\omega_m) < 3 \times 10^{-9} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.11)$$

$$R_T \eta_0^2 > 20 \text{ } \Omega \text{ rad}^2 \quad (5.12)$$

Per modulazioni  $\eta_0 \sim 10^{-3}$  rad, significa allora che si ottiene shot-noise limited detection per:

$$\begin{aligned} \text{RIN}(\omega_f) &< 3 \times 10^{-6} \text{ per } \sqrt{\text{Hz}} \\ \theta_s \text{RIN}(2\omega_m) &< 3 \times 10^{-9} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \\ R_T &> 20 \text{ M}\Omega \end{aligned}$$

ove si sono considerati separatamente i due addendi della relazione (5.11).

Osservando il grafico della figura 4.12, si vede come, per RAF2, la condizione su  $RIN(\omega_f)$  sia rispettata. Da figura 4.13 si ricava che  $RIN(2\omega_m) \simeq 3 \cdot 10^{-5}$ , che significa si deve mantenere stabilmente:

$$\theta_s < 10^{-4} \text{ rad} \quad (5.13)$$

Qualora tale condizione venga rispettata, salvo la presenza di effetti spuri, ci si aspetta di misurare la birifrangenza magnetica del vuoto con i tempi previsti nella sezione 2.3.

### 5.1.2 Effetto della birifrangenza del substrato degli specchi del FP

Si consideri il solito schema di ellissometro dato in figura 2.2. Come visto nel capitolo 4 i substrati degli specchi del Fabry-Pérot possono essere birifrangenti. In tal caso il fascio all'uscita della cavità presenta una ellitticità  $\psi_S$ , ove l'indice  $S$  è usato in quanto si tratta di una ellitticità statica, distinguibile da quella della birifrangenza magnetica del vuoto che si manifesta alla frequenza  $2\omega_m$ .

In seguito al passaggio della luce attraverso la lamina a quarto d'onda,  $\psi_S$  dà luogo ad una rotazione  $\theta_\psi$ , che va a sommarsi alla rotazione spuria  $\theta_s$  precedentemente considerata (Vedi matrice  $\mathbf{S}$  in (2.18)), ed è da questa indistinguibile.

Le condizioni ricavate in precedenza devono quindi essere estese alla rotazione indotta dall'ellitticità  $\psi_S$ . Notiamo che in generale mediante la stessa lamina a quarto d'onda è possibile in parte compensare tale ellitticità statica, la rotazione  $\theta_\psi$  da essa indotta si deve quindi valutare mediante una misura di estinzione che comprenda la lamina a quarto d'onda.

La condizione precedentemente trovata  $\theta_s < 10^{-4}$  rad ci dice che diventa essenziale avere un sistema di orientazione degli specchi: le estinzioni che si hanno senza tale accorgimento sono infatti risultate  $\sim 10^{-4}$ , che significano valori di  $\theta_\psi \sim 10^{-2}$ .

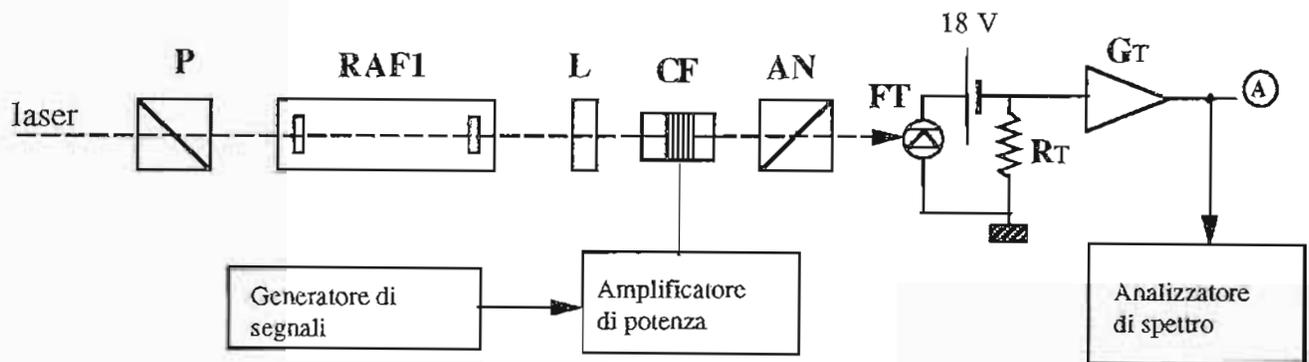
## 5.2 Misure di sensibilità per ellissometri

Utilizzando le cavità realizzate si sono eseguite delle misure di ellissometria per ricavare dei valori di sensibilità sperimentali. A causa della mancanza di tempo a disposizione non si è riusciti a svolgere un lavoro accurato. Si devono quindi considerare tali misure come preliminari ad altre che si dovranno effettuare in futuro nell'ambito dell'esperimento PVLAS.

### 5.2.1 Misure di sensibilità con la cavità RAF1

Lo schema di ellissometro è quello illustrato nel capitolo 2. In figura 5.1 se ne dà la realizzazione pratica.

Si è omessa la parte utilizzata per l'aggancio in frequenza del laser. I polarimetri sono quelli già descritti in precedenza.



- P** - Polarizzatore      **L** - Lamina a quarto d'onda      **RAF1** - Fabry-Perot  
**AN** - Analizzatore      **CF** - Cella Faraday      **FT** - Fotorivelatore  
**RT** - Resistenza di carico      **GT** - Ampl. x 11      **(A)** - Punto di misura

Figura 5.1: Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF1

La cella Faraday CF è costituita da un vetrino BK7, della lunghezza di circa 1 cm, inserito in una bobina. Un segnale proveniente da un generatore di funzioni (HP3325B), e amplificato da un amplificatore di potenza, pilota la bobina. La frequenza di lavoro per la cella è stata  $\omega_f/2\pi = 27$  Hz, valore che permetteva di avere elevata corrente sulla bobina senza per questo surriscaldarla. Frequenze più elevate non erano permesse a causa della limitata tensione di uscita dell'amplificatore.

Il vetrino della cella CF e la lamina a quarto d'onda L (Karl Lambrecht MWPQA4) sono orientati per avere massima estinzione quando i polarimetri P ed AN sono incrociati.

Il fotodiodo (Hamamatsu S1223) ha una efficienza quantica  $q = 0.28$  (Equivalentemente a 0.22 A/W) ed una capacità di 20 pF. La sua uscita è amplificata  $\times 11$  prima di essere letta da un analizzatore di spettro (HP35660A) per l'analisi di Fourier veloce.

A polarimetri paralleli e bobina non alimentata si misura la intensità trasmessa dalla cavità FP:

$$I_{out} = 0.83 \text{ mW} \quad (5.14)$$

corrispondenti ad un segnale di 2.0 V nel punto A di figura.  $R_T = 1 \text{ k}\Omega$ . Incrociando i polarimetri si ottiene l'estinzione  $\sigma^2 \simeq 2 \times 10^{-7}$ .

In figura 5.2 si vede il segnale all'analizzatore che si ottiene a polarimetri incrociati ed a cella Faraday attivata.

In questo caso  $R_T = 300 \text{ M}\Omega$ . Tale valore elevato è necessario a causa della bassa intensità che si misura, ed ha come conseguenza che il fotodiodo attenua il segnale alla frequenza  $2\omega_f/2\pi = 54$  Hz di circa un fattore 2. Dal grafico all'analizzatore e tenendo conto delle varie amplificazioni si ottengono le ampiezze corrispondenti alle componenti di tabella 2.2:

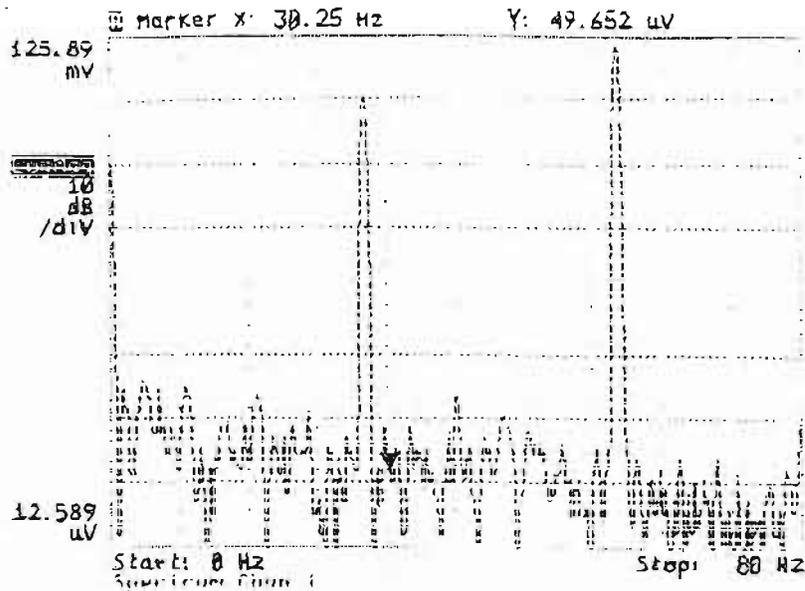


Figura 5.2: Segnale all'analizzatore di spettro per la misura di ellissometria con RAF1

$$\begin{aligned}
 I_{dc} &= 8.3 \times 10^{-4} \text{ W} \\
 I_f &= 5.5 \times 10^{-11} \text{ W} \\
 I_{2f} &= 2.9 \times 10^{-10} \text{ W} \\
 I_+ &\simeq I_- \simeq 6.9 \times 10^{-14} \text{ W}
 \end{aligned}$$

avendo considerato  $\omega_m = 1 \text{ Hz}$ .

Da tali valori si ricava:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{2I_{2f}}{I_{dc}}} = 8.4 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (5.15)$$

La banda di misura è  $\Delta f = 0.25 \text{ Hz}$ , ne segue che la sensibilità raggiunta per ellitticità prodotte nella cavità FP alla frequenza  $2\omega_m$  è:

$$\psi_n = \frac{\eta_0 I_+}{2 I_{2f}} \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \simeq 2.0 \times 10^{-7} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.16)$$

Utilizzando la relazione (2.34) ci si calcola il limite shot:

$$\psi_{sh} = 4.0 \times 10^{-8} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.17)$$

Il fattore 5 mancante si deve cercare di guadagnarlo con il miglioramento dell'apparato.

La sensibilità maggiore rispetto al livello shot si può attribuire alla presenza di rumore in ampiezza nel fascio. Utilizzando i risultati per RAF1 del capitolo precedente si trova (figura 4.11):

$$\text{RIN}(2\omega_m) \simeq 10^{-3} \text{ per } \sqrt{\text{Hz}} \quad (5.18)$$

$$\text{RIN}(\omega_f) \simeq 10^{-4} \text{ per } \sqrt{\text{Hz}} \quad (5.19)$$

Inoltre dal picco alla frequenza  $\omega_f$  si ricava:

$$\theta_s = \frac{I_f}{2\eta_0 I_{dc}} \simeq 4 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad (5.20)$$

La condizione (5.8)

$$\sqrt{\frac{2q\lambda I_{out}}{hc}} [\eta_0 \text{RIN}(\omega_f) + \theta_s \text{RIN}(2\omega_m)] < 1 \quad (5.21)$$

si scrive allora

$$4 + 2 \not< 1 \quad (5.22)$$

ed il fattore 6 è circa ciò che manca al livello shot.

## 5.2.2 Misure di sensibilità per la cavità RAF2

Con la cavità RAF2 si è provato un diverso schema di ellissometro, cioè anche a causa della ellitticità statica presente nel fascio trasmesso dal Fabry-Pérot. In questo caso, come visto in precedenza, non è stato possibile agire sulla orientazione degli specchi della cavità (oltre che poter ruotare le finestre di accesso alla camera a vuoto, anch'esse birifrangenti!).

Lo schema adottato è mostrato in figura 5.3.

All'uscita della cavità la lamina a quarto d'onda L è orientata in modo da ottenere luce polarizzata circolarmente. Il polarizzatore AN, incrociato rispetto a P, divide il fascio luminoso in due fasci di uguale intensità che sono rivelati dai due fotodiodi FT1 ed FT2, di caratteristiche il più possibile coincidenti (Due Hamamatsu S1223 con resistenza di carico  $R_T = 1 \text{ k}\Omega$  e uscita amplificata per  $G_T = 11$ ). I segnali dai due fotodiodi vengono quindi mandati ad un amplificatore differenziale ed il risultato della sottrazione è studiato con l'analizzatore di spettro.

Si supponga che all'uscita della cavità FP il fascio presenti una polarizzazione ellittica  $\psi_0 \ll 1$ , modulata nel tempo alla frequenza  $2\omega_m$ . Scriviamo la matrice di Jones per la luce, supponendo di avere la polarizzazione iniziale (definita da P), lungo l'asse  $x$ :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} 1 \\ i\psi_0 \sin 2\omega_m t \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Utilizzando la matrice di Jones per la lamina a quarto d'onda data a pagina 28, posto  $\alpha_L = \pi/4$  si ricava l'espressione del campo all'analizzatore:

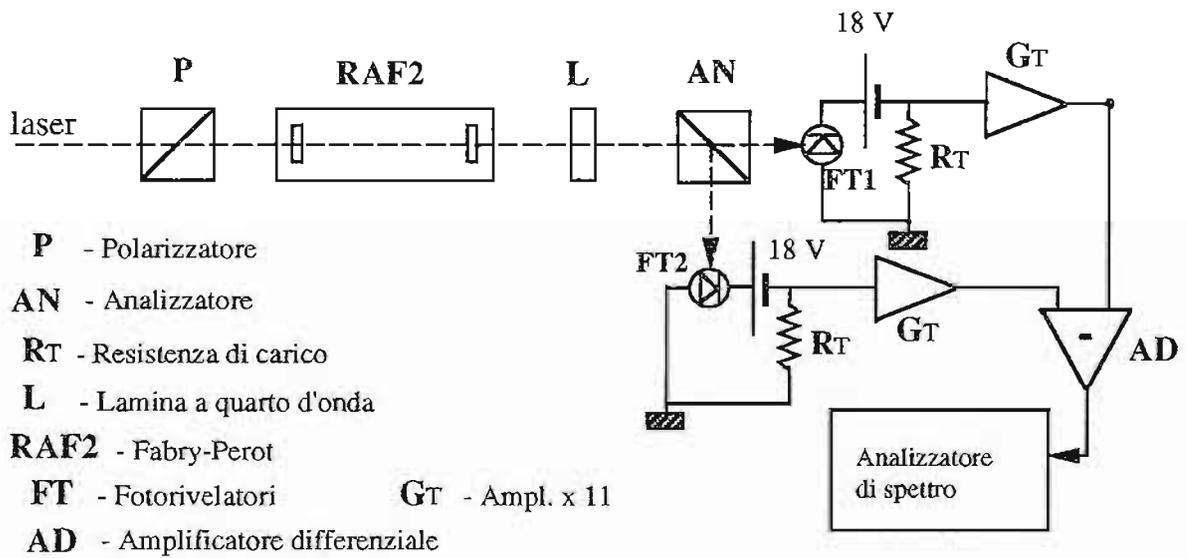


Figura 5.3: Schema dell'ellissometro realizzato con la cavità RAF2

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_{AN} \propto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+i)(1-\psi_0 \sin 2\omega_m t) \\ (i-1)(1+\psi_0 \sin 2\omega_m t) \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Sia  $I_{out}$  l'intensità della luce prima dell'analizzatore, all'uscita dei fotodiodi avremo le tensioni:

$$V_{FT1} = \frac{V_{out}}{2} (1 + 2\psi_0 \sin 2\omega_m t + \psi_0^2 \sin^2 2\omega_m t) \quad (5.25)$$

$$V_{FT2} = \frac{V_{out}}{2} (1 - 2\psi_0 \sin 2\omega_m t + \psi_0^2 \sin^2 2\omega_m t) \quad (5.26)$$

$$V_{out} = R_T G_T \frac{\lambda q e I_{out}}{hc} \quad (5.27)$$

Il segnale differenza, misurato dall'analizzatore di spettro, sarà allora:

$$V_{diff} = 2V_{out} \psi_0 \sin 2\omega_m t \quad (5.28)$$

e contiene l'informazione cercata proprio alla frequenza  $2\omega_m$ .

In figura 5.4 si vede uno degli spettri ottenuti con questo tipo di ellissometro, in assenza di un effetto in cavità.

La misura del fondo  $\tilde{V}_{diff}$  fornisce anche stavolta la sensibilità raggiunta:

$$\psi_n = \frac{\tilde{V}_{diff}(2\omega_m)}{2V_{out}} \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.29)$$

ove  $V_{out} = 18 \text{ V}$  è stato ottenuto semplicemente sommando le due componenti continue sui fotodiodi.

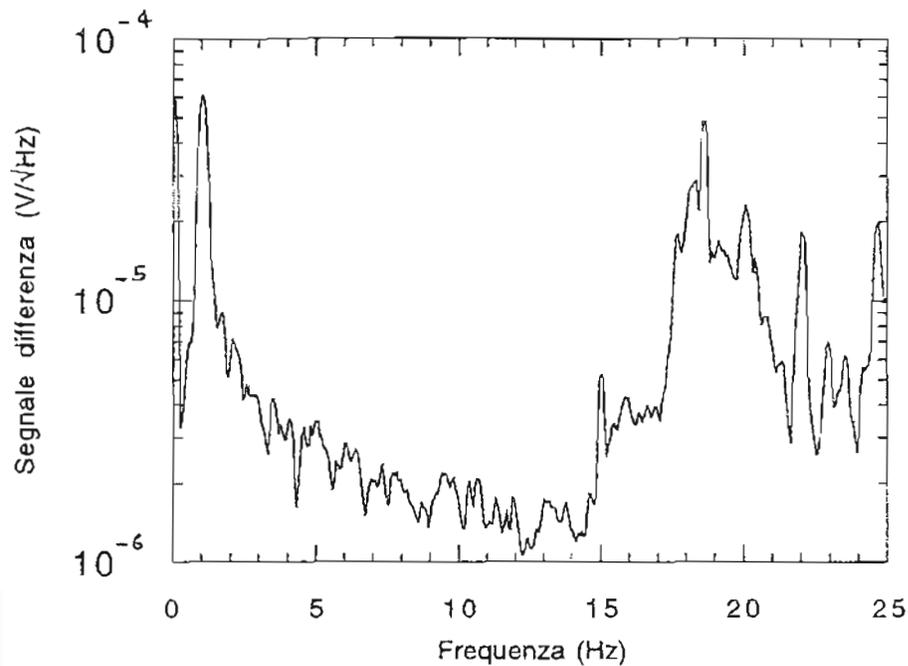


Figura 5.4: Misura di sensibilità con la cavità RAF2 e schema differenziale. Fondo ottenuto.

Il livello shot per questa misura si calcola allo stesso modo visto per l'ellissometro precedente, in questo caso si ricava  $I_{out} = 7 \text{ mW}$ , per cui:

$$\psi_{sh} \simeq 2 \times 10^{-8} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (5.30)$$

Stavolta il fattore da guadagnare è circa 10.

Nella semplice analisi fatta in questo paragrafo non si è tenuto conto degli effetti dovuti ai rumori o a birifrangenze statiche presenti. Se si introducono tali fattori si può spiegare, come fatto in precedenza, il mancato raggiungimento del livello shot.

### 5.3 Misura dell'effetto Faraday nell'aria

L'ulteriore prova che si è voluto fare è la verifica del fattore di amplificazione per una cavità Fabry-Pèrot, pari a  $2\mathcal{F}/\pi$  come visto in appendice A. Utilizzando la cavità RAF1, si è posta una bobina con l'asse coincidente con quello della cavità risonante. Si veda la figura 5.5.

A causa del campo magnetico  $B$  presente, la luce, polarizzata da P, subisce una rotazione Faraday all'interno della bobina percorsa da corrente. Per un singolo passaggio tale rotazione  $\theta_F$  è:

$$\theta_F = ViN \quad (5.31)$$

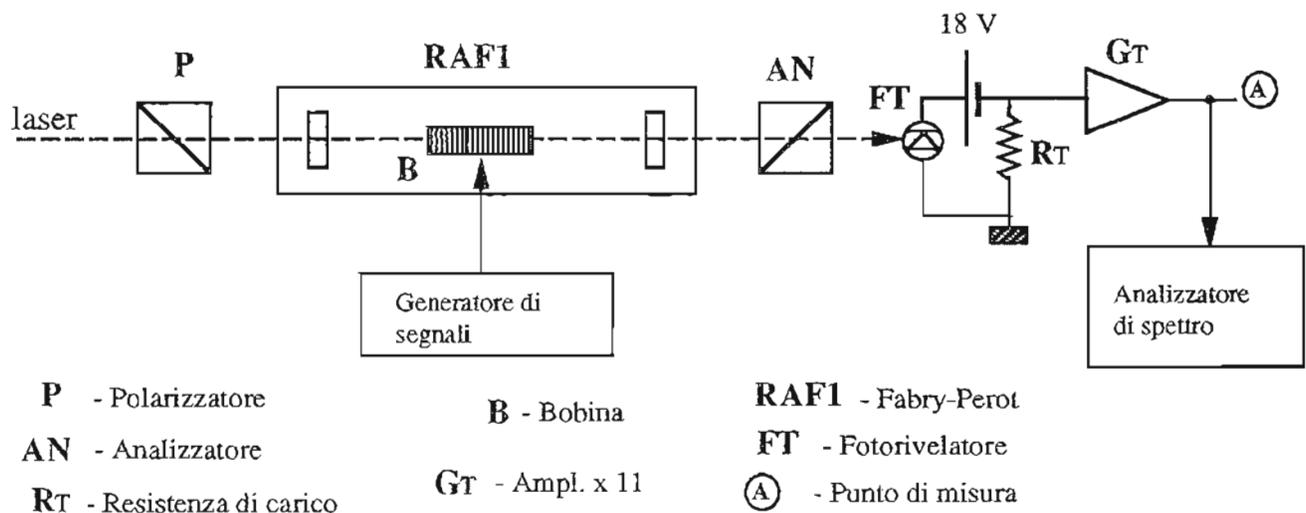


Figura 5.5: Schema per la misura dell'effetto Faraday nell'aria

ove  $V$  è la costante di Verdet dell'aria,  $N$  il numero di spire della bobina percorsa dalla corrente  $i$ . La bobina viene alimentata con un segnale sinusoidale di frequenza  $\nu_F = 31$  Hz, e produce un campo magnetico tale che:

$$iN \simeq 350 \text{ gauss cm} \quad (5.32)$$

A bobina non alimentata l'intensità trasmessa sul fotodiode FT con i polarimetri paralleli è  $I_0 \simeq 1.3 \text{ mW}$ .

Incrociando i polarimetri ed alimentando la bobina, il segnale al fotodiode si può scrivere:

$$I_f(t) = I_0 \left[ \sigma^2 + \left( \frac{2\mathcal{F}\theta_F}{\pi} \right)^2 \cos^2 2\pi\nu_F t \right] \quad (5.33)$$

$$= I_0 \left[ \sigma^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2\mathcal{F}\theta_F}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\mathcal{F}\theta_F}{\pi} \right)^2 \cos 4\pi\nu_F t \right] \quad (5.34)$$

Utilizzando un analizzatore di spettro per l'analisi del segnale al fotodiode si trova:

$$\frac{2\mathcal{F}^2\theta_F^2}{\pi^2} I_0 \simeq 3 \times 10^{-11} \text{ W} \quad (5.35)$$

Sapendo che la finezza per la cavità RAF1 è circa 2000 si trova:

$$\theta_F \simeq 1.7 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (5.36)$$

Da cui si ottiene la costante di Verdet per l'aria:

$$V \simeq 5.0 \times 10^{-10} \text{ rad/gauss cm} \quad (5.37)$$

Tale valore si discosta di poco dal valore della letteratura. Estrapolando a  $\lambda = 1064$  nm i risultati dati dal Landolt-Bornstein (1932) per lunghezza d'onda inferiori, si ottiene infatti:

$$V \simeq 6.2 \times 10^{-10} \text{ rad/gauss cm} \quad (5.38)$$

## Capitolo 6

### Conclusioni

Con il lavoro svolto per questa tesi si è voluto verificare la fattibilità della realizzazione di un ellissometro per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto (Esperimento PVLAS - Bakalov 1994b). Tale ellissometro sarà basato essenzialmente su un Fabry-Pérot di lunghezza circa 5 m, la cui finezza dovrà essere almeno 30000: valori inferiori porterebbero ad un allungamento del tempo di misura su periodi troppo lunghi per poter pensare la misura realizzabile.

Si sono realizzate due cavità prototipo ad alta finezza: RAF1 e RAF2. Con la cavità RAF2 si è raggiunta la finezza necessaria, con una distanza fra gli specchi di 78 cm. Alle cavità realizzate è stato asservito un laser mediante un circuito di regolazione avente una banda di funzionamento di 30 kHz. La tecnica di agganciamento usata è stata quella in riflessione (di Pound-Drever), e la regolazione di frequenza avveniva direttamente sul laser tramite un attuatore piezoelettrico. È già in fase di studio l'allargamento della banda di controllo sino alla frequenza di 1 MHz; a causa delle limitate prestazioni dell'attuatore piezoelettrico si userà una cella elettroottica sul percorso luminoso. La modulazione di fase, necessaria per la stabilizzazione in riflessione, si farà utilizzando una seconda cella elettroottica accordata alla frequenza di 10 Mhz. Ne consegue, inoltre, il necessario adattamento della componentistica elettronica. L'allargamento della banda di controllo permetterà di ottenere una riduzione dei disturbi provocati da vibrazioni meccaniche e sonore ad alta frequenza: in fase di misura con le cavità realizzate succedeva talvolta che suoni ad alta frequenza provocassero lo sganciamento del laser dalla cavità. Questo comportamento è attribuibile in parte anche alla struttura meccanica rigida del sistema. Si sono fatte delle prove preliminari in cui gli specchi della cavità erano connessi da un cilindro di sostegno, a sua volta sospeso tramite dei fili di acciaio: in tal caso l'incidenza del rumore ambientale si è ridotta notevolmente.

Si sono eseguite delle misure di ellissometria per provare lo schema completo dell'esperimento PVLAS. Con la cavità RAF1 si è misurata la sensibilità ottenuta utilizzando la tecnica eterodina con una cella di Faraday. Nel caso della cavità RAF2 si è invece utilizzato uno schema diverso basato sulla comparazione fra i segnali di due fotodiodi. Le prove di sensibilità eseguite non hanno raggiunto il livello shot, ponendosi circa un fattore 10 da esso: tali prove erano in ogni caso preliminari e sicuramente migliorabili. Nel caso della

misura con la cavità RAF1 la sensibilità non ottimale è senz'altro da attribuire all'elevato rumore in ampiezza del fascio trasmesso, causato dalla turbolenza dell'aria in cavità. La sensibilità con RAF2 è invece limitata dalla birifrangenza dei substrati degli specchi della cavità, per cui si ottengono valori di estinzione scadenti. Nell'esperimento PVLAS si dovrà prevedere la possibilità di ruotare gli specchi della cavità, per poter ottenere in tal modo valori di estinzione adeguati.

Le misure sulla cavità RAF2, posta in vuoto, hanno evidenziato che il rumore in ampiezza della luce trasmessa dal Fabry-Pérot si mantiene su livelli più che accettabili ( $\text{RIN}(2 \text{ Hz}) \sim 10^{-5} / \sqrt{\text{Hz}}$ ). La riduzione a valori tipici ( $\theta_s < 10^{-4} \text{ rad}$ ) di eventuali misallineamenti, già realizzata in altre occasioni (Cameron *et al* 1993), ci rende confidenti che riusciremo a perseguire l'obiettivo di una misura al livello shot.

Si deve completare lo studio sperimentale delle prestazioni delle tecniche ellissometriche iniziato in questa tesi. Oltre ai due metodi qui riportati è in fase di sviluppo l'uso di un modulatore di ampiezza per la tecnica eterodina. In condizioni ottimali ognuna di queste diverse tecniche fornisce la stessa sensibilità al livello shot. Poiché tale livello è direttamente legato alla intensità luminosa utilizzata, si deve cercare di migliorare le caratteristiche di trasmissione della cavità Fabry-Pérot, usando ad esempio specchi con minori perdite che la tecnologia relativa ora mette a disposizione. Un passo importante potrebbe inoltre essere l'utilizzo di sorgenti luminose di potenza più elevata. Tale soluzione può avere come controindicazione l'eventuale aumento del rumore connesso al riscaldamento dei componenti ottici.

Per le misure effettuate in questa tesi si sono utilizzati fotodiodi con efficienza quantica  $q = 0.28$ . Vi sono ora in commercio modelli con  $q \simeq 0.9$ . Date queste caratteristiche e con i parametri sin qui ricavati, il raggiungimento della sensibilità di livello shot permetterà una misura dell'effetto di birifrangenza magnetica del vuoto con  $\text{SNR} = 1$  in un tempo di integrazione  $T$ :

$$T \simeq 15 \text{ ore} \quad (6.1)$$

Valore che sembra ragionevole date le previste caratteristiche di stabilità dell'apparato.

Con tale misura sarà inoltre possibile fornire dei limiti sulla produzione di particelle scalari e pseudoscalari (Assione) circa 20 volte migliori di quelli derivanti da precedenti misure in laboratori terrestri (Si veda paragrafo 1.5.3).

Ricordo inoltre che è possibile eseguire la calibrazione della sensibilità dell'apparato utilizzando l'effetto di birifrangenza magnetica nei gas (Effetto Cotton-Mouton).

Si vuol notare che la sensibilità ottenuta a 2 Hz con la cavità RAF2:

$$\psi_n \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ rad}/\sqrt{\text{Hz}} \text{ (@2 Hz)} \quad (6.2)$$

si traduce in una sensibilità per la misura di eventuali birifrangenze in cavità pari a:

$$\Delta n_n = \frac{\psi_n \lambda}{2\mathcal{F}d} \simeq 5 \times 10^{-18} \text{ per } \sqrt{\text{Hz}} \text{ (@2 Hz)} \quad (6.3)$$

a mia conoscenza il migliore valore finora ottenuto.

# Appendice A

## Caratteristiche di un risonatore Fabry-Pérot

### A.1 Funzione di trasferimento

Si abbia un sistema Fabry-Pérot costituito da due specchi, di coefficienti di riflessione  $r_i$  e trasmissione  $t_i$ , fra i quali è interposto un mezzo (Figura A.1).

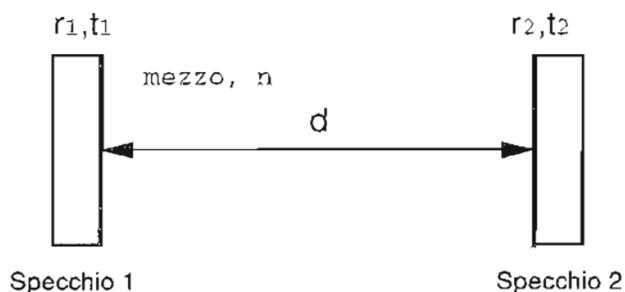


Figura A.1: Schema del risonatore

Supponiamo che il mezzo sia in generale assorbente, per cui scriviamo l'indice di rifrazione complesso:

$$n = n_r + in_i \quad (\text{A.1})$$

e valgano le seguenti relazioni:

$$\sigma_i = t_i^2 + r_i^2 = \mathcal{T}_i + \mathcal{R}_i = 1 - p_i \quad (\text{A.2})$$

ove  $p_i$  sono le perdite dello specchio  $i$ -esimo.

Per un percorso pari alla lunghezza  $d$  della cavità il campo elettrico  $E$  associata ad un'onda luminosa incidente sul Fabry-Pérot subisce una trasformazione:

$$E \rightarrow E e^{i\delta} = E' \quad (\text{A.3})$$

$$\tilde{\delta} = 2\pi n \frac{d}{\lambda} = 2\pi n_r \frac{d}{\lambda} + 2i\pi n_i \frac{d}{\lambda} \quad (\text{A.4})$$

$$E' = E e^{i\tilde{\delta}/2} e^{-\alpha d} \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha = 2 \frac{\pi n_i}{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

$$\delta = 4 \frac{\pi n_r d}{\lambda} \quad (\text{A.7})$$

$\alpha$  è il coefficiente di assorbimento per unità di lunghezza e  $\delta$  è lo sfasamento dell'onda per un giro di cavità, tipico parametro usato nella letteratura. Per mezzi diversi si avranno diverse funzioni  $\alpha = \alpha(\lambda)$ .

Cerchiamo quindi le equazioni caratteristiche che descrivono il comportamento della cavità.

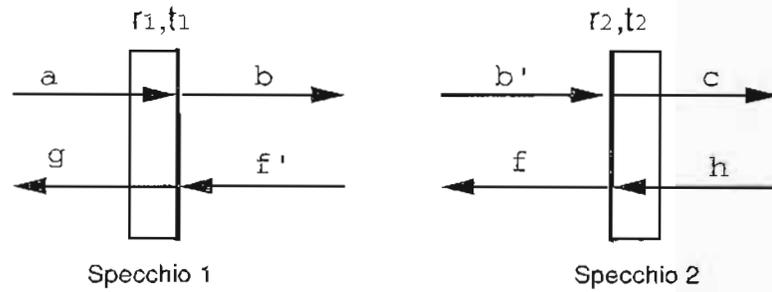


Figura A.2: Convenzioni per i campi del risonatore

Seguiamo a tal proposito lo schema di figura A.2 utilizzando le convenzioni adottate da Born e Wolf (1980). In tal modo useremo  $-r$  per le riflessioni che avvengono fra il mezzo e la superficie riflettente dello specchio,  $+r$  nell'altro caso.

Si possono scrivere le relazioni seguenti:

$$b = at_1 - f'r_1 \quad b' = be^{i\tilde{\delta}}$$

$$g = ar_1 + f't_1 \quad f' = fe^{i\tilde{\delta}}$$

$$c = b't_2 + hr_2$$

$$f = dt_2 - b'r_2$$

Ci poniamo nella condizione  $h = 0$  (Campo entrante nullo) e sviluppiamo tali relazioni rispetto ai parametri che interessano:

$$\left(\frac{g}{a}\right) = r_{FP} = \frac{r_1 - \sigma_1 r_2 e^{2i\tilde{\delta}}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\tilde{\delta}}} \quad (\text{A.8})$$

$$\left(\frac{c}{a}\right) = t_{FP} = \frac{t_1 t_2 e^{i\tilde{\delta}}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\tilde{\delta}}} \quad (\text{A.9})$$

Andando a sostituire la relazione per  $\tilde{\delta}$  si ricavano le funzioni di trasferimento in funzione dello sfasamento  $\delta$  su un giro:

$$H^r(\delta) = \frac{r_1 - \sigma_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha d}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha d}} \quad (\text{A.10})$$

$$H^t(\delta) = \frac{t_1 t_2 e^{i\delta/2} e^{-\alpha d}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha d}}$$

La condizione di risonanza per la cavità è:

$$e^{\pm i\delta} = 1 \quad \delta = 2k\pi \quad (\text{A.11})$$

Per ricavare le funzioni di trasferimento per le intensità si deve considerare il modulo quadro delle relazioni (A.10), e si ottiene:

$$\mathcal{T}_{FP} = |H^t(\delta)|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2 e^{-2\alpha d}}{(1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha d})^2} \left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2 e^{-2\alpha d}}{(1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha d})^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-1} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathcal{R}_{FP} = |H^r(\delta)|^2 = \frac{(\sigma_1 r_2 e^{-2\alpha d} - r_1)^2}{(1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha d})^2} \frac{\left[ 1 + 4 \frac{\sigma_1 r_1 r_2 e^{-2\alpha d}}{(\sigma_1 r_2 e^{-2\alpha d} - r_1)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]}{\left[ 1 + 4 \frac{r_1 r_2 e^{-2\alpha d}}{(1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha d})^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]} \quad (\text{A.13})$$

In risonanza si ha un massimo per l'intensità trasmessa ed un corrispondente minimo per quella riflessa.

Al variare di  $\delta$  si hanno picchi di trasmissione ogni volta è verificata la condizione (A.11). La distanza tra due massimi successivi della curva di trasmissione prende il nome di Free Spectral Range (FSR) della cavità risonante. Tale grandezza si può esprimere in funzione della frequenza utilizzando l'espressione di  $\delta$ , si ricava:

$$\text{FSR} = \frac{c}{2d} \quad (\text{A.14})$$

Se si chiama la larghezza, in frequenza, a metà altezza del picco di trasmissione  $\Delta\nu_c$ , rimane definita la grandezza  $\mathcal{F}$  tramite la relazione:

$$\mathcal{F} = \frac{\text{FSR}}{\Delta\nu_c} \quad (\text{A.15})$$

Dall'espressione per la trasmittività segue allora:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2} e^{-2\alpha d}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\alpha d}} \quad (\text{A.16})$$

Tale relazione, qualora si consideri specchi di caratteristiche uguali, si può approssimare in:

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\pi}{\mathcal{T} + p + 2\alpha d} \quad (\text{A.17})$$

che mi dice che la finezza è determinata dalla somma di tutte le 'perdite' che si hanno in cavità: luce trasmessa dagli specchi, luce assorbita dagli specchi, luce diffusa o assorbita nel mezzo. Non si sono qui considerate le perdite per diffrazione, ma si possono pensare come un termine che si aggiunge alle perdite dovute agli specchi (Derivano infatti dalle dimensioni finite di questi).

Sono infine di varia utilità le seguenti relazioni ricavate dalle (A.10), con  $\alpha = 0$  e specchi uguali:

$$\Im\{r_{FP}\} = -\frac{\mathcal{T}\mathcal{F}^2}{\pi^2 r} \frac{\sin \delta}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2 \delta/2} \quad (\text{A.18})$$

$$\arg r_{FP} = \arctan \frac{\mathcal{T} \sin \delta}{(1 + \mathcal{R} - \mathcal{R}\sigma) + (1 + \mathcal{R} - \sigma) \cos \delta} \quad (\text{A.19})$$

## A.2 Aumento del cammino ottico

Consideriamo un mezzo birifrangente di lunghezza  $L$  e definiamo i due assi  $\perp$  e  $\parallel$  tali che:

$$n_{\parallel} = n_0 + \frac{\Delta n}{2} \quad (\text{A.20})$$

$$n_{\perp} = n_0 - \frac{\Delta n}{2} \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp} \quad (\text{A.22})$$

Se  $\vec{E}$  è il campo elettrico di un fascio luminoso che attraversi il mezzo, all'uscita di questo scriviamo il campo  $\vec{E}'$  nelle sue componenti:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} e^{2i\pi n_{\parallel} L/\lambda} \quad (\text{A.23})$$

$$E'_{\perp} = E_{\perp} e^{2i\pi n_{\perp} L/\lambda} \quad (\text{A.24})$$

La differenza di fase fra queste due componenti risulta:

$$\delta_{\perp} = 2\pi\Delta n L/\lambda \quad (\text{A.25})$$

Si ponga ora il mezzo all'interno di una cavità Fabry-Pérot risonante, che per semplicità si suppone avente specchi di uguali caratteristiche e  $\alpha = 0$ .

Dopo la cavità si scriveranno le componenti:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} H(\delta_{\parallel}) \quad \delta_{\parallel} = 4\pi n_{\parallel} L/\lambda \quad (\text{A.26})$$

$$E'_{\perp} = E_{\perp} H(\delta_{\perp}) \quad \delta_{\perp} = 4\pi n_{\perp} L/\lambda \quad (\text{A.27})$$

La differenza di fase  $\delta_{FP}$  fra le due componenti si scrive in questo caso:

$$\delta_{FP} = \arg H(\delta_{\parallel}) - \arg H(\delta_{\perp}) = \quad (\text{A.28})$$

$$= \arctan \frac{\mathcal{R} \sin \delta_{\parallel}}{1 - \mathcal{R} \cos \delta_{\parallel}} - \arctan \frac{\mathcal{R} \sin \delta_{\perp}}{1 - \mathcal{R} \cos \delta_{\perp}} \simeq \quad (\text{A.29})$$

$$\simeq 4\pi \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}} \Delta n \frac{L}{\lambda} \quad (\text{A.30})$$

ove l'ultima approssimazione vale per  $\Delta n \ll 1$  e cavità in risonanza.

Confrontando gli sfasamenti che si ottengono con e senza la cavità, possiamo attribuire la differenza ad un cammino ottico efficace  $L^{eff}$  tale che:

$$\delta_{FP} = 2\pi\Delta n \frac{L^{eff}}{\lambda} \quad (\text{A.31})$$

$$L^{eff} = 2 \frac{\mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}} L \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi} L \quad (\text{A.32})$$

### A.3 Fabry-Pérot in presenza di dicroismo

Si ricava ora l'effetto della risonanza nella ipotesi di assorbimento selettivo all'interno della cavità. Si abbia per una componente un assorbimento che riduca di un fattore  $\delta_a$  la componente stessa su una distanza pari alla lunghezza  $d$  del Fabry-Pérot.

Per calcolare il campo uscente si usa la relazione (A.10) per la trasmissione, avendo posto  $\alpha d = \delta_a$  e nella condizione di risonanza sullo sfasamento  $\delta$  (per semplicità si suppone inoltre specchi uguali).

La diminuzione della componente del campo si calcola dalla differenza fra il caso senza assorbimento ( $\delta_a = 0$ ) e quello con assorbimento:

$$\Delta E' = \frac{\mathcal{T}}{1 - \mathcal{R}} E - \frac{\mathcal{T} e^{-\delta_a}}{1 - \mathcal{R} e^{-2\delta_a}} E \simeq \quad (\text{A.33})$$

$$\simeq \frac{\mathcal{T}}{1 - \mathcal{R}} \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta_a E \quad (\text{A.34})$$

In presenza di assorbimento selettivo la componente ridotta che esce da una cavità risonante si scrive:

$$E' = \frac{\mathcal{T}}{1 - \mathcal{R}} \left( 1 - \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \delta_a \right) E \quad (\text{A.35})$$

# Referenze

- Adler, S. L., Bahcall, J.N., Callan C.G., Rosenbluth, M.N. 1970,  
*Photon splitting in a strong magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **25**, 1061
- Adler, S.L. 1971,  
*Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field*, Ann. Phys. **67**, 599
- Akhiezer, A. I., Berestetsky, V. B. 1965,  
*Quantum Electrodynamics*, Interscience, New York
- Azzam, R. M. A., and Bashara, N. M. 1987,  
*Ellipsometry and polarized light*, North Holland Publishing Company, New York
- Bakalov, D. 1994a,  
*An overview of the nonlinear QED effects in the context of measurements of vacuum birefringency in the PVLAS experiment - early estimates*, da pubblicare
- Bakalov, D., Cantatore, G., Carugno, G., Carusotto, S., Favaron, P., Della Valle, F., Gabrielli, I., Gastaldi, U., Iacopini, E., Micossi, P., Onofrio, R., Pengo, R., Perrone, F., Petrucci, G., Polacco, E., Rizzo, C., Ruoso, G., Zavattini, E., Zavattini, G. 1994b,  
*PVLAS: Vacuum Birefringence And Production And Detection Of Nearly Massless, Weakly Coupled Particles By Optical Techniques*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **B35**, 180
- Bailey, J., Borer, K., Combley, F., Drumm, H., Farley, F.J.M., Field, J.H., Flegel, W., Hattersley, P.M., Krienen, F., Lange, F., Picasso, E., Von Ruden, W., 1977,  
*The anomalous magnetic moment of positive and negative muons*, Phys. Lett. **68B**, 191
- Banwell, C. J. and Farr, C. C. 1940,  
*Further Investigation of the Velocity of Propagation of Light in Vacuo in a Transverse Magnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London **A175**, 1
- Bialynicky-Birula, I. 1988,  
*Nonlinear structure of the electromagnetic vacuum*, Physica Scripta **T21**, 22

- Born, M., and Wolf, E. 1980,  
*Principle of Optics*, Pergamon Press
- Cameron, R., Cantatore, G., Melissinos, A.C., Semertzidis, Y., Halama, H.J., Lazarus, D.M., Prodell, A.G., Nezrick, F., Micossi, P., Rizzo, C., Ruoso, G., Zavattini, E., 1991,  
*First measurement of the magnetic birefringence of helium gas*, Phys. Lett. **A157**,125
- Cameron, R., Cantatore, G., Melissinos, A.C., Ruoso, G., Semertzidis, Y., Halama, H.J., Lazarus, D.M., Prodell, A.G., Nezrick, F., Rizzo, C., Zavattini, E. 1993,  
*Search for Nearly Massless, Weakly Coupled Particles by Optical Techniques*, Phys. Rev. **D47**, 3707
- Cantatore, G., Della Valle, F., Milotti, E., Pace, P., Zavattini, E., Polacco, E., Perrone, F., Rizzo, C., Zavattini, G., Ruoso, G. 1994,  
*Frequency locking of a Nd:YAG laser using the laser itself as the optical phase modulator*, in corso di stampa su Rev. Sci. Instr.
- Carusotto, S., Polacco, E., Iacopini, E., Stefanini, G., Zavattini, E., 1982,  
*Measurement of the magnetic birefringence in oxygen and nitrogen gases*, Optics Comm. **42**, 104
- Carusotto, S., Iacopini, E., Polacco, E., Scuri, F. Stefanini, G., Zavattini, E. 1984,  
*Measurement of the magnetic birefringence of noble gases*, J. Opt. Soc. Am. **B1**, 635
- Carusotto, S., Polacco, E., Iacopini, E., Stefanini, G., Zavattini, E., Scuri, F., 1989,  
*The ellipticity introduced by interferential mirrors on a linearly polarized beam orthogonally reflected*, Appl. Phys. **B48**, 231
- Cheng, H.Y. 1988,  
*The Strong CP Problem*, Phys. Rep. **158**, 1
- Costantini, V., De Tollis, B., Pistoni, G. 1971,  
*Nonlinear effects in quantum electrodynamics*, Il Nuovo Cimento **2A**, 733
- Day, T., Gustafson, E.K., Byer, R.L., 1992,  
*Sub-Hertz relative frequency stabilisation of two-diode laser-pumped Nd:YAG lasers locked to a Fabry-Pérot interferometer*, IEEE J. of Q. Electr. **28**, 1106
- Ding, Y.J., Kaplan, A.E. 1991,  
*Non-linear magneto-optical effect in vacuum: inhomogeneity-originated second-harmonic generation in DC magnetic field* Int. J. of Nonlinear Opt. Phys. **1**, 51
- Drever, R.W.P., Hall, J. L. , Kowalski, F. V., Hough, J. , Ford, G. M., Munley, A. J., and Ward, H 1983,

- Laser phase and frequency stabilisation using an optical resonator*, Appl. Phys. **B31**, 97
- Erber, T. 1961,  
*Velocity of Light in a Magnetic Field*, Nature **4770**, 25
- Farr, C.C. and Banwell, C. J. 1932,  
*Velocity of Propagation of Light in Vacuo in a Transverse Magnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London **A137**, 275
- Heisenberg, W. and Euler, H. 1936,  
*Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*, Z. fur Phys. **98**, 714
- Hough, J., Ward, H., Kerr, G. A., Mackenzie, N. L., Meers, B. J., Newton, G. P., Robertson, D. J., Robertson, N. A., and Schilling, R. 1991,  
*The stabilisation of lasers for interferometric gravitational wave detectors*, in *The detection of Gravitational Radiation*, ed. by Blair, E. G., Cambridge University Press, Cambridge, England
- Iacopini, E. and Zavattini, E. 1979,  
*Experimental method to detect the vacuum birefringence induced by a magnetic field*, Phys. Lett. **85B**, 151
- Iacopini, E., Lazeyras, P., Morpurgo, M., Picasso, E., Smith, B., Zavattini, E., Polacco, E. 1980,  
*Experimental determination of vacuum polarization effects on a laser light beam propagating in a strong magnetic field*, CERN Proposal D2, 9 June 1980
- Jones, R. V. 1961,  
*The Velocity of Light in a Transverse Magnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London **A260**, 47
- Kahane, S., Bar-Noy, T., Moreh, R., 1977,  
*Delbruck scattering of 9 MeV photons from Tantalum*, Nucl. Phys. **A280**, 180
- Kane, T.J. and Byer, R.L. 1985,  
*Monolithic, unidirectional single-mode Nd:YAG ring laser*, Opt. Lett. **10**,65
- Karplus, R. and Neuman, M., 1950  
*Non-Linear Interactions Between Electromagnetic Fields*, Phys. Rev. **80**, 380
- Kinoshita, T. 1992,  
*Muon g-2: Theory*, Zeit. fur Physik **C56**, S80
- Kogelnik, H. and Li, T. 1966,  
*Beams, Modes and Resonators*, Appl. Optics **5**, 1550

- Landolt-Borstein, 1923, *Physikalisch-Chemische tabellen*, Springer, Berlin
- Landsberg, V.I. 1979,  
*Ottica*, Ed. Mir, Mosca
- Lee, S. A., Fairbank, W. M. Jr., Toki, W., Hall, J.L., Kraushaar, P. Jr., Jaffery, T. 1994,  
*A laser Interferometer to Measure the Magnetically Induced Birefringence and Dichroism of Vacuum: A New Test of QED and Search for Light Scalar and Pseudoscalar Particles*, letter of intent, Study Grant from U.S. Department of Energy
- Maiani, L. , Petronzio, R. and Zavattini, E. 1986,  
*Effects of nearly massless, spin-zero particles on light propagation in a magnetic field*,  
 Phys. Lett. **B175**, 359
- Marro, G. 1992,  
*Controlli automatici*, 4<sup>a</sup> Ed., Zanichelli, Bologna
- Micossi, P. et al. 1993,  
*Measurements on the Birefringence Properties of the Reflecting Surface of an Interferential Mirror*, Appl. Phys. **B57**, 95
- Murino, E., 1991,  
*Studio della polarizzazione di luce laser in cavità ottiche a molti passaggi*, Tesi di Laurea, Università di Trieste
- Ni, W.T., Tsubono, K., Mio, N., Narihara, K., Chen, S.C., King, S.K., Pan, S.S., 1991,  
*Test of Quantum Electrodynamics using Ultra- High Sensitive Interferometers*, Mod. Phys. Lett. **A6**, 3671
- Ni, W.T, Shy, J.T., King, S.K., Su, D.C., Lai, Y., Chui, T.C.P., Shao, M., Goodstein, D., Stroynowski, R., Lipa, J.A., Bush, T.O. 1994,  
*Light Retardation in a High Magnetic Field and Search for Light Scalar/Pseudoscalar Particles Using Ultra-Sensitive Interferometry* EOI (Expression of Interest) submitted to the National Science Council of the Republic of China (April, 1994)
- Nilsson, A.C. , Gustafson, E.K. and Byer, R.L. 1989,  
*Eigenpolarization theory of monolithic non-planar ring oscillators*, J. Quantum Elec. **25**, 767
- Peccei, R.D. and Quinn, H.R. 1977a,  
*CP conservation in the presence of pseudoparticles*, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440
- Peccei, R.D. and Quinn, H.R. 1977b,  
*Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles*, Phys. Rev. **D16**, 1791

- Pound, R.V. 1946,  
*Electronic Frequency Stabilisation of Microwave Oscillators*, Rev. Sci. Instr. **17**, 460
- Raffelt, G. and Stodolsky, L. 1987,  
*Mixing of the Photon with Low Mass Particles*, Phys. Rev. **D37**, 1237
- Rempe, G., Thompson, R.J., Kimble, H.J., Lalezari, R., 1992,  
*Measurement of ultralow losses in an optical interferometer*, Opt. Letters **17**, 363
- Ritus, V. I. 1976,  
*Lagrangian of an intense electromagnetic field and quantum electrodynamics at short distances*, Sov. Phys.-JETP **42**, 774
- Ruoso, G. 1991,  
*Limiti sulla produzione coerente di particelle bosoniche neutre e leggere in un campo magnetico mediante fascio laser*, Tesi di Laurea, Università di Trieste, non pubblicata
- Ruoso, G and Zavattini, G. 1994,  
*Frequency locking of a Nd:YAG laser using the laser itself as optical phase modulator*, in corso di stampa su Proceedings of The Seventh Marcel Grossman Meeting on General Relativity, Stanford, Luglio 1994
- Sampas, N.M. , Gustafson, E. K. and Byer, R. L. 1993,  
*Long term stability of two diode-laser-pumped non planar ring laser independently stabilized to two Fabry-Pérot interferometers*, Opt. Lett. **18**, 947
- Schwinger, J. 1951,  
*On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82**, 664
- Scuri, F., Stefanini, G., Zavattini, E., Carusotto, S., Iacopini, E., Polacco, E. 1986,  
*Magnetic birefringence measurement in hydrogen and deuterium gases*, J. Chem. Phys. **85**, 1789
- Siegman, A.E. 1986,  
*Lasers*, University Science Books, Mill Valley, California
- Svelto, O. 1972,  
*Principi dei laser*, Tamburini Editore, Milano
- Toll, J. 1952,  
 Ph.D. Dissertation, Princeton University, non pubblicata
- Tonini, A. 1995,  
 Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, in preparazione
- Turner, M.S. 1990,  
*Windows on the Axion*, Phys. Rep. **197**, 67

- Uehara, N. and Ueda, K. 1994,  
*Frequency stabilization of two diode-pumped Nd:YAG lasers locked to two Fabry-Pérot cavities*, Jpn. J. Appl. Phys. **33**, 1628
- Vogt, R.E., Drever, R.W.P., Thorne, K.S., Raab, F.J., Weiss, R. 1989,  
*A laser interferometer gravitational-wave observatory (LIGO)*, Proposal to the National Science Foundation, December 1989
- Watson, W. H. 1929,  
*The effect of a transverse magnetic field on the propagation of light in vacuo*, Proc. Roy. Soc. London **A125**, 345
- Weisskopf, V. 1936,  
Kgl. Danske Videnskab. Selskabs. Mat.-fys. Madd. **14**, No. 6