INTRODUZIONE

La motivazione del presente lavoro di tesi deriva da un esperimento di fisica fondamentale, finanziato dall'INFN, volto a caratterizzare lo stato fisico del vuoto. L'esperimento, denominato PVLAS, attualmente in costruzione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova) si propone di misurare direttamente la birifrangenza magnetica del vuoto prevista dalla teoria dell'Elettrodinamica Quantistica facendo passare un fascio laser linearmente polarizzato attraverso una regione di forte campo magnetico. L'effetto viene rivelato come una piccola ellitticità della luce. L'esperimento permetterebbe inoltre di evidenziare l'esistenza di una particella neutra bosonica leggera che si accoppia a due fotoni (assione), la cui esistenza è stata postulata nell'ambito della Cromodinamica Quantistica e che è stata invocata anche per spiegare la cosiddetta "massa mancante" dell'universo. L'interazione dei fotoni con l'assione potrebbe dar luogo ad un'ellitticità che si aggiungerebbe a quella prevista dalla QED, oltrechè ad una rotazione del piano di polarizzazione. La diffusione fotone-fotone, di cui la birifrangenza magnetica è una delle conseguenze, è stata studiata anche attraverso lo scattering Delbruck e la misura del g_μ-2. In questi esperimenti però l'interazione fotone-fotone viene rivelata solo come una piccola correzione alla quantità misurata e la ricerca principalmente su sorgenti extraterrestri. L'esperimento PVLAS rappresenta invece il tentativo di studiare direttamente gli effetti dell'interazione fotone-fotone attraverso la diffusione di un fascio laser sui fotoni virtuali di un campo magnetico; anche l'assione verrebbe creato all'interno della zona di campo magnetico.

Un elemento centrale dell'apparato di misura è costituito dalla cavità ottica che permette di allungare il cammino ottico della luce ed aumentare così l'effetto sulla polarizzazione. Per assolvere a questo compito i precedenti esperimenti di questo tipo utilizzavano cavità ottiche a molti passaggi. In PVLAS si è scelto di usare una cavità Fabry-Perot. Con essa si ritiene di potere ottenere, rispetto alle cavità a molti passaggi, cammini ottici più lunghi di almeno un'ordine di grandezza, allo stesso tempo minimizzando i problemi legati agli effetti spuri sulla polarizzazione. Questi sono dovuti alla birifrangenza degli strati riflettenti degli specchi dielettrici e alla rotazione del piano di polarizzazione legata alla geometria dei percorsi non planari del fascio. Per poter utilizzare una cavità Fabry-Perot occorre che la frequenza della luce del laser coincida con u

na frequenza di risonanza della cavità. Ciò si ottiene con un opportuno sistema di retr oazione che stabilizza la frequenza del laser rispetto a quella cavità.
Con il presente lavoro di tesi è si è realizzata e caratterizzata una cavità Fabry-Perot d i finesse ≈2000. Si è poi studiato e realizzato un sistema di retroazione in grado di sta bilizzare la frequenza del laser entro una densità spettrale di rumore di pochi milliHer tz/(Hertz)$^{1/2}$. La cavità così agganciata è stata poi utilizzata per effettuare una misura dell'effetto Faraday in aria, a dimostrazione della possibilità di effettuare con essa mi sure ellissometriche. Il lavoro svolto è servito a comprendere i principi e gettare le ba si per lo sviluppo dell'ellissometro dell'esperimento PVLAS.
Nel primo capitolo della tesi sono sintetizzate le motivazioni fisiche dell'esperimento PVLAS, è presentato il principio della tecnica ellissometrica, con la descrizione dei p arametri di merito, e si dà poi una breve descrizione dell'esperimento PVLAS.
Nel secondo capitolo si descrive in modo sommario la strumentazione utilizzata, dan do spazio soprattutto ad alcuni elementi ottici le cui caratteristiche risultano cruciali n ell'assetto dell'esperimento finale. Tali sono ad esempio il laser, per il basso rumore e l'accordabilità, i polarizzatori, il sistema di rivelazione della radiazione, gli specchi i nterferenziali. Per il resto ci si è soffermati solo sugli aspetti che sono rilevanti per la comprensione del seguito: la teoria dell'interferometro Fabry-Perot, l'adattamento del fascio laser alla cavità.
Nel terzo capitolo si presentano le misure delle caratteristiche ottiche dell'interferome tro Fabry-Perot. Si discute poi il principio della stabilizzazione in frequenza del laser, e si presentano i risultati di uno studio di ottimizzazione del circuito di retroazione. Chiude il capitolo la misura della densità spettrale del rumore del laser agganciato.
Il quarto capitolo è dedicato alle misure di ellissometria vere e proprie. Il fascio è car atterizzato attraverso le misure di rumore e di polarizzazione. Si presenta infine la mi sura di un effetto fisico indotto in cavità sulla polarizzazione del fascio.
Il presente lavoro di tesi è stato svolto presso i Laboratori INFN dell'Area di Ricerca di Trieste.

Capitolo 1

Birifrangenza del vuoto ed esperimento PVLAS

1.1 CORREZIONI NON LINEARI ALLE EQUAZIONI DI MAXWELL

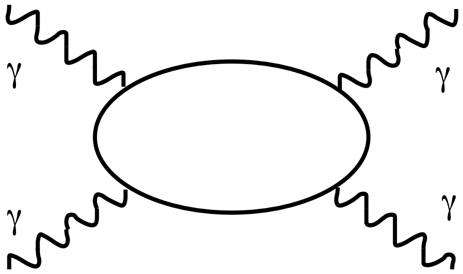


Figura 1.1.1: Diagramma di Feynman all'ordine più basso dell'interazione fotone-fotone

Classicamente il campo elettromagnetico si può descrivere per mezzo delle equazioni di Maxwell, che sono lineari nei campi **E**, **H**, **D** e **B**. Nel vuoto sono lineari anche le relazioni che legano **E** e **B** a **D** e **H**. Nell'elettrodinamica classica non sono previste interazioni tra campi elettromagnetici nel vuoto: in particolare, la presenza di un campo magnetico esterno non ha alcun effetto sulla propagazione di un'onda elettromagnetica. Nell'ambito dell'Elettrodinamica Quantistica (QED) è invece prevista l'esistenza di interazioni tra fotoni mediate da coppie di particelle virtuali cariche (Euler 1936). Il grafico di Feynman di figura 1.1.1 è il più semplice che dia luogo ad un elemento di matrice non nullo. Si noti che un grafico con soli tre fotoni esterni ha elemento di matrice nullo per il teorema di Furry (Furry 1937).

Nel caso particolare di un fotone che si propaghi in un campo magnetico esterno il grafico assume la forma di figura 1.1.2. Trascurando i diagrammi di ordine superiore, utilizzando unità Gaussiane non razionalizzate, detta m_e la massa a riposo dell'elettrone, $\hbar$ la costante ridotta di Planck e c la velocità della luce nel vuoto e facendo inoltre le ipotesi (Euler 1936):

I. I campi siano lentamente variabili:

$$\frac{\hbar}{m_e c}\left|\nabla E\right| \ll E, \qquad \frac{\hbar}{m_e c}\left|\nabla B\right| \ll B$$

$$\frac{\hbar}{m_e c^2}\left|\frac{\partial E}{\partial t}\right| \ll E, \qquad \frac{\hbar}{m_e c^2}\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| \ll B \tag{1.1.1}$$

II. I campi non superino il valore critico:

$$B \ll B_{crit} \approx 4.5 \cdot 10^{13} \text{ Gauss} \tag{1.1.2}$$

III. Le coppie virtuali scambiate siano esclusivamente elettroni-positoni,

è possibile scrivere una lagrangiana efficace L_{eff} per i campi macroscopici (Euler 1936)

$$L_{eff} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) + \frac{2\alpha^2}{45}\frac{1}{\left(4\pi\right)^2}\frac{\left(\hbar/m_e c\right)^3}{m_e c^2}\left[\left(E^2 - B^2\right)^2 + 7\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\right] \tag{1.1.3}$$

dove α è la costante di struttura fine e m_e la massa dell'elettrone. Il primo termine corrisponde alla Lagrangiana classica.

Se, invece di coppie elettrone-positone, si fossero considerate altre coppie cariche leptone-antileptone, il termine correttivo alla Lagrangiana libera sarebbe risultato proporzionale a $1/m^4_{lep}$. Pertanto le correzioni di questo tipo dovute a coppie $\mu^+ \mu^-$ e $\tau^+ \tau^-$ sono trascurabili a fronte del contributo dovuto ad $e^+ e^-$.

Le equazioni costitutive sono:

$$\mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial L_{eff}}{\partial \mathbf{E}} \qquad \mathbf{H} = -4\pi \frac{\partial L_{eff}}{\partial \mathbf{B}} \tag{1.1.4}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + A_e \left[4\left(E^2 - B^2\right)\mathbf{E} + 14\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B} \right] \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} + A_e \left[4\left(E^2 - B^2\right)\mathbf{B} - 14\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{E} \right] \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

con

$$A_e = \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{(\hbar / m_e c)^3}{m_e c^2} \approx 1.38 \cdot 10^{-32} \ \ \mathrm{cm}^3/\mathrm{erg}$$

Sostituendo nelle (1.1.5) $\mathbf{E}$ con $\mathbf{E}^{onda}$ e $\mathbf{B}$ con $\mathbf{B}^{onda} + \mathbf{B}^{esterno}$, con $\mathbf{B}^{onda} \ll \mathbf{B}^{esterno}$, e c onservando solo i termini lineari in $\mathbf{E}^{onda}$ e $\mathbf{B}^{onda}$, si possono definire una costante die lettrica ed una permeabilità magnetica per il mezzo costituito dal campo magnetico es terno:

$$D_i^{onda} = \varepsilon_{ij} E_j^{onda} \qquad H_i = \mu_{ij}^{-1} B_j^{onda}$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\left(1 - 4\, A_e\, B^{est\,2}\right) + 14\, A_e\, B^{est\,2}\, b_i b_j$$

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij}\left(1 - 4\, A_e\, B^{est\,2}\right) - 8\, A_e\, B^{est\,2}\, b_i b_j$$

ove $\hat{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ è la direzione del campo esterno.

Per un'onda piana linearmente polarizzata descritta da:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{onda} &= \mathbf{e}^{onda}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H}^{onda} &= \mathbf{h}^{onda}\mathbf{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

che si propaghi con direzione ortogonale alla direzione del campo magnetico esterno si trovano i due modi di propagazione (Adler 1971), corrispondenti alle due direzioni di polarizzazione parallela ed ortogonale a $\mathbf{B}^{est}$:

modo ||: onda linearmente polarizzata con vettore $\mathbf{B}^{onda}$ parallelo a $\mathbf{B}^{est}$:

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - 4\,A_e\,B^{est\,2}$$

$$\mu_{\parallel} = \left(1 - 12\,A_e\,B^{est\,2}\right)^{-1} \approx 1 + 12\,A_e\,B^{est\,2} \qquad (1.1.7)$$

$$n_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\,\mu_{\parallel}} \approx 1 + 4\,A_e\,B^{est\,2}$$

modo $\perp$: onda linearmente polarizzata con vettore $\mathbf{B}^{onda}$ ortogonale a $\mathbf{B}^{est}$:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + 10\,A_e\,B^{est\,2}$$

$$\mu_{\perp} = \left(1 - 4\,A_e\,B^{est\,2}\right)^{-1} \approx 1 + 4\,A_e\,B^{est\,2} \qquad (1.1.8)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\,\mu_{\perp}} \approx 1 + 7\,A_e\,B^{est\,2}$$

da cui si ottiene

$$\Delta n_{QED} = n_{\perp} - n_{\parallel} = 3\,A_e\,B^{est\,2} \approx 4 \cdot 10^{-32}\,B^{est\,2} \qquad (1.1.9)$$

dove B^{est} è espresso in gauss. Il vuoto in presenza di un campo magnetico esterno è d unque un mezzo birifrangente: le due componenti di polarizzazione lineare di un fasc io di luce che attraversa una regione di lunghezza L in direzione ortogonale alla direz ione del campo magnetico acquisiscono un piccolo sfasamento $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi = 2\pi\,\frac{L}{\lambda}\,(n_{\parallel} - n_{\perp}) \qquad (1.1.10)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce. Sia θ l'angolo che la direzione del campo elet trico del fascio linearmente polarizzato forma con la direzione del campo magnetico. All'uscita della regione di campo la polarizzazione ha acquisito un'ellitticità ψ data da

$$\psi = \frac{\Delta\varphi}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \qquad (1.1.11)$$

Per $\theta = 45^\circ$, λ =1064 nm, L=1 m e $B^{est} = 10^5$ gauss si ottiene un valore di ellíticità

$$\psi = \pi\,\frac{L}{\lambda}\,\Delta n_{QED} \approx 1.3 \cdot 10^{-31}\,\frac{L}{\lambda}\,B^{est\,2} = 1.2 \cdot 10^{-15}\ \ \mathrm{rad} \qquad (1.1.12)$$

La misura della birifrangenza magnetica del vuoto costituisce un passo fondamentale per la verifica della teoria dell'elettrodinamica quantistica sino ad oggi sviluppata.

Per quanto riguarda l'effetto dovuto a loop di bosoni virtuali carichi puntiformi di ma ssa m_{bos} sulla propagazione di fotoni in un campo magnetico, vale la lagrangiana effi cace (Schwinger 1951)

$$L_{bos} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) + \frac{2\alpha^2\left(\hbar/m_{bos}c\right)^3}{90\left(4\pi\right)^2 m_{bos}c^2}\left[7\left(E^2 - B^2\right)^2 + 4\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\right)^2\right]$$

Con procedimento analogo a quello utilizzato per i leptoni si trova:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\left(1 - 28\,A_{bos}\,B^{est\,2}\right) + 8\,A_{bos}\,B^{est\,2}\,b_i b_j$$

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij}\left(1 - 28\,A_{bos}\,B^{est\,2}\right) + 56\,A_{bos}\,B^{est\,2}\,b_i b_j$$

$$A_{bos} = \frac{\alpha^2}{90\pi}\,\frac{\left(\hbar/m_{bos}c\right)^3}{m_{bos}c^2}$$

e pertanto nel caso di un'onda elettromagnetica piana che incida ortogonalmente al ca mpo magnetico esterno gli indici di rifrazione sono:

$$n_{||} = 1 + 28\,A_{bos}\,B^{est\,2}$$

$$n_{\perp} = 1 + 4\,A_{bos}\,B^{est\,2}$$

Si nota subito una differenza qualitativa rispetto al caso precedente: ora la component e maggiormente ritardata è quella con il vettore magnetico parallelo al campo esterno .

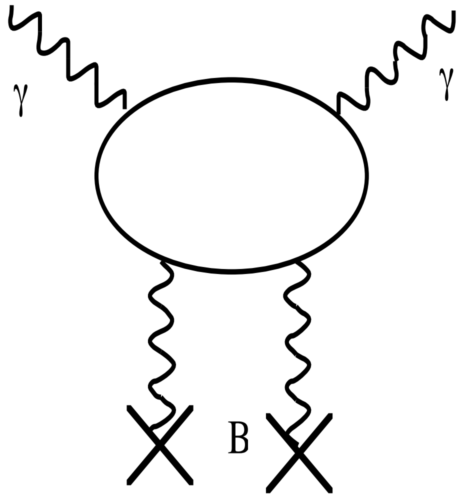
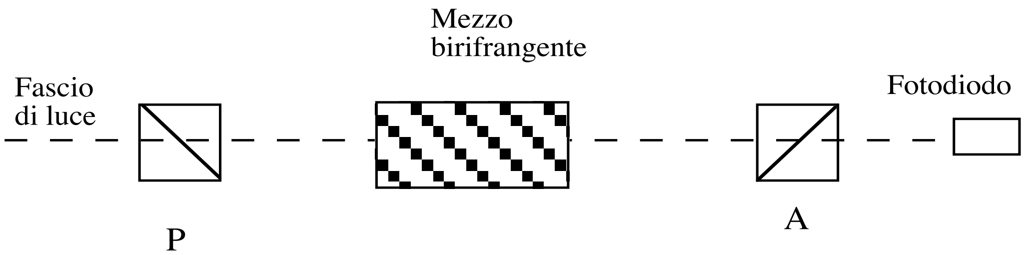


Figura 1.1.2: Diagramma di Feyman all'ordine più basso dell'interazione fotone-campo magn etico.

1.2 rivelazione di piccole Ellitticità

1.2.1 Tecnica eterodina



Fiqura 1.2.1: Schema ottico di principio per la misura di una birifrangenza.

Per misurare l'effetto della birifrangenza magnetica del vuoto occorre misurare una pi ccola ellitticità. Ciò viene fatto con tecniche di polarimetria. Si utilizza cioè una copp ia di polarizzatori incrociati. Seguendo lo schema di principio di figura 1.2.1 indichia mo con P ed A (Analizzatore) i due polarizzatori incrociati. Detta I_0 l'intensità della l uce che incide sull'analizzatore, l'intensità I rivelata dal fotodiodo posto dopo l'analiz zatore è

$$I = I_0\left(\sigma^2 + \psi^2\right) \tag{1.2.1}$$

dove ψ è l'ellitticità dovuta al mezzo birifrangente e σ^2 è l'estinzione, cioè la luce resi dua che attraversa i polarizzatori incrociati in assenza della birifrangenza (paragrafo 2.2). Nel caso della birifrangenza del vuoto ψ è molto piccola e ψ^2 è trascurabile risp etto a σ^2, che per i migliori polarizzatori in commercio ha valori $\approx 10^{-8}$. Utilizzando l a tecnica eterodina è possibile fare in modo che nel fascio in uscita dall'analizzatore l' ellitticità ψ che si vuole misurare sia presente non solo come termine quadratico ma a nche come termine lineare. In tale tecnica si utilizza un elemento ottico che introduce nella polarizzazione del fascio un ellitticità nota ϕ (figura 1.2.2). Modulando tale elli tticità nel tempo a frequenza f_m in modo tale da avere $\phi(t) = \phi_0 \cos \omega_m t$, il segnale rac colto dal fotodiodo è:

$$I = I_0 \left\{ \sigma^2 + \left[\psi + \phi(t) \right]^2 \right\} \approx I_0 \left[\sigma^2 + \phi^2 + 2\, \phi(t)\, \psi \right] \qquad (1.2.2)$$

Dalla componente di I a frequenza f_m si ricava quindi il valore ψ nota che sia ϕ_0.
La (1.2.2) è scritta nell'ipotesi che tutta l'ellitticità presente nella polarizzazione del fa scio sia dovuta all'effetto in studio. In pratica esistono sempre altre fonti di ellitticità s puria. Indicando con η l'ellitticità spuria la (1.2.2) diventa

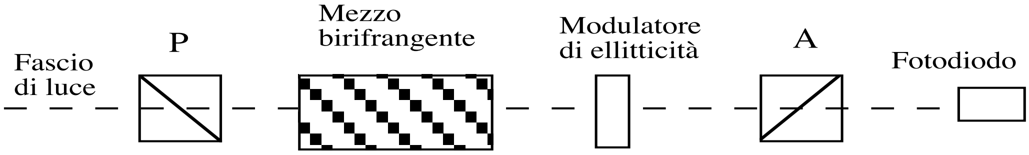
$$I \approx I_0 \left[\sigma^2 + \phi^2 + \eta^2 + 2\, \phi(t)\, (\psi + \eta) \right] \qquad (1.2.3)$$

Considerando che η è normalmente diversi ordini di grandezza più grande di ψ, se ne deduce che per misurare ellitticità estremamente piccole è necessario modularle. Infa tti, per $\psi(t) = \psi_0 \cos \omega_M t$,

$$I = I_0 \left\{ \sigma^2 + \left[\eta + \psi(t) + \phi(t) \right]^2 \right\} \qquad (1.2.4)$$

Nella tabella 1.2.1 sono riportate le componenti in frequenza dell'intensità (1.2.4). L'a mpiezza ψ_0 può essere ricavata dal rapporto tra la somma delle componenti I_- e I_+ e l a componente I_{2m}:

$$\frac{I_+ + I_-}{I_{2m}} = \frac{4\, I_0\, \psi_0\, \phi_0}{I_0\, \phi_0^2} = \frac{4\, \psi_0}{\phi_0} \qquad (1.2.5)$$



Fiqura 1.2.2: Schema ottico di principio per la misura di una birifrangenza con la tecnica eter odina.

Frequenza	Componente di Fourier	Ampiezza
0	I_{DC}	$I_0(\sigma^2+\eta^2+\phi_0{}^2/2+\psi_0{}^2/2)$
f_M	I_M	$I_0\ 2\ \eta\ \psi_0$
$2f_M$	I_{2M}	$I_0\ \psi_0{}^2/2$
f_m-f_M	I_-	$I_0\ \psi_0\ \phi_0$
f_m	I_m	$I_0\ 2\ \phi_0\ \eta$
f_m+f_M	I_+	$I_0\ \psi_0\ \phi_0$
$2f_m$	I_{2m}	$I_0\ \phi_0{}^2/2$

Tabella 1.2.1: Frequenze e ampiezze delle componenti di Fourier dell'intensità. Si è assunto c he sia $f_m > f_M$.

1.2.2 Rumore del laser e sensibilità dell'apparato di rivelazione

Si vuole ora calcolare, fissata la banda di frequenza della misura Δf, quale sia il più pi ccolo valore misurabile di ellitticità ψ_{min}. Esso si ricava ponendo il rapporto segnale-rumore uguale all'unità

$$\frac{i_{min}}{i_{noise}} = 1 \tag{1.2.6}$$

dove i_{min} è l'ampiezza della componente di Fourier del segnale di corrente del fotoriv elatore ad una delle frequenze $f_\pm = f_m \pm f_M$ e i_{noise} è l'ampiezza rms del rumore alla stess a frequenza. Dalla tabella 1.2.1

$$i_{min} = I_0\ \phi_0\ \psi_{min}\ q$$

dove q è l'efficienza quantica del sistema di rivelazione, misurata in Ampere/Watt.
Il rumore in ampiezza dei laser ha, per basse frequenze, un andamento decrescente de l tipo 1/f (Cantatore 1985-86). Ad alte frequenze domina invece la componente di ru

more statistico shot i_{shot}, che ha distribuzione piatta su tutte le frequenze. Il valore di i_{shot} è legato alla componente continua i_{DC} della corrente generata dal fotorivelatore (Yariv 1991):

$$i_{shot} = \sqrt{2\, e\, i_{DC}\, \Delta f} \tag{1.2.7}$$

dove e è la carica dell'elettrone e Δf la larghezza della banda di misura. Per ottenere la migliore sensibilità la frequenza di modulazione f_m deve essere alta abbastanza da far sì che il rumore dominante sia quello shot. Dalla tabella 1.2.1 si ha, per $\phi_0^2 \gg \sigma^2, \eta^2$ e ψ_0^2,

$$i_{DC} \approx I_0 \frac{\phi_0^2}{2} q \tag{1.2.8}$$

Nel caso in cui il rumore sia dominato dal rumore shot si ha allora

$$1 = \frac{i_{min}}{i_{shot}} = \frac{I_0\ \phi_0\ \psi_{min}\ q}{\sqrt{e\ I_0\ \phi_0^2\ q\ \Delta f}} = \psi_{min} \sqrt{\frac{I_0\ q}{e\ \Delta f}} \tag{1.2.9}$$

Si usa definire la sensibilità S_{shot} dell'apparato come

$$S_{shot} \equiv \frac{\psi_{min}}{\sqrt{\Delta f}} = \sqrt{\frac{e}{I_0\ q}} \tag{1.2.10}$$

La sensibilità è espressa in radianti·(Hertz)$^{-1/2}$, ed è una costante caratteristica dell'apparato di misura. Come si vede, all'aumentare del tempo di misura T, il valore di ψ_{min} diminuisce lentamente come $1/\sqrt{T}$. Fissato cioè il valore della sensibilità, per migliorare ψ_{min} di un fattore dieci occorre moltiplicare per cento il tempo di integrazione. Si potrebbe pensare di migliorare la sensibilità dell'apparato di misura aumentando l'intensità del fascio. Ciò si traduce, d'altra parte, in un aumento del valore della frequenza oltre il quale il rumore è dominato dal rumore shot (Iacopini 1981), e dunque in un aumento del valore di f_m.

Nel caso in cui, invece, lo spettro del rumore sia dominato dal rumore 1/f, il valore della sensibilità S si può ricavare dall'equazione

$$\frac{I_0\ \phi_0\ \psi_{min}\ q}{i_{noise}(f_m \pm f_M)} = 1 \tag{1.2.11}$$

da cui

$$S = \frac{i_{noise}(f_m \pm f_M)}{I_0 \ \phi_0 \ q \sqrt{\Delta f}} \qquad (1.2.12)$$

È stato osservato (Cantatore 1985-86) che l'andamento del rumore nelle vicinanze di ciascun picco di segnale a frequenza f_0 è del tipo $1/|f-f_0|$. Supponendo che il rumore 1 /f scali con l'altezza del picco

$$i_{noise}(f_m \pm f_M) = i_{noise}(f_M)\frac{i_m}{i_{DC}} = i_{noise}(f_M)\frac{4\ \eta}{\phi_0} \qquad (1.2.13)$$

e la (1.2.12) diventa

$$S = i_{noise}(f_M)\frac{4\ \eta}{I_0 \ \phi_0^2 \ q \sqrt{\Delta f}} \qquad (1.2.14)$$

Imponendo che il rumore dato dalla (1.2.13) sia più piccolo dello shot si ricava una c ondizione per η:

$$\eta < \frac{\phi_0^2}{4}\frac{\sqrt{e \ I_0 \ q \ \Delta f}}{i_{noise}(f_M)} \qquad (1.2.15)$$

1.3 ESPERIMENTO PVLAS

1.3.1 Precedenti esperimenti

Seguendo una proposta formulata da Zavattini e Iacopini (Iacopini 1979) sono stati r ealizzati diversi esperimenti in cui, con tecniche di elissometria, si è cercato di misur are direttamente la birifrangenza prevista dalla teoria della QED. Poichè l'ellitticità ψ è proporzionale al quadrato del campo magnetico, il suo segno non dipende dal verso di percorrenza del fascio di luce. Questo consente di allungare il cammino ottico del fascio mediante linee ottiche di ritardo e quindi di amplificare l'effetto (vedere appen dice A).

Il più recente tentativo di effettuare una misura diretta della birifrangenza del vuoto è stato l'esperimento LAS (Cameron 1993). In esso due magneti superconduttori forniv ano un campo magnetico di 4 Tesla su una lunghezza di 8.8 metri e la sorgente di luc e era un laser ad argon (λ=514 nm). Il campo magnetico veniva modulato impulsand o la corrente dei magneti per dare una componente oscillante di ampiezza $(B^{est})^2$=7.1 T^2 alla frequenza massima di circa 80 mHz. La linea ottica di ritardo era costituita da un cavità multipass che amplificava il cammino ottico di un fattore 34. Per questo ap parato l'ellitticità acquisita dal fascio di luce all'uscita dalla regione di birifrangenza e ra (Cameron 1993)

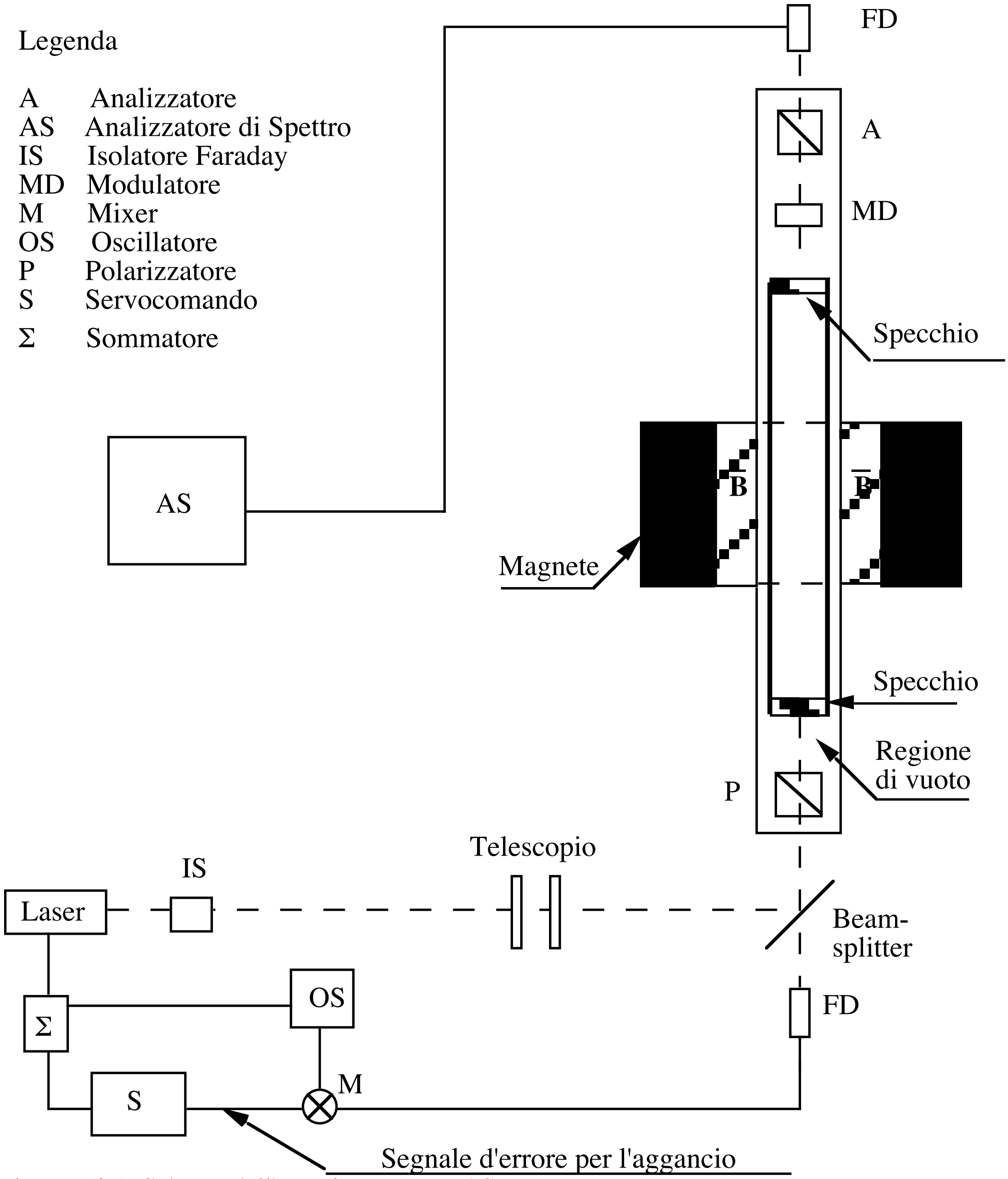
$$\psi \approx 5 \cdot 10^{-14} \quad \text{rad}$$

La migliore sensibilità ottenuta con questo apparato è stata di $7.6 \cdot 10^{-9}$ rad/$\sqrt{\text{Hz}}$, che si è potuta mantenere per un tempo di integrazione totale $T=3.1 \cdot 10^{4}$ s. Il livello di rumo re rms misurato in tali condizioni è stato dunque $4.3 \cdot 10^{-11}$ rad, circa tre ordini di gran dezza al di sopra del segnale da misurare. Si è quindi evidenziata la necessità di migli orare l'apparato sia per quanto riguarda la sensibilità che il livello del segnale da misu rare. L'esperimento PVLAS è stato pensato per raggiungere entrambi gli scopi.

1.3.2 Esperimento PVLAS

Attualmente è in costruzione presso i laboratori dell'INFN di Legnaro (Padova) un nu ovo apparato per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto (figura 1.3.1). Il p rincipio che sta alla base di questa nuova misura è identico a quello adottato nell'eper imento LAS. In questo nuovo esperimento, chiamato PVLAS (Polarizzazione del Vu oto e LASer), sono state introdotte due modifiche rispetto a LAS. Esse riguardano la modulazione del campo magnetico e la cavità ottica.

Da quanto si è detto nel paragrafo 1.2 è evidente il vantaggio che si otterrrebbe modu lando l'effetto a frequenza più alta. Essendo impossibile impulsare la corrente di un g rosso magnete superconduttore a frequenze superiori a quelle usate in LAS, è stata st udiata la possibilità di porre un magnete in rotazione attorno al suo asse in modo che il vettore $\mathbf{B}^{est}$ ruoti nel piano di polarizzazione della luce. Gli studi e le prove effettuat e hanno dimostrato la possibilità di ottenere frequenze di rotazione fino a 1 Hz. Poich è l'effetto della birifrangenza magnetica non dipende dal segno di $\mathbf{B}^{est}$ (equazione (1. 1.9)) il segnale dovuto all'ellitticità potrà avere frequenze fino a 2 Hz. Questa configu razione offre due vantaggi rispetto a quella adottata nell'esperimento LAS: l'ampiezza della modulazione di $\mathbf{B}^{est}$ è pari all'intensità massima del campo e non ad una sua fra zione; la frequenza a cui si misura l'effetto è circa 25 volte più grande e quindi, se il r umore ha andamento 1/f, il rapporto segnale rumore potrebbe aumentare dello stesso fattore.



Fiqura 1.3.1: Schema dell'esperimento PVLAS.

La cavità ottica adottata nell'esperimento PVLAS sarà un risuonatore ottico Fabry-Pe rot (paragrafo 2.4). Esso consente di moltiplicare il cammino ottico per un fattore (ap pendice A)

$$\frac{1+R}{1-R} \approx \frac{2}{\pi} F$$

dove R è la riflettività degli specchi della cavità e F la finesse (paragrafo 2.4). Nell'esperimento PVLAS il campo magnetico è generato da un magnete superconduttore con B=10 T e lunghezza L≈1 m, il fascio di luce è fornito da un laser Nd-YAG (λ=1064 nm). Senza considerare il vantaggio che deriva dall più alta frequenza di modulazione dell'effetto, ipotizzando una sensibilità dell'apparato pari a quella ottenuta per l'esperimento LAS ($S=7.6 \cdot 10^{-9}$ rad/$\sqrt{\text{Hz}}$) e lo stesso tempo di integrazione $T=3.1 \cdot 10^{4}$ s e utilizzando il valore di ψ dato dall'equazione (1.1.12), si ricava una condizione sulla finesse della cavità

$$\frac{2F}{\pi} \cdot \psi \geq \frac{S}{\sqrt{T}} \tag{1.3.4}$$

da cui si ricava $F \geq 50000$. Una cavità con F=30000 lunga un metro è già stata realizzata (Ruoso Pino 1993-94).

In figura 1.3.2 sono mostrate due viste dell'apparato completo che si sta realizzando nei laboratori dell'INFN di Legnaro (PD). Si possono distinguere: il magnete superconduttore inserito nel criostato; la tavola rotante su cui poggia il criostato, dotata di un foro centrale utile di diametro 2 cm che consente il passaggio della luce laser; la cavità Fabry-Perot di lunghezza 5 m, contenuta entro un tubo di quarzo mantenuto sotto vuoto. Perchè l'ellitticità dovuta all'effetto Cotton-Mouton sul gas residuo sia molto più piccola di quella che si vuole misurare, è necessario che all'interno della cavità la pressione sia minore di 10^{-8} torr (Micossi 1991-92).

Figura 1.3.2: Due viste dell'apparato in costruzione dell'esperimento PVLAS.

CAPITOLO 2

STRUMENTAZIONE E CAVITÀ FABRY-PEROT

2.1 LASER

Potenza	50 mW
Lunghezza d'onda λ	1064 nm
Diametro minimo del fascio $2w_L$	0.5 mm
Rumore in ampiezza (5 Hz - 10 MHz)	<0.1% rms
Deriva di potenza	< ± 5% /8 ore
Stabilità in frequenza Larghezza di riga Jitter Deriva di frequenza	 < 5 kHz/ms < 75 kHz/s < 50 MHz/ora
Modo spaziale	TEM_{00}
Resistenza di ingresso attuatore termico	10 kΩ
Resistenza di ingresso attuatore piezoelettrico	1 kΩ

Tabella 2.1.1: Caratteristiche del laser Lightwave Electronics modello 124-1064-F.

La sorgente luminosa usata in laboratorio è un laser Nd:YAG di tipo NPRO (Non Pla nar Ring Oscillator). In tabella 2.1.1 sono riportate alcune caratteristiche del modello usato (Lightwave Electronics, modello 124-1064-F). In questo tipo di laser la cavità r isonante è costituita da un monocristallo di Nd:YAG all'interno del quale la luce desc rive un cammino ottico ad anello non planare per riflessione totale interna su tre supe rfici del cristallo stesso (veder figura 2.1.1). Il pompaggio è effettuato da un diodo las er. Il laser ha basso rumore in ampiezza ed elevata stabilità in frequenza, caratteristic he che derivano dal pompaggio a diodo e dalla cavità monolitica. Infatti il pompaggio a diodo evita il problema del rumore associato alle lampade a scarica, mentre l'uso della cavità monolitica non planare, unito alla presenza in cavità di un piccolo campo magnetico, consente di ottenere l'eccitazione di un singolo modo e un completo isolamento dal campo elettrico della luce di ritorno (Nilsson 1989).

La frequenza della luce emessa dal laser può essere variata mediante due sistemi di controllo. Il primo è un termistore (heater) posto a contatto con la base della cavità (figura 2.1.1). La variazione della frequenza è ottenuta variando la temperatura, e dunque le dimensioni, del cristallo laser. Questo sistema di controllo ha banda passante $f_t \approx 1$ Hz. Il fattore di conversione tensione-frequenza misurato è K_t=3.1 GHz/V, in buon accordo con il dato fornito dalla casa costruttrice, mentre la massima correzione della frequenza della luce è di 30 GHz. La regolazione della frequenza può essere effettuata sia manualmente, con un potenziometro, o con un segnale in tensione ±5 V.

Figura 2.1.1: Schema ottico del laser NPRO.

Figura 2.1.2: Schema della cavità del laser NPRO con il trasduttore piezoelettrico PZT.

Il secondo sistema di controllo della frequenza è costituito da un piezoelettrico (PZT) incollato sulla faccia superiore della cavità (figura 2.1.2). Anch'esso ha la funzione di variare, per pressione meccanica, le dimensioni della cavità risonante e, con esse, la frequenza della luce. La banda passante è f_p=100 kHz, mentre il fattore di conversione tensione-frequenza misurato è K_p=5 MHz/V, in buon accordo con il dato fornito dalla casa costruttrice. Per tale sistema di controllo la massima correzione di frequenza della luce è di ±250 MHz.

2.2 POLARIZZATORI

I polarizzatori usati nelle misure sono di tipo Glan. Essi sono costituiti da due prismi in cristallo di calcite opportunamente orientati e sagomati, separati da una intercapedine d'aria. Il fascio di luce incontra la superficie esterna dell'elemento ottico con incidenza normale.

La calcite è un cristallo otticamente anisotropo, caratterizzato dalla direzione di un *asse ottico* che definisce una direzione privilegiata all'interno del cristallo stesso. La velocità di propagazione della luce nel cristallo dipende dalla direzione di propagazione e dalla direzione di polarizzazione. Si distinguono due casi, a seconda che la polarizzazione sia parallela o perpendicolare all'asse ottico. Nel primo caso, detto *ordinario*, non c'è dipendenza della velocità di propagazione dalla direzione di propagazione: i fronti d'onda di una sorgente monocromatica posta all'interno del cristallo sono sferici. Nel secondo caso, detto caso *straordinario*, i fronti d'onda sono elissoidi di rotazione attorno all'asse ottico. Nella calcite gli elissoidi risultano schiacciati nella direzione dell'asse ottico, dove coincidono con i corrispondenti fronti d'onda del raggio ordinario. L'indice di rifrazione del raggio straordinario è quindi più piccolo di quello ordinario.

I polarizzatori usati in laboratorio hanno asse ottico parallelo alla faccia di ingresso (figura 2.2.1). In corrispondenza della superficie di separazione tra il primo prisma e l'intercapedine d'aria il raggio ordinario, che ha indice di rifrazione più alto di quello straordinario, viene eliminato per riflessione interna totale. Il raggio straordinario, invece, viene trasmesso e la sua direzione originale viene ripristinata dal secondo prisma.

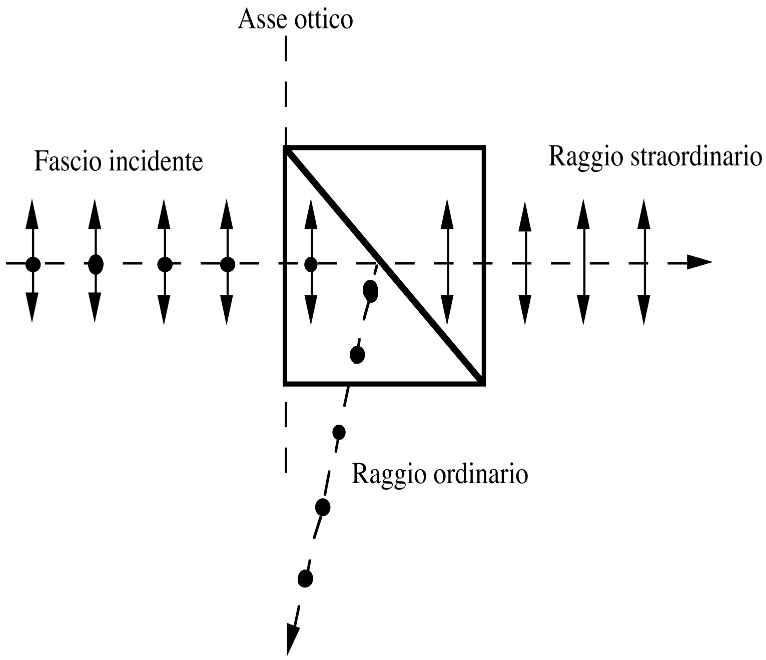


Figura 2.2.1
: Schema di funzionamento di un polarizzatore di tipo Glan. Le frecce ↕ indicano la polarizz azione parallela all'asse ottico, il punto • indica la polarizzazione ortogonale al piano che con tiene l'asse ottico e la direzione di propagazione della luce.

Si consideri un fascio di luce linearmente polarizzata di intensità I_0 che incide ortogo nalmente sulla faccia di ingresso del polarizzatore. Sia ϑ l'angolo tra il vettore di pola rizzazione e la normale all'asse ottico del polarizzatore. L'intensità della luce trasmes sa dal polarizzatore, in condizioni ideali, è

$$I(\vartheta) = I_0 \; (\mathrm{sen}\,\vartheta)^2 \tag{2.2.1}$$

Dunque per un polarizzatore ideale l'intensità di luce trasmessa per ϑ=0 è nulla. Un p olarizzatore reale, invece, trasmette una piccola frazione σ^2 dell'intensità luminosa an che per ϑ=0. L'intensità trasmessa può scriversi come

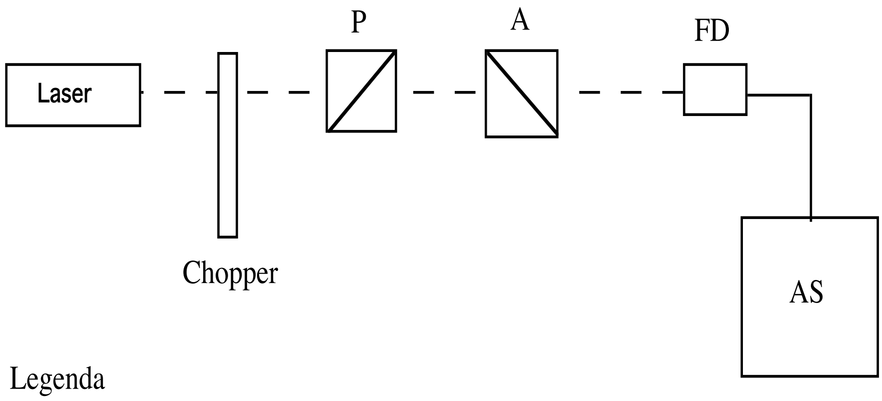
$$I(\vartheta) = I_0 \; (\sigma^2 + \mathrm{sen}^2\vartheta) \tag{2.2.2}$$

Il coefficiente σ^2 caratterizza la bontà del polarizzatore ed è definito *estinzione*. In la boratorio è stata eseguita una misura dell'estinzione utilizzando lo schema ottico di fi gura 2.2.2. Il fascio di luce è stato pulsato per mezzo di un chopper e la misura dell'in tensità trasmessa è stata effettuata con un analizzatore di spettro. Ciò si rende necessa

rio in quanto, in condizioni statiche, l'intensità della luce trasmessa dal polarizzatore all'estinzione è generalmente molto minore di quella spuria raccolta dal fotodiodo.
In principio, per misurare σ^2 occorrerebbe effettuare due misure di intensità e farne il rapporto. Questo metodo è affetto da grossi errori. In pratica, una volta raggiunta l'es tinzione, si ruota l'analizzatore A di un angolo ϑ_{est} tale da raddoppiare il segnale. Si p uò allora scrivere

$$2 I_0 \sigma^2 = I_0 (\vartheta_{est}^2 + \sigma^2) \tag{2.2.3}$$

e quindi $\vartheta^2_{est}=\sigma^2$. L'estinzione misurata è $\sigma^2=10^{-7}$.



Legenda

P Primo polarizzatore
A Secondo polarizzatore (Analizzatore)
AS Analizzatore di Spettro
FD Fotodiodo

Figura 2.2.2: Schema ottico per la misura dell'estinzione σ^2. L'analizzatore era montato su un rotatore che ne permetteva il posizionamento angolare con una sensibilità di $3\ 10^{-5}$ rad ($1.7\ 10^{-3}$ °).

2.3 FOTODIODO E RELATIVI CIRCUITI ELETTRONICI

Per le misure di intensità luminosa è stato usato il fotodiodo Hamamatsu S1223. Le c aratteristiche di questo componente sono riassunte in tabella 2.3.1.
Il fotodiodo può essere schematizzato come un generatore di corrente, con una efficie nza quantica q misurata in Ampere/Watt. Il coefficiente q rappresenta l'intensità di co rrente fornita dal fotodiodo per unità di potenza luminosa. Il suo valore è stato misura

to sperimentalmente in funzione dell'intensità del fascio di luce (λ=1064 nm). Per qu este misure si è utilizzato lo schema di figura 2.3.1. I risultati sono riportati in figura 2.3.2**.** Il valore dell'efficienza quantica q è determinato dalla pendenza del tratto linea re della curva. Si è ottenuto

$$q = 0.23 \ \ A / W \tag{2.3.1}$$

Il fotodiodo è stato sempre polarizzato inversamente in tutti i circuiti usati. Tale polar izzazione aumenta la larghezza della "zona di giunzione" (*depletion layer*), minimizz ando il valore della sua capacità C_f. In tal modo si amplia la banda di risposta in freq uenza del fotodiodo.

Spettro di sensibilità	320–1100 nm
Lunghezza d'onda di massima sensibilità	960 nm
Dark current (max)	10 nA
Diametro	3 mm
Capacità C_f (V=-20 V)	20 pF

Tabella 2.3.1: Caratteristiche del fotodiodo Hamamatsu S1223.

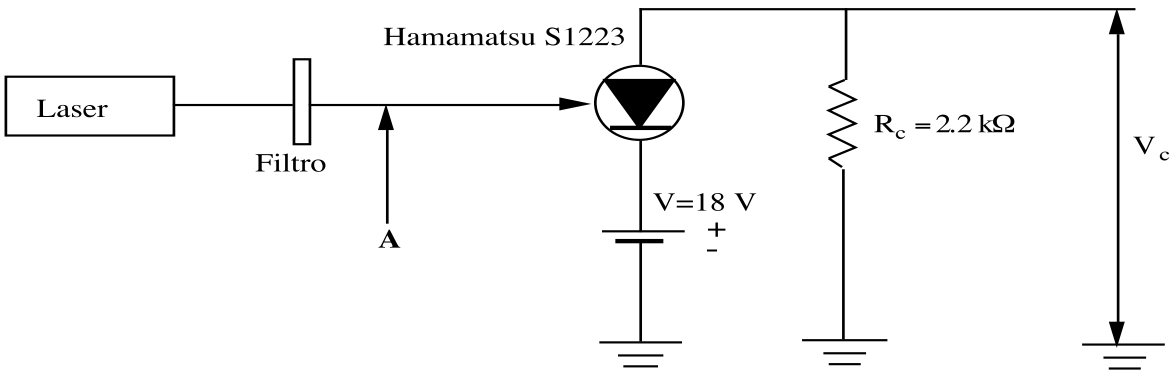


Figura 2.3.1: Circuito per la misura dell'efficienza quantica q. I filtri consentono di variare la potenza incidente sul rivelatore. Nel punto A è stata effettuata la misura della potenza incide nte con un Labmaster E della Coherent.

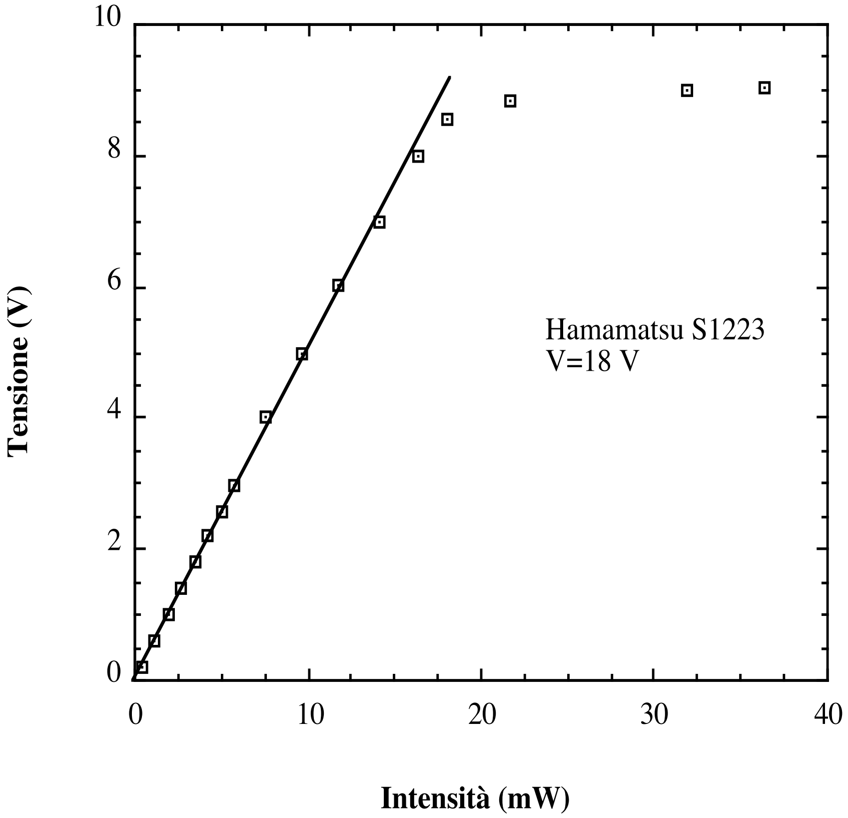


Figura 2.3.2: Risultati delle misure eseguite con l'apparato di figura 2.3.1. La pendenza del tr atto lineare rappresenta l'efficienza quantica q=0.23 A/W.

2.3.1 Circuito per la rivelazione della luce riflessa

Si sono sviluppati due diversi circuiti di amplificazione del segnale del fotodiodo, un o per la rivelazione della luce riflessa dalla cavità Fabry-Perot, e uno per quella trasm essa (paragrafo 2.4). La figura 2.3.3 è lo schema del circuito per la rivelazione della l uce riflessa. Questo circuito è ottimizzato per rivelare componenti di alta frequenza d ell'intensità luminosa. In particolare si è interessati alla frequenza alla quale si modul a la fase del laser ν_m=717.7 kHz (vedi oltre). Il circuito LR che precede l'amplificator e operazionale fa da filtro passa alto e, in particolare, taglia la componente continua d el segnale generato dal fotodiodo. Tale tensione potrebbe infatti danneggiare i compo nenti che seguono l'amplificatore. La resistenza R_{dc} serve appunto per misurare la co mponente continua del segnale. Tenendo conto della capacità intrinseca del fotodiodo C_f, il valore dell'impedenza Z vista dal fotodiodo è il parallelo di L, R_L e C_f:

$$\left|Z(\omega)\right| = \frac{\omega L R_L}{\sqrt{(R_L - R_L\omega^2 L C_f)^2 + \omega^2 L^2}} \qquad (2.3.2)$$

A $\omega=2\pi\nu_m$ $|Z|=7.7$ kΩ. Il guadagno dell'amplificatore è $G=(R_2+R_1)/R_1\approx 11$. Con tale fattore di amplificazione, l'operazionale LF 357 ha una banda passante di circa 2 MH z, sufficiente per non attenuare il segnale a frequenza ν_m. Il fattore di risposta α_r (esp resso in Volt/Watt) del sistema fotodiodo-amplificatore vale

$$\alpha(\omega) = q\,|Z(\omega)|\,G \qquad (2.3.3)$$

A $\omega=2\pi\nu_m$ $\alpha(\omega_m)=\alpha_r=1.95\cdot 10^4$ V/W. Il fattore di risposta per la componente continu a vale invece

$$\alpha_{dc} = q\,R_{dc} = 230 \text{ V / W}$$

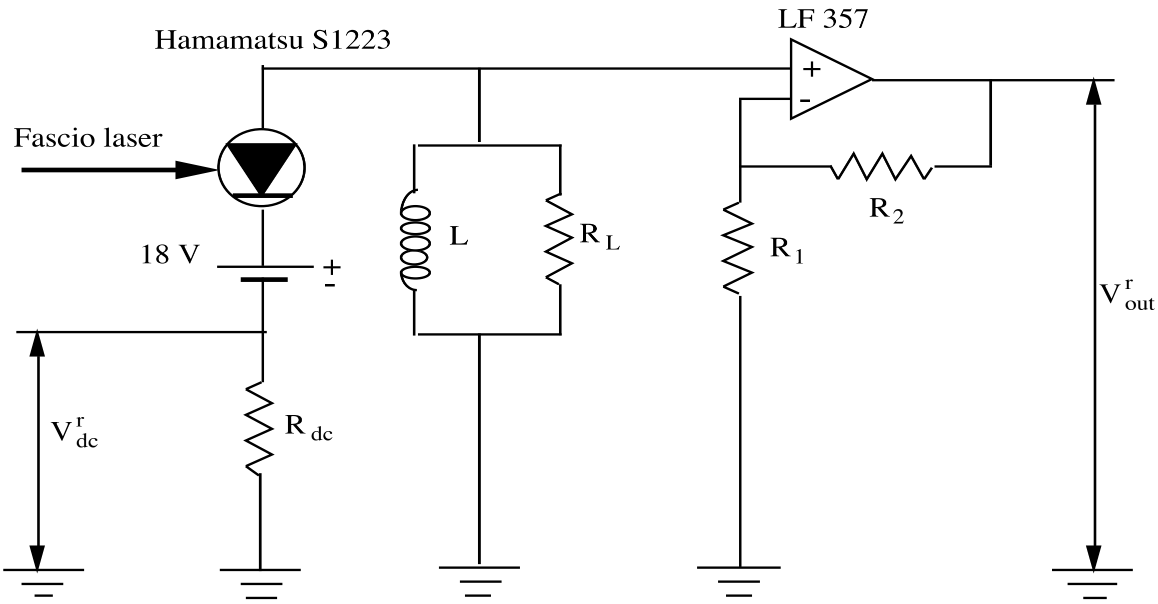


Figura 2.3.3: Circuito per la rivelazione della luce riflessa. L=30 mH, R_L=10 kΩ, R_1=100 Ω, R_2=1 kΩ, R_{dc}=1 kΩ.

2.3.2 Circuito per la rivelazione della luce trasmessa

La figura 2.3.4 mostra il circuito utilizzato per la rivelazione della luce trasmessa dall a cavità F.P. In questo circuito è usato un operazionale relativamente lento, ma con b asso rumore di uscita. Infatti in questo caso si è interessati alla componente continua del segnale. Il fattore di risposta in continua α_t è

$$\alpha_t = q\, R_c\, G = 0.25\ \ R_c\,(k\Omega)\ 10^4 \quad V / W \tag{2.3.4}$$

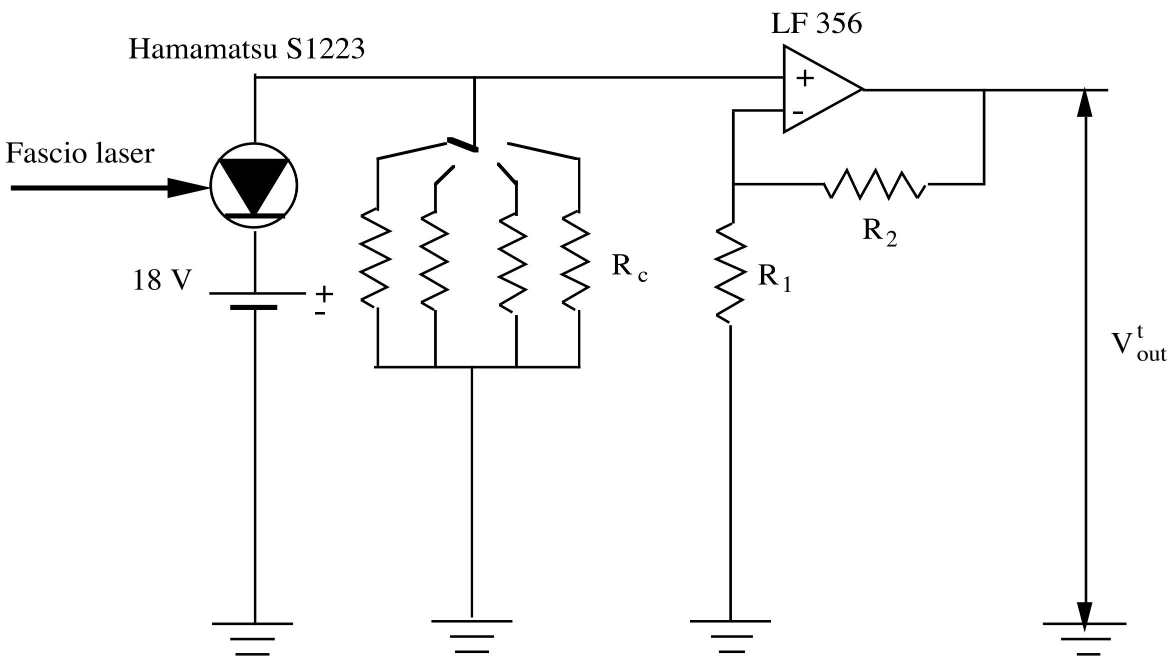


Figura 2.3.4: Circuito di rivelazione della luce trasmessa. R_c può essere scelta tra i valori 1 k Ω, 100 kΩ, 10 MΩ e 1 GΩ per variare il fondo scala del rivelatore.

2.4 INTERFEROMETRO FABRY - PEROT

2.4.1 L'interferometro Fabry - Perot ideale

L'interferometro (cavità) Fabry-Perot (F.P.) è costituito da due superfici riflettenti po ste a una distanza d (figura 2.4.1). La luce, attraversandole, viene in parte riflessa e in parte trasmessa, dando luogo a fenomeni di interferenza multipla. Sviluppiamo le eq uazioni che esprimono le caratteristiche generali dell'interferometro F.P. nell'ipotesi c he gli specchi siano piani e paralleli e che la direzione z di propagazione

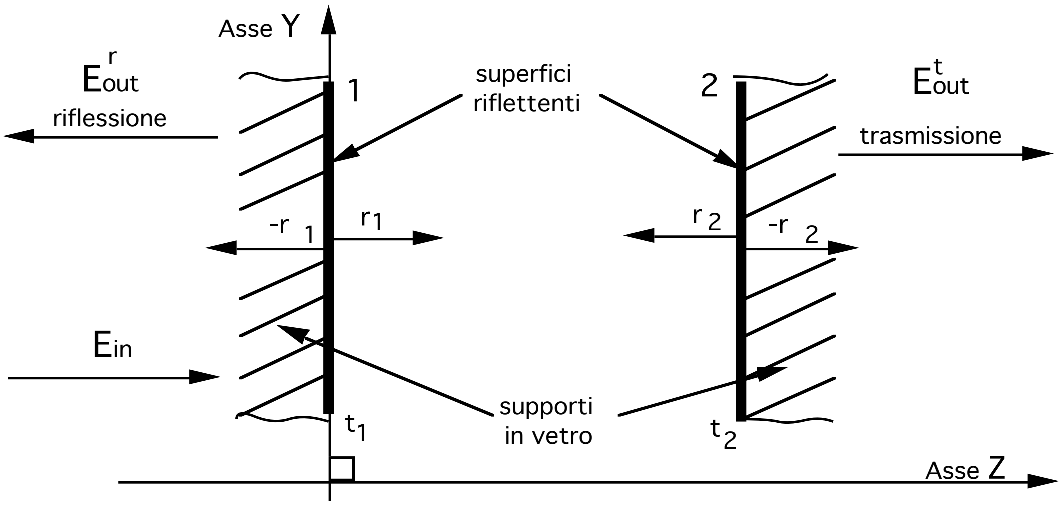


Figura 2.4.1: Interferometro F.P.: r_i e t_i rappresentano, rispettivamente, i coefficienti di rifless ione e di trasmissione delle superfici riflettenti.

della luce sia normale agli stessi. Descriviamo la luce come un onda piana monocrom atica di pulsazione $\omega=2\pi\nu$ e numero d'onda $k=2\pi/\lambda$

$$E_{in}(t,z) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \tag{2.4.1}$$

Il campo elettrico trasmesso dall'interferometro può calcolarsi come

$$\begin{aligned} E_t &= E_{in}t_1t_2e^{i\delta/2} + E_{in}t_1t_2r_1r_2e^{i\delta/2}e^{i\delta} + E_{in}t_1t_2e^{i\delta/2}(r_1r_2e^{i\delta})^2 + \ldots + \\ &+ E_{in}t_1t_2e^{i\delta/2}(r_1r_2e^{i\delta})^m + \ldots \\ &= E_{in}t_1t_2e^{i\delta/2}\sum_{p=0}^{\infty}(r_1r_2e^{i\delta})^p \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

dove il primo termine rappresenta il campo elettrico della luce che ha attraversato l'in terferometro senza aver subito riflessioni, e gli altri descrivono la luce che ha subito d ue o più riflessioni all'interno di esso. La luce trasmessa dall'interferometro, quindi, è composta da termini sfasati tra di loro di una quantità che, per un ciclo completo di a ndata e ritorno nel F.P, vale:

$$\delta = 4\pi dn/\lambda = 4\pi dn\nu/c \tag{2.4.3}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo attraversato. Dalla equazione (2.4.2) si ottien e:

$$E_t = E_{in} t_1 t_2 \frac{e^{i\delta/2}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}$$

$$= E_{in} t_1 t_2 \frac{(1 - r_1 r_2)\cos(\delta / 2) + i(1 + r_1 r_2)\mathrm{sen}(\delta / 2)}{1 - 2 r_1 r_2 \cos\delta + (r_1 r_2)^2} \qquad (2.4.4)$$

Lo sfasamento φ_t tra il campo elettrico E_{in} e quello che esce in trasmissione E_t è

$$\varphi_t = \mathrm{arctg}\left(\frac{1 + r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \mathrm{tg}\frac{\delta}{2}\right) \qquad (2.4.5)$$

Introduciamo ora i coefficienti di trasmissione e riflessione in intensità degli specchi $T_i = t_i^2$, $R_i = r_i^2$ per i quali supponiamo valga la condizione ideale di assenza di perdite di energia nella riflessione

$$T_i + R_i = 1 \qquad (2.4.6)$$

Supponiamo inoltre che valga

$$t_1 = t_2 \text{ e } |r_1| = |r_2| \qquad (2.4.7)$$

L'intensità I_t della luce che esce in trasmissione dal F.P. è allora

$$I_t = I_{in} \frac{T^2}{1 - 2R\cos\delta + R^2} \qquad (2.4.8)$$

Le condizioni di massima trasmissione si verificano quando

$$\delta = \delta_{max} = 2\pi m \qquad m = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (2.4.9)$$

e in condizioni ideali, in cui vale la (2.4.6), si ha $I_t = I_{in}$. Inoltre dalla (2.4.5) si ha che i n condizioni di massima trasmissione lo sfasamento tra E_{in} e E_t è nullo.

Per la luce riflessa dal F.P. il ragionamento è analogo. In questo caso la sommatoria d el campo elettrico può essere scritta come

$$E_r = -E_{in} r_1 + E_{in} t_1^2 r_2 e^{i\delta} + E_{in} t_1^2 r_2 e^{i\delta}(r_1 r_2 e^{i\delta}) + E_{in} t_1^2 r_2 e^{i\delta}(r_1 r_2 e^{i\delta})^2 +$$

$$+ \ldots + E_{in} t_1^2 r_2 e^{i\delta}(r_1 r_2 e^{i\delta})^m + \ldots \qquad (2.4.10)$$

$$= -E_{in} r_1 + E_{in} t_1^2 r_2 e^{i\delta} \sum_{p=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\delta})^p$$

Il campo elettrico della luce riflessa dal F.P. è allora

$$E_r = -E_{in}\frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2)e^{i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}}$$

$$= -E_{in}\frac{r_1(1+r_2^2) - r_2(1+r_1^2)\cos\delta - i\, r_2(1-r_1^2)\mathrm{sen}\delta}{1+(r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2\cos\delta} \qquad (2.4.11)$$

Lo sfasamento φ_r tra E_{in} e E_r è

$$\varphi_r = -\mathrm{arctg}\left(\frac{r_2(1-r_1^2)\mathrm{sen}\delta}{r_1(1+r_2^2) - r_2(1+r_1^2)\cos\delta}\right) \qquad (2.4.12)$$

L'intensità della luce riflessa dalla cavità è

$$I_r = I_{in}\frac{2(1-\cos\delta)R}{1 - 2R\cos\delta + R^2} \qquad (2.4.13)$$

Le condizioni di massima intensità per la riflessione si verificano per

$$\delta = \delta_{min} = 2\pi(m-1/2) \qquad m = 1, 2, 3, ... \qquad (2.4.14)$$

Introduciamo ora i parametri h_r e h_t definiti come

$$h_r = \frac{E_r}{E_{in}} \qquad h_t = \frac{E_t}{E_{in}} \qquad (2.4.15)$$

la (2.4.4) e la (2.4.11) possono allora riscriversi nella forma

$$h_r(\delta) = \frac{\sqrt{R}(1-e^{i\delta})}{1 - Re^{i\delta}} \qquad h_t(\delta) = \frac{Te^{i\delta/2}}{1 - Re^{i\delta}} \qquad (2.4.16)$$

Introduciamo poi i parametri H_r e H_t definiti come

$$H_r = h_r h_r^* = \frac{I_r}{I_{in}} \qquad H_t = h_t h_t^* = \frac{I_t}{I_{in}} \qquad (2.4.17)$$

Per qualsiasi δ vale

$$H_t + H_r = 1$$

ed inoltre in condizioni di massima trasmissione, cioè per $\delta = 0$, si ha

$$H_t(0) = 1 \qquad H_r(0) = 0 \qquad (2.4.18)$$

2.4.2 Il Fabry - Perot come cavità risonante

Si vuole ora calcolare la densità di energia presente all'interno dell'interferometro F.P . e mostrare che vi è accumulo di energia luminosa all'interno dell'interferometro stes so. La densità di energia associata ad un campo elettromagnetico nel vuoto è:

$$w(t,z) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Per le onde elettromagnetiche B=E/c e

$$w(t,z) = \varepsilon_0 E^2$$

All'esterno dell'interferometro l'onda luminosa è progressiva e la sua densità media di energia è

$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \qquad (2.4.19)$$

All'interno del F.P. l'onda luminosa in condizioni di risonanza è quasi stazionaria, qui ndi la si può scrivere come

$$E_{FP}(t,z) = E_{FP}^0 \,\mathrm{sen}\,\omega t\ \mathrm{sen}\,kz$$

La densità di energia associata a tale onda è

$$w_{FP}(t,z) = \varepsilon_0\ (E_{FP}^0)^2\ \mathrm{sen}^2\omega t\ \ \mathrm{sen}^2 kz$$

Facendo la media

$$\overline{w}_{FP} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 (E_{FP}^0)^2 \qquad (2.4.20)$$

L'ampiezza E_{FP}^0 dell'onda stazionaria può essere calcolata sommando i campi elettric i delle due onde progressive con direzioni opposte. L'ampiezza del campo elettrico de ll'onda che avanza all'interno della cavità è data dalla sommatoria

$$E'_{FP} = E_0 t_1 + E_0 t_1 r_1 r_2 e^{i\delta} + E_0 t_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^2 + \ldots + E_0 t_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^m + \ldots$$

mentre quella dell'onda che torna indietro è

$$E''_{FP} = E_0 t_1 r_1 + E_0 t_1 r_1 r_1 r_2 e^{i\delta} + E_0 t_1 r_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^2 + \ldots + E_0 t_1 r_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^m + \ldots$$

Il campo totale è la somma dei due:

$$E_{FP} = E'_{FP} + E''_{FP} = (1 + r_1)\Big[E_0 t_1 r_1 + E_0 t_1 r_1 r_1 r_2 e^{i\delta} + E_0 t_1 r_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^2 + \ldots +$$
$$+ E_0 t_1 r_1 (r_1 r_2 e^{i\delta})^m + \ldots\Big]$$

Per r≈1 si ha che, in condizioni di massima trasmissione, l'ampiezza del campo dell'o nda stazionaria è:

$$E^0_{FP} = E_0 \frac{2t}{1 - r^2} = E_0 \frac{2}{\sqrt{1 - R}} \qquad (2.4.21)$$

Sostituendo tale espressione nella (2.4.20) si ottiene

$$\overline{w}_{FP} = \varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{1 - R} = \overline{w}_0 \frac{2}{1 - R} \qquad (2.4.22)$$

dalla quale si vede che la densità di energia all'interno del F.P. può essere molto più g rande che all'esterno. L'interferometro F.P. è dunque una cavità risonante e in particol are, visto che l'energia immagazzinata è luminosa, può essere anche chiamato cavità ottica risonante.

2.4.3 Finesse di un Fabry - Perot ideale

Riscriviamo la (2.4.8) nella forma seguente (detta funzione di Airy):

$$H_t = \frac{1}{1 + f\sin^2(\delta/2)} = \frac{1}{1 + f\sin^2(2\pi d\nu/c)} \qquad (2.4.23)$$

dove

$$f = \frac{4R}{(1 - R)^2} \qquad (2.4.24)$$

Il grafico di fig 2.4.2, che mostra l'andamento di H_t in funzione di δ per vari valori de l parametro f, è lo spettro delle frequenze trasmesse dal F.P.. Come si può vedere il pi cco di trasmissione si restringe all'aumentare di f e con esso, quindi, la banda di frequ enza della luce trasmessa dalla cavità. Supponendo f >> 1, introduciamo, ora, la gran dezza F (*finesse*) definita da

$$F = \frac{\Delta\nu_{fsr}}{\Delta\nu_p} \qquad (2.4.25)$$

dove $\Delta\nu_p$ è la larghezza in frequenza, misurata a metà altezza, del picco di trasmissio ne, mentre $\Delta\nu_{fsr}$ è la distanza in frequenza fra due massimi successivi di trasmissione (vedere fig 2.4.2). Come per il caso del parametro f, più grande è la finesse F più stret ta diventa la banda di frequenze trasmesse dall'interferometro. La larghezza a metà al tezza $\Delta\nu_p$ del picco si ricava ponendo:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + f\,\sin^2(\pi d \Delta\nu_p / c)} \tag{2.4.26}$$

ed essendo f>>1, e quindi $\Delta\nu_p$ <<1, si ha:

$$\Delta\nu_p = \frac{c}{\pi d \sqrt{f}} \tag{2.4.27}$$

Il valore di $\Delta\nu_{fsr}$ si ricava dalla (2.4.23) come

$$\Delta\nu_{fsr} = \frac{c}{2d} \tag{2.4.28}$$

la finesse F è allora

$$F = \frac{\Delta\nu_{fsr}}{\Delta\nu_p} = \frac{\pi\sqrt{f}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} \tag{2.4.29}$$

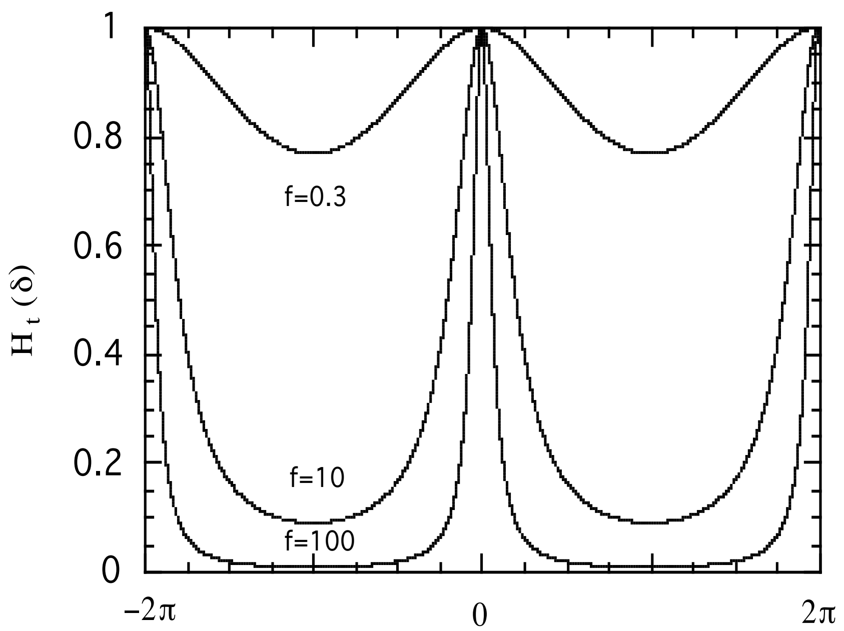


Figura 2.4.2: Funzione di Airy per vari valori del parametro f.

2.4.4 Fabry - Perot reale

Passiamo ora a trattare il caso più generale in cui ogni riflessione della luce sugli spe cchi è accompagnata da perdite d'intensità; alla (2.4.6) sostituiamo

$$T+R+P=1 \tag{2.4.30}$$

dove P rappresenta la frazione di intensità persa in una riflessione. La (2.4.8) resta va lida:

$$H_t = \frac{T^2}{1-2R\cos\delta + R^2} = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \frac{1}{1+f\sin^2(\delta/2)} \tag{2.4.31}$$

Considerando la (2.4.11) si ricava invece

$$H_r = \frac{[1-2\cos\delta(1-P)+(1-P)^2]\,R}{1-2R\cos\delta + R^2} \tag{2.4.32}$$

In condizioni di massima trasmissione i valori di H_t e H_r sono dati da

$$H_t(0) = \left(\frac{T}{1-R}\right)^2 \qquad H_r(0) = \frac{P^2 R}{(1-R)^2} \tag{2.4.33}$$

L'espressione della finesse rimane uguale a quella data dalla (2.4.29).

2.4.5 Fabry-Perot con assorbimento del mezzo

Vediamo ora come si modificano le formule che esprimono H_t, H_r e F se si tiene cont o anche dell'assorbimento dell'aria. Riscriviamo la (2.4.2) nella forma :

$$E_t = E_{in}\, t_1 t_2\, e^{i\delta/2}\, e^{-\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha})^p \tag{2.4.34}$$

dove $\alpha = \mu d$ e μ è il coefficiente di assorbimento dell'aria. Il campo elettrico della luc e trasmessa dal F.P. diventa allora:

$$E_t = E_{in} t_1 t_2 \frac{e^{-\alpha}}{1-r_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha}} \tag{2.4.35}$$

L'intensità trasmessa sarà data da:

$$H_t = \frac{T^2 e^{-2\alpha}}{1-2Re^{-2\alpha}\cos\delta + R^2 e^{-4\alpha}} \tag{2.4.36}$$

Da questa equazione si può ricavare l'espressione della finesse procedendo analogam ente a come fatto nei casi precedenti :

$$f = \frac{4Re^{-2\alpha}}{(1 - Re^{-2\alpha})^2} \tag{2.4.37}$$

e

$$F = \frac{\pi\sqrt{Re^{-2\alpha}}}{1 - Re^{-2\alpha}} \tag{2.4.38}$$

Ricaviamo ora l'espressione del campo riflesso. La (2.4.10) viene riscritta come

$$E_r = -E_{in}r_1 + E_{in}t_1^2 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha} \sum_{p=0}^{m} (r_1 r_2 e^{i\delta} e^{-2\alpha})^p \tag{2.4.39}$$

quindi l'intensità riflessa sarà espressa da

$$H_r = \frac{[1 - 2\cos\delta(1 - P)e^{-2\alpha} + (1 - P)^2 e^{-4\alpha}]\,R}{1 - 2Re^{-2\alpha}\cos\delta + R^2 e^{-4\alpha}} \tag{2.4.40}$$

In condizioni di massima trasmissione (δ=0) la (2.4.36) e la (2.4.40) diventano:

$$H_t(0) = \frac{T^2 e^{-2\alpha}}{(1 - Re^{-2\alpha})^2}$$

$$H_r(0) = \frac{[1 - (1 - P)e^{-2\alpha}]^2\,R}{(1 - Re^{-2\alpha})^2} \tag{2.4.42}$$

Queste formule, assieme alla (2.4.38), definiscono completamente le caratteristiche d el F.P. costruito in laboratorio. In linea di principio sono tali formule che devono esse re usate per valutare i dati e le misure ottenute. Nel nostro caso, comunque, il valore del coefficiente di assorbimento dell'aria (per il rosso) è μ=5.3 10^{-6} m^{-1} (μ^{-1} = 188 K m) (Jackson 1975), ed essendo $\alpha=\mu d$=4.7 10^{-6} (d=0.885 m) si ottiene

$$1-e^{-2\alpha} \approx 10^{-5}$$

La considerazione dell'assorbimento dell'aria introduce dunque una correzione assolu tamente trascurabile alle formule del paragrafo precedente. Il termine $e^{-2\alpha}$ verrà consi derato, da qui in avanti, uguale all'unità.

2.5 TELESCOPIO

2.5.1 Stabilità di una cavità ottica

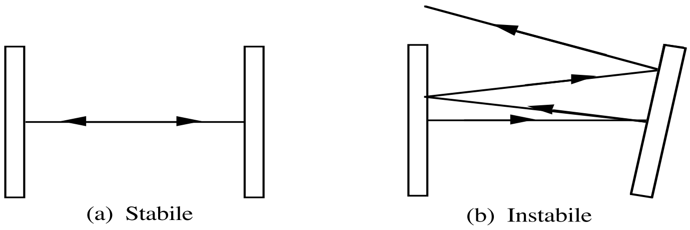


Figura 2.5.1: (a) Cavità ottica con specchi piani paralleli: il raggio è ortogonale agli specchi e rimane all'interno della cavità; (b) Cavità ottica con specchi piani non paralleli, il raggio esce lateralmente dalla cavità dopo un numero finito di riflessioni.

Una cavità ottica si definisce "stabile" se nelle riflessioni sugli specchi ciascun raggio del fascio di luce ripercorre esattamente il cammino di incidenza in senso inverso. Q uesta condizione di "reversibilità" è tanto più stringente se si considera che la cavità d à luogo, in linea di pricipio, ad un numero infinito di riflessioni multiple. Il rispetto di tale condizione esclude la possibilità che il fascio possa uscire lateralmente dalla cav ità (figura 2.5.1). Per una cavità costruita con specchi sferici di raggi di curvatura R_1 ed R_2 posti a distanza d la stabilità è garantita da una condizione di tipo geometrico (Svelto 1989)

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1 \tag{2.5.1}$$

Questa condizione è rispettata anche dalla cavità formata da due specchi piani paralle li, ma evidentemente è impossibile in pratica mantenerne l'allineamento. In più il fasc io laser è un'onda solo approssimativamente piana. Essa ha un profilo del campo di ti po gaussiano, che implica una divergenza dei raggi periferici dovuta alla diffrazione. Nella pratica, quindi, si preferisce costruire cavità con almeno uno specchio curvo, co sa che ne facilita l'allineamento e diminuisce le perdite di intensità. La condizione di stabilità impone che i raggi di curvatura dei fronti d'onda del fascio alla posizione de gli specchi coincidano con i raggi di curvatura degli specchi stessi.

La cavità F.P. costruita in laboratorio è costituita di un primo specchio piano ($R_1=\infty$) e uno concavo avente raggio di curvatura R_2= 5 m posti a distanza d=0.885 m (figura 2.5.2). In queste condizioni la (2.5.1) garantisce la stabilità del risuonatore.

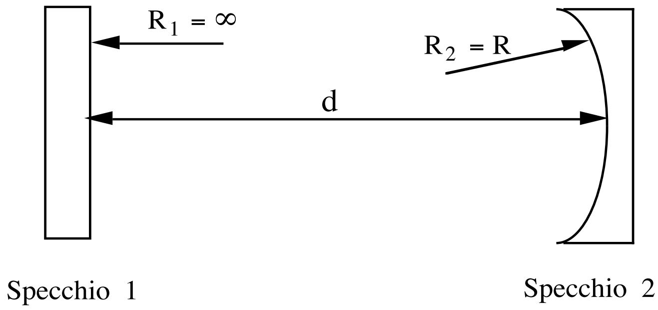


Figura 2.5.2 : Cavità con uno specchio piano e uno concavo.

2.5.2 Adattamento del fascio laser alla cavità F.P.

Si può dimostrare (Svelto 1989) che il campo elettrico dell'onda stazionaria presente all'interno di un risuonatore ottico può essere sviluppato in termini degli elementi di una successione ortonormale completa di modi spaziali (TEM_{lm}) il cui termine generico può essere espresso come (Svelto 1989)

$$E_{lm}(x,y,z) = \frac{w_c}{w(z)}\, H_l\left[\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right] H_m\left[\frac{y\sqrt{2}}{w(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right]$$
$$\times\ \exp\{-i[kz-(1+l+m)\ \psi(z)]\}$$
$$\times\ \exp\{-i[k(x^2+y^2)/2R(z)]\} \qquad (2.5.2)$$

dove

$$w(z) = w_c \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_c^2} \right)^2}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_c^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \qquad (2.5.3)$$

$$\psi(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z\lambda}{\pi\, w_c^2} \right)$$

L'asse z è preso coincidente con l'asse ottico della cavità, cioè la retta che passa per i fuochi degli specchi. H_l e H_m sono i polinomi di Hermite di ordine l ed m. La funzion e w(z) è detta "raggio del fascio" alla coordinata z. Il fascio assume raggio minimo w $_c$ (*waist*) alla coordinata z=0 e si allarga idefinitamente procedendo da questo punto. La funzione R(z) rappresenta il raggio di curvatura delle superfici d'onda (Svelto 198 9). Nel punto di waist minimo R(0)=∞. La prima riga dell'equazione 2.5.2 rappresent a l'ampiezza del campo elettrico. La seconda riga descrive la variazione della fase lun go l'asse zeta (fattore di fase longitudinale). Si ottiene una risonanza quando la differ enza di fase tra le posizioni dei due specchi è un multiplo intero di π. Modi spaziali di fferenti (l'+m'≠l+m) hanno dunque differenti frequenze di risonanza. La terza riga, inf ine, descrive l'andamento della fase lungo il piano xy (fattore di fase trasversale). Nel piano xy modi diversi hanno diversa distribuzione spaziale dell'intensità. Ponendo u no schermo all'uscita della cavità si può dunque individuare il modo in risonanza dall a forma della macchia luminosa.

Nella realizzazione della cavità F.P. costruita in laboratorio si è fatto sì che risuonass e il solo modo TEM_{00}, quello soggetto alle minori perdite di intensità per diffrazione (Svelto 1989). Ciò si ottiene allineando il fascio del laser all'asse ottico della cavità. L'ampiezza del campo elettrico del modo TEM_{00} è

$$\left| E_{00}(x,y,z) \right| = \frac{w_c}{w(z)} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \qquad (2.5.4)$$

Per la cavità da noi costruita la posizione del waist w_c coincide con quella dello specchio piano ($R_1=\infty$) e il suo valore si ricava imponendo nella seconda delle (2.5.3) la condizione $R_2=R(d)$. Si ha allora

$$w_c^2 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)\sqrt{d\left(R-d\right)} \tag{2.5.5}$$

Per la cavità realizzata in laboratorio il diametro minimo del fascio è $2w_c=1.61$ mm. Alla posizione dello specchio concavo la (2.5.3) dà $2w(d)=1.77$ mm.
La luce del laser è anch'essa un fascio gaussiano TEM_{00}. L'ampiezza del suo campo elettrico è dunque descritta da una equazione analoga alla (2.5.4)

$$\left|E_L(x,y,z')\right| = \frac{w_L}{w(z')}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z')}\right] \tag{2.5.6}$$

dove l'origine dell'asse z' è nel punto dove $w(z')=w_L$. Affinchè tale fascio risuoni all'interno della cavità F.P. occorre modificare i raggi di curvatura dei fronti d'onda in modo che coincidano con i raggi di curvatura degli specchi stessi. In questo modo la propagazione del fascio laser all'interno del F.P. avviene in accordo con il principio di reversibilità ottica e il fascio si dice "adattato" alla cavità stessa. Per fare ciò si può interporre una lente di lunghezza focale f sul percorso del fascio. Nelle sue vicinanze il raggio di curvatura R dei fronti d'onda del fascio viene modificato secondo la formula

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f} \qquad (2.5.6)$$

Scegliendo opportunamente la lunghezza focale f e le distanze della lente da laser e cavità è possibile, facendo uso per (2.5.3), far in modo che il nuovo waist del fascio coincida in dimensione e posizione con quello della cavità, cioè "adattare" il fascio laser alla cavità.
In pratica, invece di una sola lente, si fa uso di un telescopio composto da due lenti. Indicando con d_L la distanza tra la prima lente e la posizione del waist w_L del fascio laser (figura 2.5.3), con d_c la distanza tra la seconda lente e il waist w_c della cavità, con f_1 e f_2 le distanze focali delle due lenti e con w_i il valore del waist del fascio all'interno del telescopio, si possono scrivere le seguenti equazioni (Svelto 1989)

$$d_L = f_1 \pm \frac{w_L}{w_i}\left[f_1^2 - \left(\frac{\pi\, w_L\, w_i}{\lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d_c = f_2 \pm \frac{w_c}{w_i}\left[f_2^2 - \left(\frac{\pi\, w_c\, w_i}{\lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.5.7)$$

Uguagliando i valori di w_i ricavati dalle due espressioni precedenti si ottiene

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{w_c^2}{w_L^2}\,\frac{(d_L - f_1)^2 + \pi^2\, w_L^4/\lambda^2}{(d_c - f_1)^2 + \pi^2\, w_c^4/\lambda^2} \qquad (2.5.8)$$

che diventa, supponendo $f_1 << d_L$ e $f_2 << d_c$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{w_c}{w_L}\left(\frac{\lambda^2 d_L^2 + \pi^2\, w_L^4}{\lambda^2 d_c^2 + \pi^2\, w_c^4}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.5.9)$$

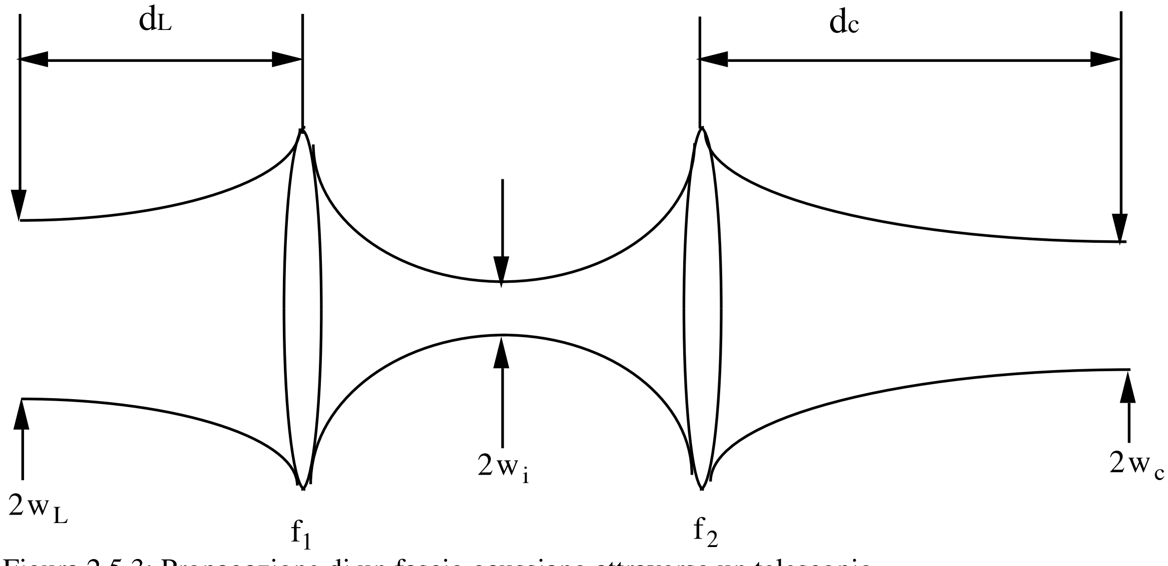


Figura 2.5.3: Propagazione di un fascio gaussiano attraverso un telescopio.

2.6. SPECCHI DIELETTRICI MULTISTRATO

Gli specchi della cavità sono dielettrici multistrato ad alta riflettività. Essi sono realiz zati evaporando in vuoto alternativamente strati successivi di due materiali dielettrici con indice di rifrazione diversi n_1 e n_2 su un substrato con indice di rifrazione n_s. Per incidenza normale gli strati hanno spessori l_1 e l_2 tali che valga la condizione

$$n_1 l_1 = n_2 l_2 = \lambda/4$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce nel vuoto. Sovrapponendo un numero dispari j di strati in modo tale che la successione inizi e termini con lo strato di indice di rifra zione maggiore n_1, la riflettività per incidenza normale è data dalla relazione (Svelto 1989)

$$R = r^2 = \left(\frac{n_1^{j+1} - n_2^{j-1} n_s}{n_1^{j+1} + n_2^{j-1} n_s} \right)^2 \qquad (2.6.1)$$

Per gli specchi utilizzati il substrato sul quale sono depositati gli strati riflettenti di di elettrico è vetro BK7. Il numero di strati e il tipo di materiali dielettrici non sono inve ce noti.

Nella riflessione su uno specchio dielettrico multistrato un fascio di luce polarizzato l inearmente acquista una piccola ellitticità, il cui valore cresce con l'aumentare del nu mero di riflessioni. In uno specchio dielettrico vi sono due distinti effetti responsabili dell'ellitticità; uno dipende dal quadrato dell'angolo di incidenza (Born 1980), l'altro è intrinseco dello specchio e dipende solo dal punto di incidenza (Carusotto 1989). Nel caso della cavità Fabry-Perot è solo quest'ultimo effetto a contribuire all'ellitticità. L o specchio si comporta come una lamina birifrangente caratterizzata da un valore dell o sfasamento e dalla direzione dell'asse lento. A causa di questa birifrangenza la freq uenza di risonanza della luce in una cavità F.P. è diversa a seconda che la direzione d i polarizzazione sia parallela o ortogonale all'asse veloce degli specchi. Se la differen za tra le frequenze di risonanza nei due casi è più grande della larghezza di riga $\Delta\nu_p$ d ella cavità, il Fabry-Perot si comporta, per la luce presente nella cavità, come un pola rimetro. In queste condizioni risulterebbe dunque impossibile effettuare l'esperimento PVLAS, che modifica lo stato di polarizzazione della luce in cavità. Supponiamo, inf atti, che sia in risonanza uno dei due stati di polarizzazione. L'effetto di birifrangenza magnetica crea una componente del campo elettrico con polarizzazione ortogonale a

quella iniziale. Non essendo tale componente in risonanza, si perde l'informazione sul
l'ellitticità dovuta alla birifrangenza magnetica del vuoto. Sia $\Delta\varphi$ la differenza di fase
tra le due componenti della polarizzazione introdotta dalla riflessione sugli specchi d
ella cavità e θ l'angolo tra la direzione della polarizzazione lineare del fascio e l'asse l
ento. L'ellitticità acquisita dal fascio è

$$\psi = \frac{2\,F}{\pi}\,\frac{\Delta\varphi}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta \tag{2.6.2}$$

dove $2F/\pi$ è il fattore di amplificazione dell'effetto di birifrangenza dovuto alle rifless
ioni multiple sugli specchi della cavità (appendice A). Perchè i due stati di polarizzaz
ione diano luogo a picchi di trasmissione separati, deve essere

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\,\Delta\nu_{fsr} = \frac{\psi\,\Delta\nu_{fsr}}{2\,F\,\mathrm{sen}\,2\theta} > \frac{\Delta\nu_p}{2}$$

cioè

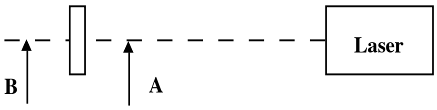
$$\Delta\varphi > \frac{\pi}{F} \tag{2.6.3}$$

Capitolo 3

Caratterizzazione della Cavità e stabilizzazione in frequenza

3.1 Caratterizzazione sperimentale della cavità

3.1.1 Trasmissività degli specchi



Figua 3.1.1: Schema per la misura della trasmissività degli specchi. L'intensità luminosa è misurata nei punti A e B con il Labmaster E della Coherent.

La cavità F.P. realizzata nel corso del presente lavoro di tesi è costituita da due specchi (Ø25 mm, spessore 10 mm) distanti d=0.885±0.005 m l'uno dall'altro, fissati indipendentemente sul piano di un tavolo ottico. La ditta costruttrice (Laseroptik) fornisce per essi le seguenti caratteristiche :

$$R > 0.9975$$
$$T < 0.5\cdot 10^{-3}$$
$$P \cong 1.5\cdot 10^{-3}$$

La misura del coefficiente di trasmissione T degli specchi è stata effettuata in modo diretto (figura 3.1.1). Il valore misurato per entrambi gli specchi è

$$T = (0.38 \pm 0.01)\cdot 10^{-3}$$

in buon accordo con il valore fornito dalla casa.

Risulta invece impossibile effettuare la misura diretta della riflettività R degli specchi misurando l'intensità del fascio prima e dopo una riflessione. Sarebbe infatti necessaria una precisione migliore di 0.02%, mentre le sole fluttuazioni dell'intensità del fascio laser nel corso della misura possono essere dell'ordine dell'unità percentuale. La migliore stima dei valori di R e P si ottiene dall'espressione della finesse F, misurando s perimentalmente il valore di quest'ultima grandezza. Ciò è stato fatto utilizzando lo s chema di figura 3.1.2.

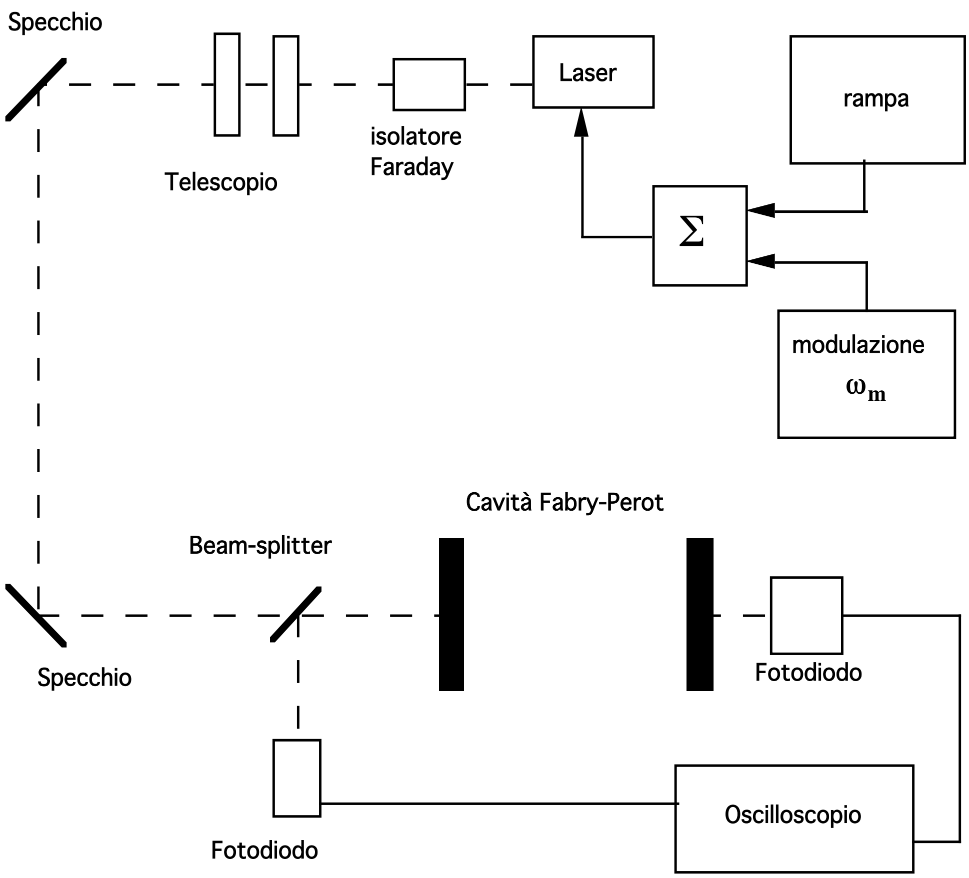


Figura 3.1.2: Schema per la misura dei parametri della cavità F.P. L'isolatore Faraday isola il laser dalla luce riflessa indietro dalla cavità. Si usa l'uscita in continua del fotodiodo in rifless ione. Il modulatore ω_m è usato solo nella misura della finesse.

3.1.2 Misura della finesse

Come si è visto prima la frequenza del laser può essere variata sia manualmente che e lettronicamente (paragrafo 2.1). Attraverso il controllo elettronico del piezoelettrico s i applica al laser un impulso a dente di sega (rampa) che fa variare la frequenza della luce attorno ad un valore di risonanza selezionato mediante il controllo manuale del t ermistore. Su un oscilloscopio collegato all'uscita del fotodiodo in trasmissione si otti ene direttamente la curva di Airy (figura 2.4.2), cioè lo spettro delle frequenze trasme sse dal F.P. Un telescopio adatta il fascio laser al modo TEM_{00} della cavità (paragraf o 2.5). L'intensità residua associata ad altri modi TEM_{lm} risulta inferiore al 4%. Per e ffettuare la misura della finesse F si somma alla rampa una modulazione sinusoidale ad una frequenza $\nu_m=\omega_m/2\pi$ maggiore della larghezza in frequenza del picco di trasm issione della cavità. Il campo elettrico della luce è

$$E(t) = E_0 \; e^{i(\omega_L t + \beta \,\mathrm{sen}\, \omega_m t)} \tag{3.1.1}$$

dove $\omega_L=2\pi\nu_L$ è la pulsazione della luce della sorgente e β è l'indice di modulazione. Usando le funzioni di Bessel e troncando lo sviluppo al primo ordine si ottiene

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \; e^{i\omega_L t}[J_0(\beta) + 2\, i\, J_1(\beta)\; \mathrm{sen}\, \omega_m t] \\ &= E_0 \; e^{i\omega_L t}[J_0(\beta) + J_1(\beta)\, (e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t})] \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Quindi il campo elettrico all'uscita del laser, oltre alla componente portante a frequen za ν_L, presenta due bande laterali alle frequenze $\nu_L \pm \nu_m$. Uno spettro in frequenza dell a luce, osservato con l'oscilloscopio all'uscita del diodo in trasmissione, è mostrato in figura 3.1.3. La distanza Δt_m fra i picchi corrispondenti alle due bande laterali serve a calibrare in frequenza la base dei tempi dell'oscilloscopio. La larghezza in frequenza a metà altezza (FWHM) $\Delta\nu_p$ del picco centrale si ottiene come

$$\Delta\nu_p = \frac{2\nu_m}{\Delta t_m} \Delta t_p \tag{3.1.3}$$

dove Δt_p è la sua larghezza in tempo del picco di trasmissione. La finesse si calcola q uindi dalla (2.4.25) con $\Delta\nu_{fsr}$ dato dalla (2.4.28) ($\Delta\nu_{fsr}$ =169 MHz).

Figura 3.1.3: Intensità trasmessa dalla cavità F.P. Velocità di rampa 350 MHz/s. Le bande lat erali sono dovute ad una modulazione della fase del laser a frequenza ν_m=717.7 kHz, di ampi ezza $\beta\approx1.1$.

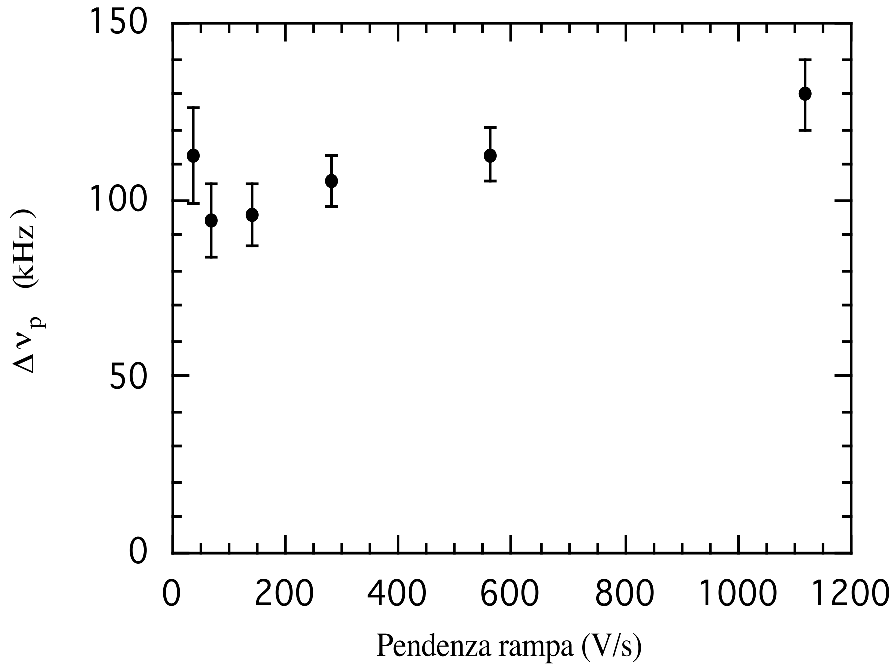


Figura 3.1.4: Andamento di $\Delta\nu_p$ in funzione della pendenza della rampa applicata al piezoele ttrico del laser.

Il grafico di figura 3.1.4 mostra l'andamento del valore di $\Delta\nu_p$ misurato al variare dell a pendenza della rampa. Il valore di $\Delta\nu_p$ è alto per bassi valori della pendenza, quindi diminuisce e torna ad aumentare al crescere della pendenza. Tale andamento si spieg a considerando il fatto che quando la rampa è lenta la frequenza del laser attraversa la risonanza della cavità in un tempo più lungo del tempo di caricamento τ della stessa (alcuni microsecondi). Le vibrazioni meccaniche, allora, alterano le condizioni di riso nanza della cavità mentre il laser passa per le frequenze di risonanza stesse. Ciò caus a uno spostamento della frequenza di risonanza, cui corrisponde il valore di picco del la curva di Airy e, di conseguenza, un allargamento (fittizio) dello spettro di trasmissi one del F.P. Con pendenze della rampa troppo alte la frequenza del laser passa attrav erso la risonanza della cavità così velocemente da impedirne il completo caricamento . Questo porta a una distorsione del picco che causa, di nuovo, un'aumento di $\Delta\nu_p$. Da l grafico di figura 3.1.4 si deduce dunque il valore da utilizzare nelle misure. Il valore di $\Delta\nu_p$, misurato a 70 V/s, è

$$\Delta\nu_p = 93 \pm 9 \text{ kHz} \tag{3.1.4}$$

Considerando la (3.1.3), l'errore su $\Delta\nu_p$ è dato dalla propagazione gaussiana delle dis persioni di Δt_p e Δt_m ottenute in una serie di venti misure

$$\delta\Delta\nu_p = \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta\nu_p}{\partial\Delta t_p}\delta\Delta t_p\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta\nu_p}{\partial\Delta t_m}\delta\Delta t_m\right)^2} = \Delta\nu_p\sqrt{\left(\frac{\delta\Delta t_p}{\Delta t_p}\right)^2 + \left(\frac{\delta\Delta t_m}{\Delta t_m}\right)^2}$$

Al valore di $\Delta\nu_p$ dato dalla (3.1.4) corrisponde una finesse

$$F = 1800 \pm 200$$

L'errore sulla finesse F è stato calcolato trascurando l'errore su $\Delta\nu_{fsr}$:

$$\delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial\Delta\nu_p}\right|\delta\Delta\nu_p = F\frac{\delta\Delta\nu_p}{\Delta\nu_p}$$

3.1.3 Misura di $H_t(0)$ e $H_r(0)$

Per misurare $H_t(0)$ e $H_r(0)$ non viene utilizzata la modulazione Ω_m. Sul fotodiodo in t rasmissione si ottiene la curva di Airy (figura 3.1.5), il cui valore di picco rappresenta l'intensità della luce trasmessa dalla cavità alla risonanza. Il rapporto fra questa inten sità e quella della luce che entra nella cavità fornisce direttamente il valore di $H_t(0)$. P er la riflessione il discorso è analogo; in questo caso bisogna considerare lo spettro di frequenza in riflessione (figura 3.1.6). Esso mostra un picco negativo in coincidenza con le condizioni di risonanza. In questo caso la luce riflessa arriva al fotodiodo per mezzo di un beam-splitter (una lastrina di vetro BK7 orientata a 45˚ rispetto al fascio) avente un coefficiente di riflettività (totale) pari al 7%.

L'intensità I_{in}, misurata immediatamente prima del primo specchio della cavità e corr etta per il coefficiente di accoppiamento al modo TEM_{00} (96%), è

$$I_{in} = 41 \pm 2 \text{ mW}$$

I valori misurati di $H_t(0)$ e $H_r(0)$ sono

$$H_t(0) = 0.049 \pm 0.007$$

$$H_r(0) = 0.63 \pm 0.04$$

dove gli errori sono calcolati come

$$\delta H_{r,t}(0) = H_{r,t}(0)\sqrt{\left(\frac{\delta I_{r,t}(0)}{I_{r,t}(0)}\right)^2 + \left(\frac{\delta I_{in}}{I_{in}}\right)^2}$$

Nel calcolo dell'errore su $H_t(0)$ e $H_r(0)$ si sono trascurati gli errori sui fattori di rispost a α dei fotodiodi (vedi paragrafo 2.3).

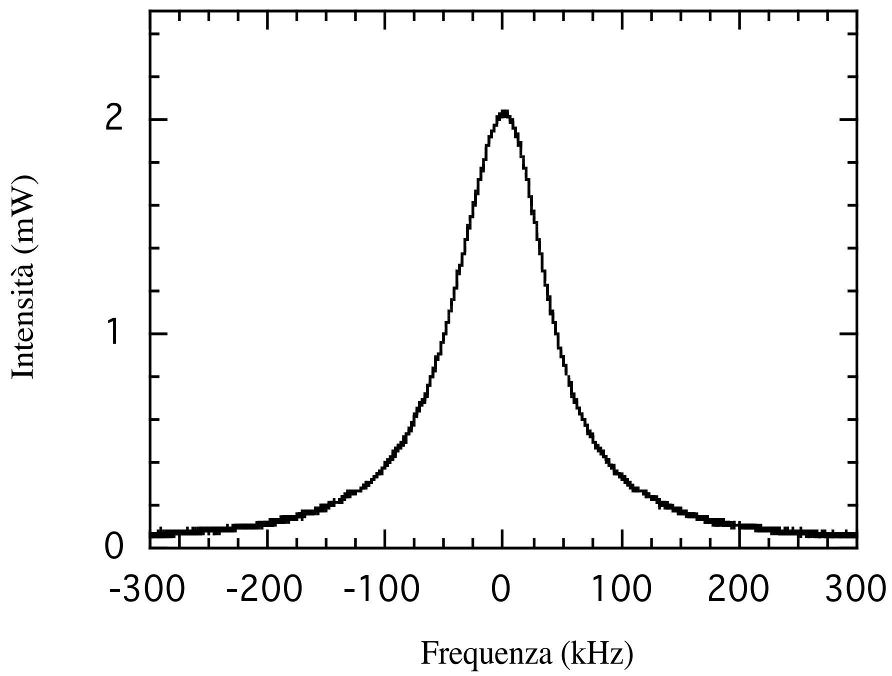


Figura 3.1.5: Misura sperimentale dell'intensità di luce trasmessa (funzione di Airy). I_{in}=41 mW. Velocità di rampa 350 MHz/s.

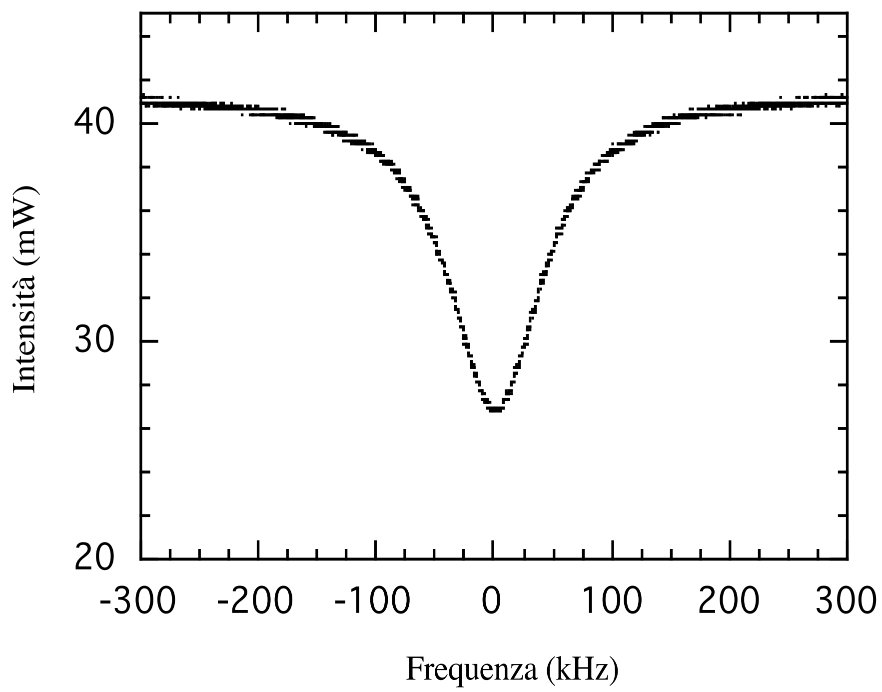


Figura 3.1.6: Misura sperimentale dell'intensità di luce riflessa. I_{in}=41 mW. Velocità di ramp a 350 MHz/s.

3.1.4 Parametri della cavità

$\Delta\nu_{fsr}$	169 MHz
$\Delta\nu_p$	93 ± 9 kHz
F	1800 ±200
R	0.99826 ± 0.00022
T	$(0.38 \pm 0.01)\cdot 10^{-3}$
P	$(1.36 \pm 0.02)\cdot 10^{-3}$
$[H_t(0)]_{misurato}$	0.049 ± 0.007
$[H_t(0)]_{calcolato}$	0.048 ± 0.011
$[H_r(0)]_{misurato}$	0.63 ± 0.04
$[H_r(0)]_{calcolato}$	0.61 ± 0.20

Tabella 3.1.1: Valori dei parametri che caratterizzano la cavità.

Conoscendo il valore della finesse F, dalla (2.4.29) si può ricavare un valore per la rif lettività degli specchi R. Si ottiene

$$R = 0.99826 \pm 0.00022$$

e da questo, tramite la (2.4.30), un valore per P:

$$P = (1.36 \pm 0.02)\cdot 10^{-3}$$

I valori di R e T sono stati ottenuti da due misure indipendenti. Sostituiamo, quindi, t ali valori nelle formule (2.4.33), e confrontiamo i valori di $H_t(0)$ e $H_r(0)$ così ottenuti con quelli misurati:

$$[H_t(0)]_{calcolato} = 0.048 \pm 0.011$$

$$[H_r(0)]_{calcolato} = 0.61 \pm 0.20$$

Come si vede essi sono in buon accordo con quelli misurati direttamente in laboratori o.

Nella tabella 3.1.1 sono riassunti i valori dei parametri della cavità

3.2 STABILIZZAZIONE IN FREQUENZA DI POUND E DREVER

Per effettuare misure di ellissometria sfruttando la moltiplicazione dell'effetto di birif rangenza in una cavità F.P. occorre fare in modo che la frequenza ν_L della luce che e ntra nella cavità coincida con una delle frequenze ν_c per le quali la cavità trasmette e che tale valore rimanga costante per il tempo necessario ad effettuare la misura. In alt re parole occorre che sia mantenuta stabile la condizione di risonanza per la luce, in u n equilibrio dinamico che contrasti le derive termiche della frequenza del laser, della posizione degli specchi, oltrechè le vibrazioni meccaniche degli stessi. Si tratta quind i di eseguire un "agganciamento in frequenza" fra la sorgente luminosa e la cavità. Ci ò può essere realizzato o spostando in tempo reale gli specchi della cavità facendo us o di un attuatore piezoelettrico oppure modificando la frequenza del laser. Come si è visto nel paragrafo 2.1 il laser utilizzato dispone di due attuatori che permettono di m odificarne la frequenza senza dover costruire un sistema elettro-meccanico (per il con trollo della posizione degli specchi della cavità) o elettro-ottico (per modificare la fre quenza del laser mediante una cella di Pockels esterna al laser (Shoemaker 1989)). A differenza di entrambi questi sistemi gli attuatori del laser non richiedono l'uso di alte tensioni. Stabilizzare la frequenza del laser equivale a pensare la frequenza di risona nza della cavità ν_C come un riferimento al quale asservire la frequenza ν_L.

3.2.1 Segnale di correzione

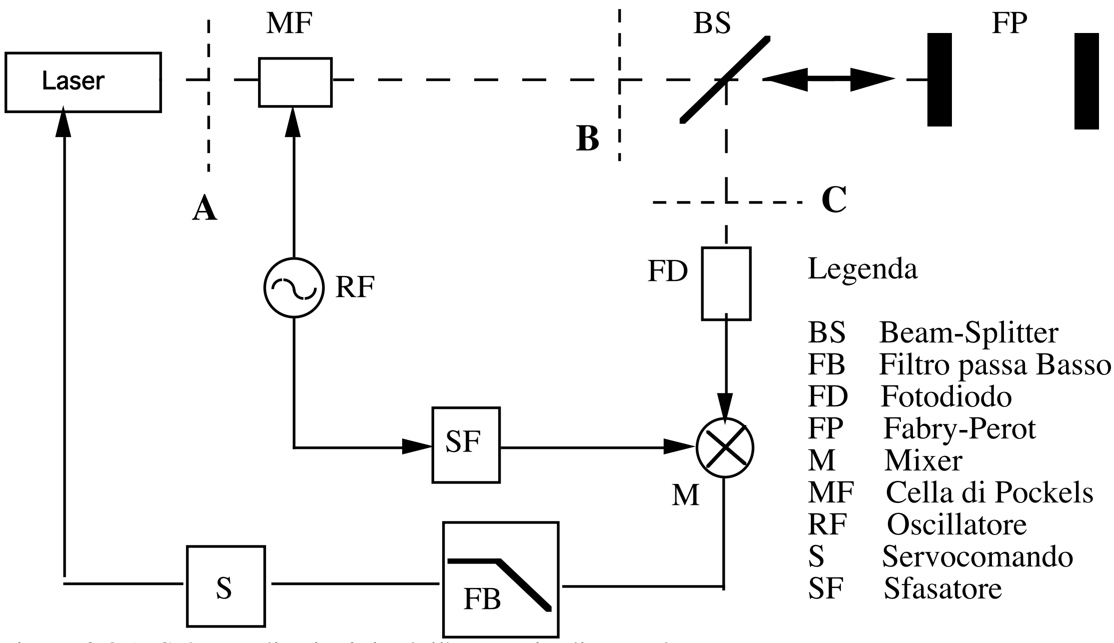


Figura 3.2.1: Schema di principio dell'aggancio di Pound e Drever.

Nella tecnica di aggancio di Pound e Drever (Pound 1983) si modula la fase della radiazione del laser ad una frequenza ν_m compresa fra la larghezza di riga $\Delta\nu_p$ e il free spectral range $\Delta\nu_{fsr}$ della cavità:

$$\Delta\nu_{fsr} >> \nu_m >> \Delta\nu_p \qquad (3.2.1)$$

L'aggancio viene realizzato utilizzando il segnale riflesso dalla cavità Fabry-Perot. Lo schema di principio del sistema di aggancio è dato in figura 3.2.1. Con riferimento a questa figura analizziamo il campo elettrico dell'onda luminosa (supposta piana) in corrispondenza delle sezioni A, B e C. Nella sezione A il campo elettrico è

$$E_A(t) = E_0\ e^{i\omega_L t} \qquad (3.2.2)$$

Il campo elettrico dopo il modulatore di fase MF (cella di Pockels), cioè alla sezione B, è

$$\begin{aligned} E_B(t) &= E_0\ e^{i(\omega_L t + \beta\, \mathrm{sen}\, \omega_m t)} \\ &= E_0\ e^{i\omega_L t}[J_0(\beta) + J_1(\beta)\,(e^{i\omega_m t} - e^{-i\omega_m t})] \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Il prodotto $J_0 \cdot J_1$ ha un massimo per $\beta \approx 1.1$: $J_0(1.1)=0.72$, $J_1(1.1)=0.47$. Per scrivere il campo elettrico nella sezione C bisogna tener conto del fatto che il fascio luminoso ha attraversato due volte il beam-splitter e che esso subisce la riflessione da parte della cavità F.P. Per le ampiezze dei campi incidente e riflesso e per il loro sfasamento vale (paragrafo 2.4)

$$h_r(\varepsilon) = \frac{E_r}{E_{in}} = -\left(\frac{(1 + R - RP) - (1 + R - P)\cos\varepsilon - i\,(1 - R - P)\mathrm{sen}\varepsilon}{1 + R^2 - 2R\cos\varepsilon}\right)\sqrt{R} \qquad (3.2.4)$$

$$\mathrm{tg}\varphi_r = -\frac{(1 - R - P)\,\mathrm{sen}\varepsilon}{(1 + R - RP) - (1 + R - P)\cos\varepsilon} \qquad (3.2.5)$$

dove $\varepsilon=\delta-\delta_{max}=4\pi d(\nu-\nu_c)/c=4\pi d\Delta\nu/c$. Nella figura 3.2.2 è graficato lo sfasamento φ_r in funzione della differenza di frequenza $\Delta\nu=\varepsilon\Delta\nu_{fsr}/2\pi$, calcolato per i valori dei parametri della cavità costruita in laboratorio. Si vede che lo sfasamento dipende linearmente dalla differenza di frequenza $\Delta\nu$ in vicinanza del punto di massima risonanza, per il quale $\nu=\nu_c$. Il sistema di Pound e Drever realizza l'aggancio fra cavità e laser mantenendo la cavità vicino alle condizioni di massima trasmissione. Considerando le figure 3.1.6 e 3.2.2 facile convincersi che per $\varepsilon <<1$, cioè $\nu_L \approx \nu_c$, le componenti del segnale di pulsazione $\omega_L \pm \omega_m$ vengono riflesse dal F.P. con fasi $\pm\varphi_m$ e senza subire diminuzione di intensità. Per la componente portante, si ha

$$h_r(\omega_L) \approx h_r(0) = -\frac{P\sqrt{R}}{1-R} = -\frac{P\ F}{\pi} = -0.78 \tag{3.2.6}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_r \approx \varphi_r \approx -\frac{(1-R-P)\,\varepsilon}{(1-R)P} \approx -\frac{T\ F\ \varepsilon}{\pi\,P} \equiv k\ \Delta\nu = -6\ 10^{-6}\,\Delta\nu\,(Hz) \tag{3.2.7}$$

Scriviamo ora il campo elettrico della luce riflessa dal F.P. in corrispondenza della se zione C, in vicinanza delle condizioni di risonanza:

$$E_C(t) = E_0\left(1-\gamma\right)\sqrt{\gamma}\ e^{i\omega_L t}[J_0(\beta)\ h_r(0)\,e^{i\varphi_r} + i\,2\,J_1(\beta)\,\mathrm{sen}(\omega_m t + \varphi_m)] \tag{3.2.8}$$

Dove si è indicato con $\gamma \approx 3.5\%$ la riflettività di ciascuna faccia del beam-splitter. Il se gnale in tensione generato dal fotodiodo è proporzionale a $|E_C|^2$.

$$\begin{aligned} |E_C|^2 = E_0^2(1-\gamma)^2\ \gamma[J_0^2(\beta)\ H_r(0) + 4J_1^2(\beta)\,\mathrm{sen}^2(\omega_m t + \varphi_m) + \\ -\,i2J_0(\beta)J_1(\beta)\ h_r(0)\ \mathrm{sen}(\omega_m t + \varphi_m)\ (e^{i\varphi_r} - e^{-i\varphi_r})] \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Tenendo conto che il circuito del fotodiodo si comporta come un filtro passa alto che taglia la componente continua del segnale prima di entrare nel mixer, il segnale in ten sione dal fotodiodo è

$$\begin{aligned} V_{FD}(t) = I_0(1-\gamma)^2\ \gamma\ [2J_1^2(\beta)\ \alpha(2\omega_m)\,\mathrm{sen}(2\omega_m t + 2\varphi_m) + \\ +\,4J_0(\beta)J_1(\beta)\alpha(\omega_m)\,h_r(0)\ \mathrm{sen}(\omega_m t + \varphi_m)\ \mathrm{sen}\varphi_r] \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

dove I_0 è l'intensità del fascio laser nel punto B e $\alpha(\omega)$ è l'efficienza del sistema di riv elazione espressa in Volt/Watt (a ν_m=717.7 kHz $\alpha=\alpha_r \approx 1.95\ 10^4$ V/W) (paragrafo 2. 3). L'uscita V_M del mixer è il prodotto della tensione di ingresso con un segnale di rif erimento a frequenza ν_m (opportunamente sfasato di una quantità ϑ dallo sfasatore SF):

$$V_M(t) = \chi\ V_{FD}(t)\ \mathrm{sen}(\omega_m t + \vartheta) \tag{3.2.11}$$

dove χ ($\approx$0.5) è l'efficienza del mixer. Nel segnale che esce dal mixer sono allora prese nti, oltre ad una tensione continua, componenti alla frequenza di modulazione ν_m e dell e sue prime armoniche. All'uscita del filtro passa basso FB si trova la sola componente continua:

$$V_{FB} = 2 I_0 (1-\gamma)^2 \gamma\ h_r(0)\ \chi\ \alpha_r\ J_0(\beta)\ J_1(\beta)\ \mathrm{sen}\,\varphi_r \tag{3.2.12}$$

dove si è posto $\vartheta=\varphi_m$ per rendere massimo il segnale. Vicino alla risonanza si ha $\varphi_r \approx 0$, quindi

$$\begin{aligned} V_{FB} &\approx 2 I_0 (1-\gamma)^2 \gamma\ h_r(0)\ \chi\ \alpha_r\ J_0(\beta)\ J_1(\beta)\ \varphi_r \\ &\approx 2 I_0 (1-\gamma)^2 \gamma\ h_r(0)\chi\ \alpha_r\ J_0(\beta)\ J_1(\beta)\ k\ (\nu_c - \nu_L) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Questo segnale, proporzionale alla differenza $\nu_L - \nu_c$, costituisce un segnale di errore che può essere utilizzato per il controllo della frequenza del laser. La sua pendenza D $_0$, misurata in Volt/Hertz, costituisce un parametro importante del circuito di agganci o. La pendenza calcolata dalla (3.2.13) per I_0=41 mW e β=1.1 è D_0= 4.1 10^{-5} V/Hz i n ottimo accordo con il valore misurato dal segnale d'errore mostrato in figura 3.2.3.

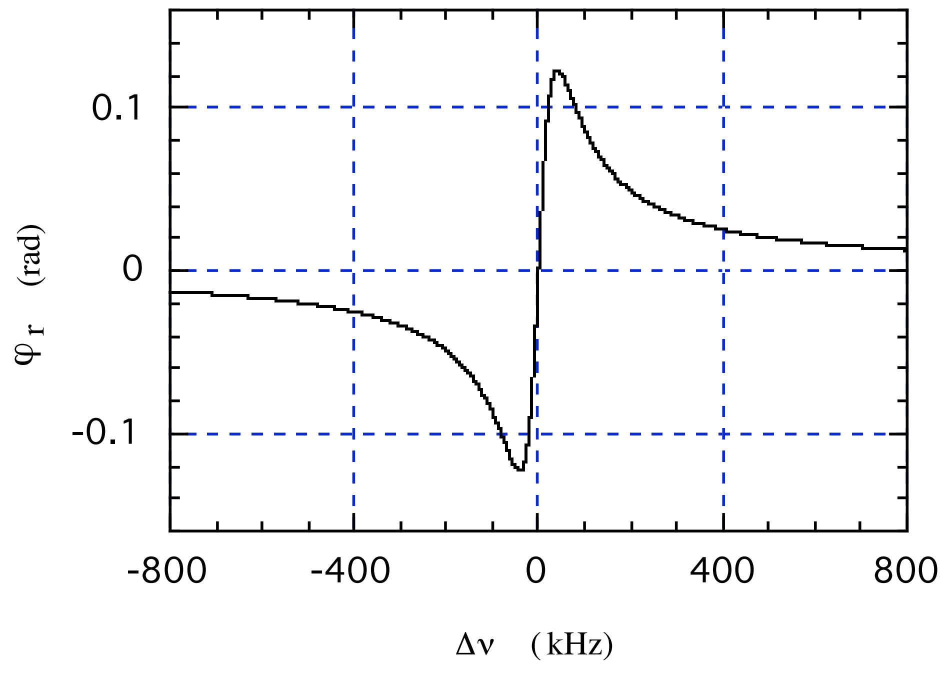


Figura 3.2.2: Grafico dello sfasamento del campo elettrico riflesso da una cavità F.P. in funzi one della differenza di frequenza (equazione (3.2.5)). I valori dei parametri R, P e $\Delta\nu_{fsr}$ corris pondono a quelli della cavità realizzata in laboratorio.

Figura 3.2.3: Andamento del segnale d'errore in funzione della differenza di frequenza tra las er e cavità, osservato con l'oscilloscopio all'uscita del filtro FB. I_0=41 mW, β=1.1. Velocità d i rampa 350 MHz/s. La scala orizzontale è 1 ms/divisione. La scala verticale è 1 V/divisione. La pendenza misurata è $D_0 \approx 4.1\ 10^{-5}$ V/Hz.

3.2.2 Modulazione di fase

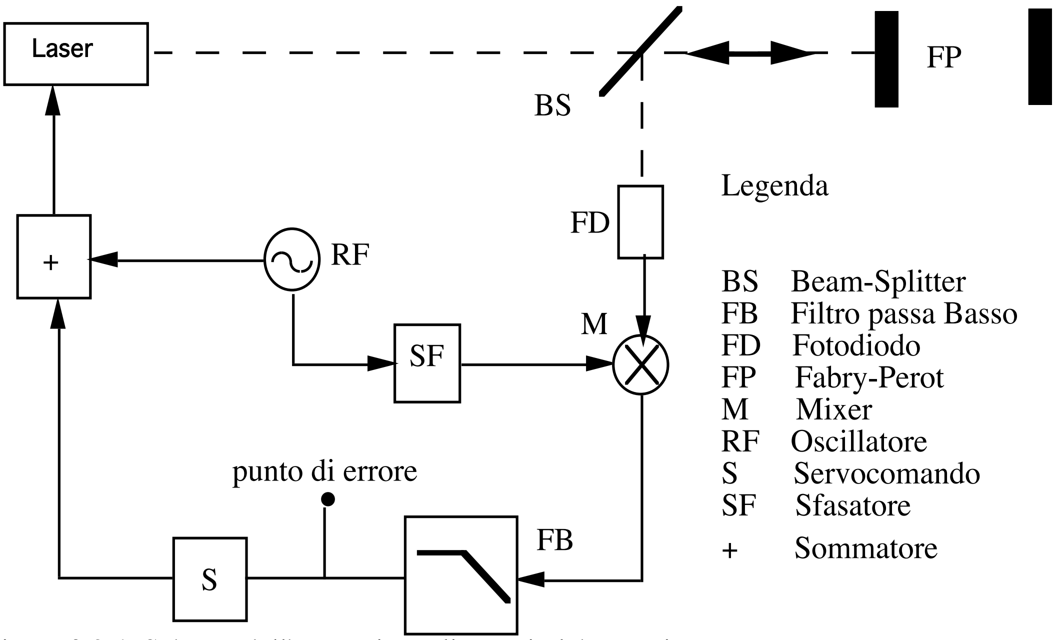


Figura 3.2.4: Schema dell'aggancio realizzato in laboratorio.

Per quanto riguarda la frequenza di modulazione sarebbe conveniente utilizzare un va lore di ν_m abbastanza alto tale che il rumore in ampiezza del laser, il cui spettro di pot enza ha un andamento del tipo 1/f, sia, alla frequenza ν_m, sufficientemente basso e vi cino al limite del rumore shot. In questo modo sarebbe minimo il rumore nel segnale di correzione legato alle fluttuazioni di intensità della luce. Tipicamente, il valore di

ν_m usato nei sistemi di aggancio che fanno uso di laser Nd:YAG con potenza delle de cine di milliWatt è dell'ordine di $\nu_m \approx 10$ Mhz o più alto (Pound 1983). Per modulare l a fase il sistema di Pound e Drever utilizza una cella di Pockels (figura 3.2.1). Così c onfigurato il sistema presenta però due grossi inconvenienti: l'uso di frequenze così al te comporta notevoli problemi riguardo alla componentistica del circuito di amplifica zione. Ad esempio, l'amplificazione x10 all'uscita del fotodiodo richiederebbe, per ν_m =10 MHz, un amplificatore operazionale con un prodotto banda-guadagno di 100 M Hz. In più, le celle di Pockels, se non perfettamente allineate, introducono, oltre alla modulazione di fase, una modulazione di ampiezza residua (RAM). In laboratorio si è osservato che l'allineamento di una cella di Pockels presenta una rapida deriva term ica che porta in pochi minuti la modulazione di ampiezza residua a valori più alti di -80 dB. Nel corso del presente lavoro di tesi si è studiato e messo a punto un diverso s istema di modulazione della fase della luce laser, che fa uso direttamente dell'attuator e piezoelettrico del laser per generare le bande laterali. Si è cioè sommato al segnale di correzione della frequenza applicato all'attuatore piezoelettrico del laser un segnale a frequenza ν_m. In queste condizioni la pulsazione della luce del laser può essere scri tta come

$$\omega(t) = \omega_L + B \cos \omega_m t \tag{3.2.14}$$

Poichè la fase dell'onda elettromagnetica è definita come

$$\Phi(t) = \int \omega(t)\, dt \tag{3.2.15}$$

si ottiene

$$\Phi(t) = \omega_L t + \beta \,\mathrm{sen}\,\omega_m t \tag{3.2.16}$$

dove $\beta = B/\omega_m$ rappresenta l'indice di modulazione definito sopra. Quindi il campo el ettrico della luce laser è

$$E(t) = E_0\, e^{i(\omega_L t + \beta \,\mathrm{sen}\,\omega_m t)} \tag{3.2.17}$$

che è identica al equazione (3.2.3). In altre parole una modulazione della frequenza d el laser si traduce in una modulazione della fase, con effetto identico a quello ottenut o con una cella di Pockels esterna. Lo schema del circuito di aggancio utilizzato risult a allora come da figura 3.2.4. Tale schema di modulazione è stato realizzato per la pri ma volta durante lo svolgimento del presente lavoro di tesi.

Venendo alla scelta della frequenza di modulazione, essa è limitata dalla condizione espressa dalla Eq.(3.2.1). Al di sopra di 100 kHz l'attuatore piezoelettrico del laser non è lineare, ma può ancora essere usato per la modulazione di fase ad una frequenza fissa che non coincida con una delle risonanze del cristallo piezoelettrico. In figura 3.2.5 è riportata la misura sperimentale della RAM indotta dalla modulazione di fase del piezoelettrico del laser in funzione della frequenza di modulazione. Si vede che la modulazione di ampiezza residua ha dei minimi locali in corrispondenza di alcune frequenze. Il criterio usato per la scelta della frequenza di modulazione è stato quello di avere minima RAM per un dato indice di modulazione $\beta=B/\omega_m$. Nella tabella 3.2.1 sono riportati i valori di β e della RAM misurati a diverse frequenze. Le frequenze segnate con un asterisco corrispondono a dei minimi locali. Si è scelta la frequenza di modulazione ν_m=717.7 kHz. Per questo valore il rapporto RAM/β risulta molto piccolo ($<4\cdot10^{-5}$), e costante in funzione di β. In diversi mesi di operazione non si è osservata nessuna variazione nel comportamento del cristallo piezoelettrico per quanto riguarda le posizioni in frequenza dei minimi e il valore dei rapporti RAM/β.

Figura 3.2.5: Modulazione di ampiezza residua (RAM) al variare della frequenza di modulazione di fase per una tensione sul piezoelettrico del laser di ampiezza 50 mV.

$\omega_m/2\pi$ (kHz)	V_{pp}/β (mV)	RAM/V_{pp} (mV^{-1})	RAM/β
537.6*	109	$3.0 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$
600	161	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$

630	61	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$
717.7*	62	$6.0 \cdot 10^{-7}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$
870	79	$5.4 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-4}$

Tabella 3.2.1: RAM e β al variare della frequenza e della tensione applicata al trasduttore piezoelettrico del laser. Gli asterischi indicano i minimi locali della RAM.

3.3 STUDIO DEL CIRCUITO DI RETROAZIONE

Nel paragrafo precedente si è dimostrato che la tensione V_{FB}, proporzionale alla differenza tra la frequenza del laser ν_L e quella della cavità ν_c (equazione (3.2.13)), può essere usata come segnale di controllo della frequenza del laser. In questo paragrafo si presentano i risultati di uno studio del circuito di retroazione che mantiene il valore della frequenza del laser coincidente con quello di risonanza della cavità. Il problema dell'agganciamento in frequenza può essere trattato come un problema della teoria del controllo dei sistemi lineari. In figura 3.3.1 è rappresentato uno schema di principio del sistema di aggancio.

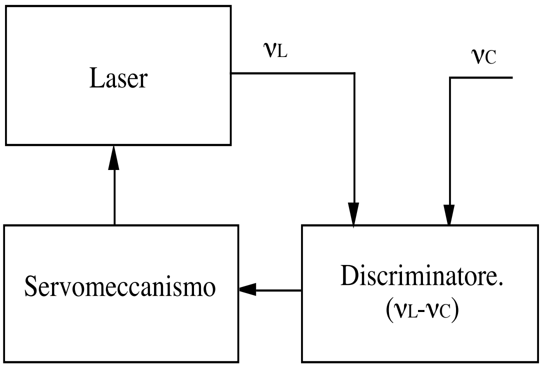


Figura 3.3.1: Schema logico dell'aggancio in frequenza fra laser e cavità.

L'asservimento del laser alla cavità F.P. si ottiene rendendo minima la quantità

$$|\nu_L - \nu_c|$$

Il segnale d'errore, la cui espressione si è ricavata sopra, viene prima amplificato e integrato e poi mandato agli attuatori del laser in modo da correggerne la frequenza fino a farla coincidere con quella della cavità. In corrispondenza di tale condizione il segnale d'errore si annulla e con esso la correzione portata alla frequenza del laser.

3.3.1 Generalità

Secondo la teoria del controllo dei sistemi lineari, il circuito di retroazione (figura 3.2 .4) può essere schematizzato, per ciascuna componente di Fourier della fluttuazione d ella frequenza del laser, come in figura 3.3.2.

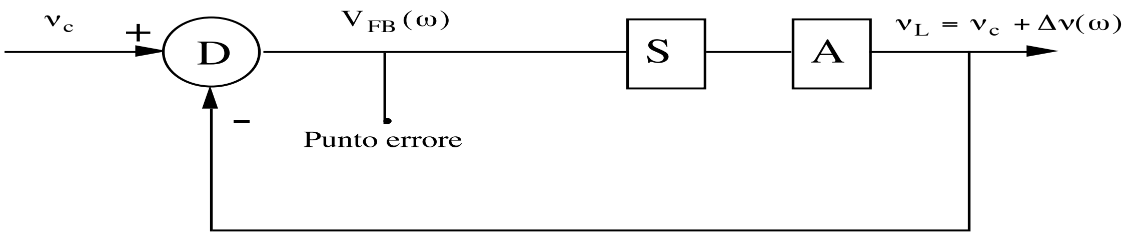


Figura 3.3.2: Schema del circuito di controllo. $\Delta\nu(\omega)$ rappresenta l'ampiezza della component e di Fourier della fluttuazione della frequenza del laser alla frequenza $f=\omega/2\pi$.

In essa D rappresenta il circuito discriminatore (beam splitter+cavità+fotodiodo+ mix er+filtro passa basso) che genera il segnale d'errore. S è il servocomando (circuito ele ttronico di amplificazione e integrazione). A è l'insieme del laser e degli attuatori piez oelettrico e termico. Esso trasforma le differenze di tensione in differenze di frequenz a, con coefficienti misurati in Hertz/Volt. Ciascun blocco è caratterizzato dal rapport o fra il segnale d'uscita e quello di ingresso. Tali rapporti, considerati come funzioni della generica pulsazione $\omega=2\pi f$, rappresentano le funzioni di trasferimento di ciascu n blocco. Nel seguito esse saranno indicate con $D(\omega)$, $S(\omega)$ e $A(\omega)$. Si può calcolare l a funzione di trasferimento complessiva a circuito aperto $G_{loop}(\omega)$ (Bower 1958) apre ndo il circuito di aggancio in un punto P ponendo $\nu_c=0$ (figura 3.3.3). Essa si può scri vere come

$$G_{loop} = \frac{X_1}{X_0} \times \frac{X_2}{X_1} \times \frac{X_3}{X_2} = -D(\omega)\cdot S(\omega)\cdot A(\omega) \qquad (3.3.1)$$

dove X_0 rappresenta un segnale di entrata alla frequenza f, e X_3 quello di uscita. Il G_{loop} è cioè il prodotto delle funzioni di trasferimento degli elementi del circuito di retr oazione.

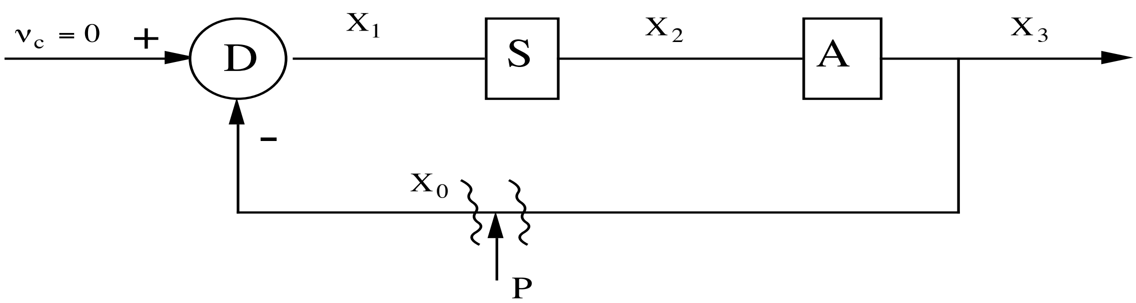


Figura 3.3.3: Schema del circuito di controllo. Il circuito viene idealmente aperto nel punto P per calcolare la funzione G_{loop}.

La funzione di trasferimento a circuito chiuso (figura 3.3.2) è

$$\frac{\nu_L}{\nu_c} = \frac{\nu_c + \Delta\nu(\omega)}{\nu_c} = \frac{G_{loop}(\omega)}{G_{loop}(\omega) - 1} \qquad (3.3.2)$$

Come si vede, per tutti i valori di ω per i quali G_{loop} è grande, cioè per tutti i valori di ω per i quali si hanno alti guadagni a circuito aperto, si ottiene $\nu_c \approx \nu_L$. In questa cond izione infatti è piccola la differenza $\nu_L - \nu_c$, come si può vedere anche dall'espressione di V_{FB}:

$$\frac{V_{FB}(\omega)}{D(\omega)} = \Delta\nu(\omega) = \frac{\nu_c}{G_{loop}(\omega) - 1} \qquad (3.3.3)$$

Una caratteristica fondamentale del circuito di agganciamento è la sua stabilità a circ uito chiuso. Per i sistemi di controllo in cui G_{loop} non ha poli o zeri nel semipiano alla destra dell'asse immaginario delle frequenze (escluso l'asse immaginario stesso), la s tabilità è garantita quando in corrispondenza della frequenza per la quale si ha guada gno unitario, cioè $|G_{loop}|=1$, la fase della funzione di trasferimento a circuito aperto è maggiore di 180° (Bower 1958).

3.3.2 Funzione di trasferimento a circuito aperto (G_{loop})

Deriviamo ora la funzione di trasferimento del circuito di agganciamento e mostriam o che essa soddisfa alle condizioni di stabilità richieste. Per ottenerla è sufficiente def inire le funzioni di trasferimento di ciascuno degli elementi che lo compongono (equa zione (3.3.1)).

- Attuatori e laser (blocco A)

Come si è visto nel paragrafo 2.1, il laser ha due sistemi indipendenti di controllo della frequenza della luce. Il sistema di controllo che utilizza l'attuatore piezoelettrico ha una risposta lineare fino a una frequenza di 100 kHz. Secondo le specifiche della casa costruttrice, l'attuatore piezoelettrico può esser schematizzato come un circuito RC avente frequenza di taglio f_p=100 kHz, cioè costante di tempo $\tau_p=1/2\pi f_p$. La funzione di trasferimento di tale attuatore è allora

$$A_p(\omega) = \frac{K_p}{1 + i\omega\tau_p} \tag{3.3.4}$$

Il sistema che usa come attuatore il termistore ha risposta lineare fino alla frequenza di 1 Hz. Al di sopra di 1 Hz la risposta del termistore segue un andamento che non è specificato nelle caratteristiche fornite dalla casa costruttrice, ma che è certamente del tipo $(1/f)^n$. Nel seguito ipotizzeremo che anche questo attuatore si comporti come un circuito elettronico RC avente frequenza di taglio f_t=1 Hz, cioè costante di tempo $\tau_t= 1/2\pi f_t$. Quindi scriveremo la funzione di trasferimento di tale attuatore come

$$A_t(\omega) = \frac{K_t}{1 + i\omega\tau_t} \tag{3.3.5}$$

Al di sopra di f=100 kHz il cristallo Nd:YAG presenta una serie di risonanze meccaniche che impongono di fissare questo come limite superiore alla banda passante del circuito di agganciamento.

- Discriminatore D

Il sistema di discriminazione è costituito dal beam-splitter, dalla cavità, dal fotodiodo con il suo circuito di amplificazione (che comprende il filtro passa alto) (paragrafo 2.3), dal mixer e dal filtro passa basso. Lo schema di principio del circuito usato in laboratorio è mostrato nella figura 3.2.4. La funzione di trasferimento complessiva del discriminatore è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli elementi che lo compongono. Il discriminatore converte la differenza in frequenza tra ν_L e ν_C in una tensione (segnale d'errore); esso è allora un convertitore frequenza-tensione caratterizzato da un coefficiente $D(\omega)$ misurato in Volt/Hertz. Per quanto riguarda il circuito del fotodiodo, l'informazione a cui si è interessati corrisponde all'ampiezza della componente a frequenza ω_m dell'intensità luminosa. La funzione di trasferimento di questo elemento del circuito di aggancio è dunque una costante (paragrafo 2.3). Il mixer ha una risposta in frequenza costante fino alla frequenza di 500 MHz. Il filtro passa basso posto all'uscita del mixer ha una frequenza di taglio di 150 kHz, cioè costante di tempo $\tau_{FB}=1/2\pi f_{FB}$. La sua funzione di trasferimento è

$$D_{FB}(\omega) = \frac{1}{1 + i\,\omega\,\tau_{FB}}$$

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento della cavità, consideriamo, nell'espre ssione del campo elettrico del laser alla sezione A (figura 3.2.1), la generica compone nte di rumore a frequenza $\omega=2\pi f$:

$$E_A(t) = E_0\; e^{i(\omega_L t + \xi\,\mathrm{sen}\,\omega t)} \tag{3.3.6}$$

La pulsazione istantanea del luce è definita come la derivata della sua fase $\Omega(t)=\omega_L t+ \xi \mathrm{sen}\omega t$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_L + \xi\omega\,\cos\omega t \tag{3.3.7}$$

Supponendo la cavità agganciata, e dunque $\omega_L=\omega_c$, l'espressione (3.3.7) rappresenta una perturbazione sinusoidale della frequenza di ampiezza $\xi\omega/2\pi$. La risposta in tensi one del discriminatore a questa perturbazione è la sua funzione di trasferimento.
Il campo elettrico alla sezione B è dato da

$$E_B(t) = E_0\; e^{i(\omega_c t + \xi\,\mathrm{sen}\,\omega t + \beta\,\mathrm{sen}\,\omega_m t)} \tag{3.3.8}$$

Usando le funzioni di Bessel nell'ipotesi $\xi<<1$ ($J_0(\xi)\approx 1$ e $J_1(\xi)\approx\xi/2$) si ottiene

$$\begin{aligned} E_B(t) &\approx E_0\, e^{i\omega_c t}[J_0(\beta) + 2\,i\,J_1(\beta)\,\mathrm{sen}\omega_m t] \times [1 + i\,\xi\,\mathrm{sen}\omega\,t] \\ &\approx E_0\, e^{i\omega_c t}[J_0(\beta) + 2\,i\,J_1(\beta)\,\mathrm{sen}\omega_m t + J_0(\beta)\frac{\xi}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + \\ &\quad - 2\,J_1(\beta)\,\xi\,\mathrm{sen}\omega_m t\;\mathrm{sen}\omega t] \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Scriviamo ora il campo elettrico della luce riflessa dal F.P. in corrispondenza alla sez ione C:

$$\begin{aligned} E_C(t) \approx E_0(1-\gamma)\sqrt{\gamma}\;\; e^{i\omega_c t}\Big\{ & h_r(0)\,J_0(\beta) + 2\,i\;J_1(\beta)\mathrm{sen}\omega_m t + \\ & J_0(\beta)\;\frac{\xi}{2}\;[h_r(\omega)\;e^{i\omega t} - h_r^*(\omega)\;e^{-i\omega t}] \\ & - 2\;J_1(\beta)\;\xi\;\mathrm{sen}\omega_m t\;\;\mathrm{sen}\omega t \Big\} \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Nello scrivere questa equazione si è approssimata a zero la fase delle componenti a ω_m e $\omega_m\pm\omega$. Si è posto anche $h_r(\omega_m)=h_r(\omega_m\pm\omega)=1$. Ciò è giustificato se $\omega \ll \omega_m - 2\pi\Delta\nu_p$. Il segnale in tensione V_{FD} generato dal fotodiodo è proporzionale a $|E_C|^2$. In es so sono presenti termini alle frequenze 0, $2\nu_m$, 2f, $2\nu_m\pm 2f$, ν_m, f, $\nu_m\pm f$, $2\nu_m\pm f$ e $\nu_m\pm 2$

f. L'ampiezza del termine a frequenza $\nu_m \pm 2f$ è nullo. Dei termini rimanenti il cicuito di discriminazione seleziona i soli termini alle frequenze ν_m e $\nu_m \pm f$. All'uscita del filt ro passa basso si ha allora il segnale:

$$V_{FB}(t) = -I_0\,(1-\gamma)^2\,\gamma\,\alpha_r\,\chi\,\xi\,J_0(\beta)\,J_1(\beta)\,D_{FB}(\omega)\times$$
$$\left\{i\,[h_r(\omega)e^{i\omega t} - h_r^*(\omega)\,e^{-i\omega t}] + 2\,J_0(\beta)J_1(\beta)\,h_r(0)\,\mathrm{sen}\,\omega t\right\} \quad (3.3.11)$$

dove si è assunto $\alpha(\omega_m \pm \omega) = \alpha(\omega_m) = \alpha_r$. L'equazione (3.3.11) può essere riscritta nella forma

$$V_{FB}(t) = -I_0\,(1-\gamma)^2\,\gamma\,\chi\,\alpha_r\,J_0(\beta)\,J_1(\beta)\,\xi\,D_{FB}(\omega)\times$$
$$\left\{i\,|h_r(\omega)|[e^{i(\omega t+\varphi)} - e^{-i(\omega t+\varphi)}] + 2\,J_0(\beta)J_1(\beta)\,h_r(0)\,\mathrm{sen}\omega t\right\} \quad (3.3.12)$$

dove φ rappresenta la fase di h_r. Sviluppando gli esponenziali complessi

$$V_{FB}(t) = 2\,I_0\,(1-\gamma)^2\,\gamma\,\chi\,\alpha_r\,J_0(\beta)\,J_1(\beta)\,\xi\,D_{FB}(\omega)\times$$
$$\left\{\left[|h_r(\omega)|\cos\varphi - h_r(0)\right]\mathrm{sen}\omega t + |h_r(\omega)|\,\mathrm{sen}\varphi\,\cos\omega t\right\} \quad (3.3.13)$$

La funzione di trasferimento del discriminatore si ottiene prendendo l'ampiezza della (3.3.13) e dividendola per l'ampiezza $\xi\omega/2\pi$ della perturbazione:

$$D(\omega) = 4\pi\,I_0\,(1-\gamma)^2\gamma\,\chi\,\alpha_r\,J_0(\beta)\,J_1(\beta)\,D_{FB}(\omega)\times$$
$$\sqrt{\frac{\left[|h_r(\omega)|\cos\varphi - h_r(0)\right]^2 + |h_r(\omega)|^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\omega^2}} \quad (3.3.14)$$

La fase dell'espressione sotto radice è

$$\Phi_D(\omega) = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Re}[h_r(\omega) - h_r(0)]}{\mathrm{Im}[h_r(\omega)]} \quad (3.3.15)$$

Nel limite $\omega=0$, il primo termine sotto radice nella (3.3.14) va a zero. Il secondo term ine dà invece

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{|h_r(\omega)| \,\mathrm{sen}\varphi}{\omega} = \frac{h_r(0)\,k}{2\pi} \tag{3.3.16}$$

Si ritrova così l'espressione statica del segnale d'errore (3.2.13). In figura 3.3.4 è most rato l'andamento della funzione

$$\frac{D(\omega)}{D_0 \cdot D_{FB}(\omega)} = \frac{2\pi}{k\,h_r(0)} \sqrt{\frac{\left[|h_r(\omega)| \cos\varphi - h_r(0)\right]^2 + |h_r(\omega)|^2 \,\mathrm{sen}^2\varphi}{\omega^2}} \tag{3.3.17}$$

La fase (3.3.15) è graficata in figura 3.3.5.

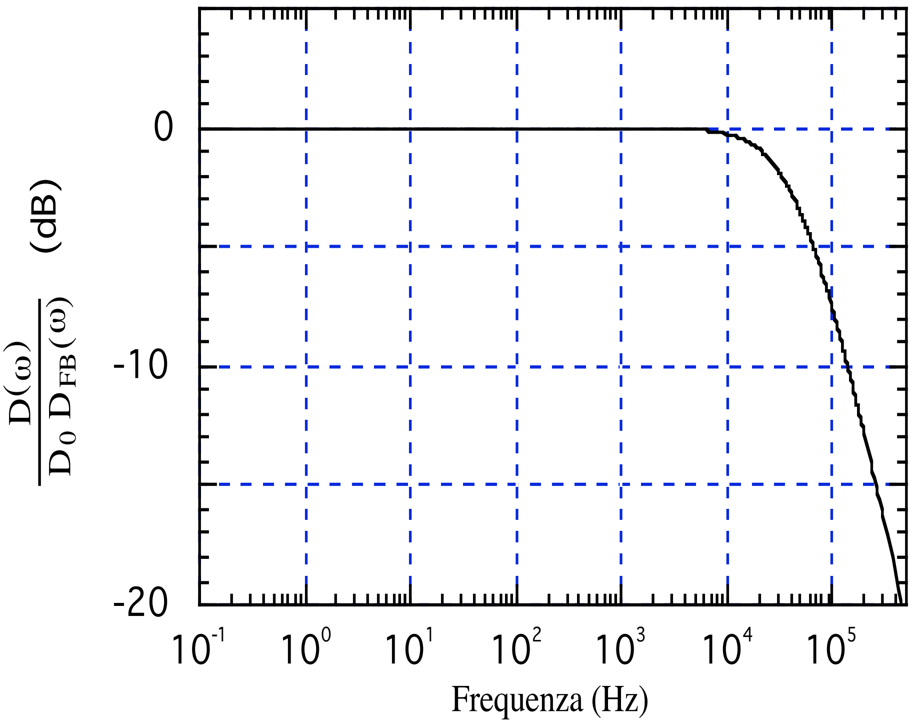


Figura 3.3.4: Risposta in frequenza della cavità.

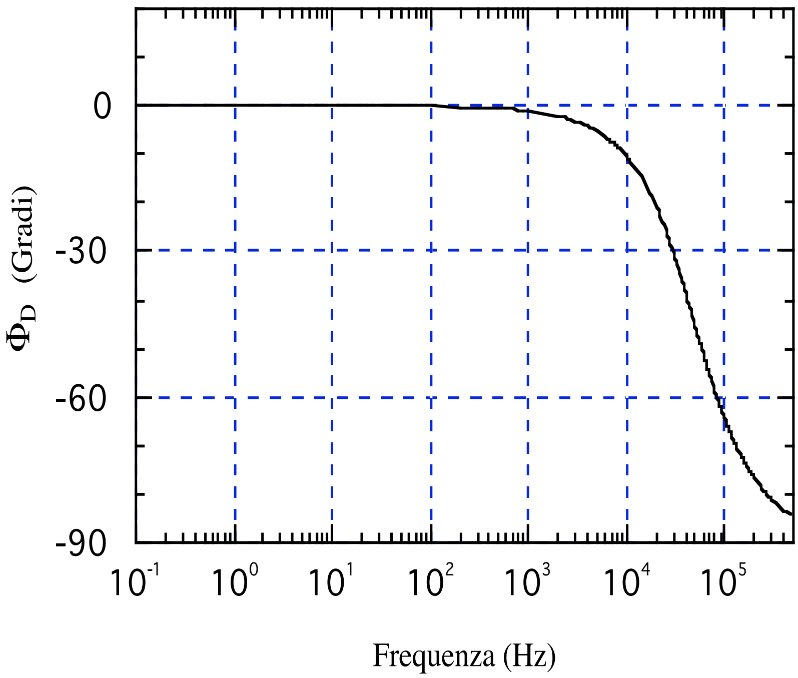


Figura 3.3.5: Fase della funzione di trasferimento della cavità.

-Servocomando S

Il servo amplifica e integra il segnale d'errore e pilota gli attuatori del laser. Nel diseg no di figura 3.3.6 è riportato uno schema a blocchi del circuito realizzato in laboratori o. Il segnale proveniente dal discriminatore viene amplificato e integrato e quindi, att raverso due diversi stadi di integrazione, applicato agli attuatori piezoelettrico e termi co del laser. L'uso di entrambi i sistemi di controllo è necessario a causa del limitato *r ange* dinamico dell'attuatore piezoelettrico. Quello che limita la durata dell'aggancio è, quindi, la saturazione del termistore. Con il circuito realizzato in laboratorio si è ott enuto che laser e cavità rimanessero agganciati per diverse ore. In tutti i casi l'agganci o è stato interrotto volontariamente. D'ora in poi chiameremo FAST il circuito di agg ancio che si chiude sul piezoelettrico e SLOW quello che si chiude sul termistore. Es si sono due circuiti che agiscono parallelamente sulla stessa grandezza, quindi il G_{loo} $_{p}$ del circuito di aggancio è dato dalla somma vettoriale delle funzioni di trasferiment o a circuito aperto del circuito FAST e del circuito SLOW, che indichiamo con G_F e G_S. La figura 3.3.7 è lo schema elettrico del circuito del servo.

Lo stadio di amplificazione G_a ha come funzione di trasferimento una costante

$$S_a(\omega) = \frac{r_1}{r_0}$$

I tre stadi di integrazione I_i hanno funzione di trasferimento

$$S_i(\omega) = \frac{r_{i1}}{r_{i0}} + \frac{1}{i\omega\, c_i\, r_{i0}}$$

L'ulteriore stadio di integrazione I_f del circuito FAST ha funzione di trasferimento

$$S_f(\omega) = \frac{r_{f1}}{r_{f0}} + \frac{r_{f2}}{r_{f0}} \frac{1}{(1 + i\omega\, c_f\, r_{f2})}$$

La resistenza r_{f2} ha la funzione di scaricare la tensione integrata all'ingresso dell'attua tore piezoelettrico, in modo da evitarne la saturazione. Ciò viene fatto con una costan te di tempo data da $r_{f2}\, c_f = 1$ s, corrispondente a una frequenza di taglio di 0.16 Hz. C ome si vedrà più avanti a questa frequenza le funzioni di trasferimento dei circuiti FA ST e SLOW si incrociano. La variazione della frequenza del laser dovuta alla scarica del segnale del FAST è allora compensata dal circuito SLOW.
Il sommatore serve a dare al piezoelettrico contemporaneamente il segnale di correzi one e la modulazione a frequenza $\nu_m = 717.7$ kHz che crea le bande laterali. Esso ha b anda passante di 5 MHz quindi la sua funzione di trasferimento è costante e unitaria.
La funzione di trasferimento dello stadio I_s è

$$S_s(\omega) = \frac{1}{i\omega\, c_s\, r_s}$$

La resistenza r_t fa da partitore con la resistenza di ingresso del termistore che è 10 kΩ (vedere tabella 2.1.1 del paragrafo 2.1). La sua funzione di trasferimento è allora

$$S_r(\omega) = \frac{10}{r_t\,(k\Omega)}$$

I valori dei componenti utilizzati sono riportati nella tabella 3.3.1. La funzione di tras ferimento del circuito FAST del servo è

$$S_F(\omega) = S_a(\omega) \cdot S_i'(\omega) \cdot S_i''(\omega) \cdot S_i'''(\omega) \cdot S_f(\omega) =$$

$$= \frac{r_1}{r_0} \left(\frac{r_{i1}'}{r_{i0}'} + \frac{1}{i\omega\, c_i'\, r_{i0}'} \right)^2 \left(\frac{r_{i1}'''}{r_{i0}'''} + \frac{1}{i\omega\, c_i'''\, r_{i0}'''} \right) \left(\frac{r_{f1}}{r_{f0}} + \frac{r_{f2}}{r_{f0}} \frac{1}{(1 + i\omega\, c_f\, r_{f2})} \right) \qquad (3.3.18)$$

mentre quella per l'uscita che si collega al termistore

$$S_S(\omega) = S_a(\omega) \cdot S_i'(\omega) \cdot S_i''(\omega) \cdot S_i'''(\omega) \cdot S_s(\omega) \cdot S_r =$$

$$= \frac{r_1}{r_0} \left(\frac{r_{i1}'}{r_{i0}'} + \frac{1}{i\omega\, c_i'\, r_{i0}'} \right)^2 \left(\frac{r_{i1}'''}{r_{i0}'''} + \frac{1}{i\omega\, c_i'''\, r_{i0}'''} \right) \left(\frac{1}{i\omega\, c_s r_s} \right) S_r \qquad (3.3.19)$$

G_a	r_0	333 Ω
	r_1	6.7 kΩ
I'_i e I''_i	r_0	4.7 kΩ
	r_1	4.7 kΩ
	c_i	5.6 nF
I_i'''	r_0	22 kΩ
	r_1	22 kΩ
	c_i	1.2 nF
I_f	r_{f0}	4.7 kΩ
	r_{f1}	5.6 Ω
	r_{f2}	1 MΩ
	c_f	1 μF
I_s	r_s	1 MΩ
	c_s	1 μF
	r_t	10 kΩ

Tabella 3.3.1: Valori degli elementi circuitali del servo.

3.3.3 Funzioni di trasferimento complessive FAST, SLOW e globale (G_{loop})

A questo punto possiamo scrivere la funzione di trasferimento ad anello aperto del cir cuito FAST, di quello SLOW e quella globale del circuito di aggancio che è la somm a vettoriale delle due funzioni precedenti.

La funzione di trasferimento $G_F(\omega)$ del circuito FAST è

$$G_F(\omega) = D(\omega) \cdot A_p(\omega) \cdot S_F(\omega)$$

mentre quella $G_S(\omega)$ del circuito SLOW è

$$G_S(\omega) = D(\omega) \cdot A_t(\omega) \cdot S_S(\omega)$$

Quella globale $G_{loop}(\omega)$ quindi risulta essere

$$G_{loop}(\omega) = G_F(\omega) + G_S(\omega)$$

Nel grafico di figura 3.3.8.sono riportate le funzioni di trasferimento G_F e G_S ad anell o aperto dei circuiti FAST e SLOW e quella globale G_{loop}, calcolate per una pendenz a del segnale d'errore D_0=2.8·10^{-5} V/Hz. Questo valore corrisponde ad un indice di m odulazione $\beta\approx0.55$. Nella figura 3.3.9 sono riportate le fasi di G_F e G_S. Per frequenze più alte di ≈ 1 Hz la funzione di trasferimento globale coincide con G_F. Le due funzio ni G_F e G_S non presentano poli e zeri nel semipiano alla destra dell'asse immaginario. Per la condizione di stabilità enunciata all'inizio del paragrafo il "loop" del circuito S LOW, preso da solo, non è stabile, mentre quello FAST lo è. In questo caso la stabilit à del circuito globale discende dal fatto che la funzione di trasferimento del circuito S LOW, nel punto di guadagno unitario, ha un valore molto più piccolo di quello della funzione di trasferimento globale del sistema G_{loop} (Bower 1958).

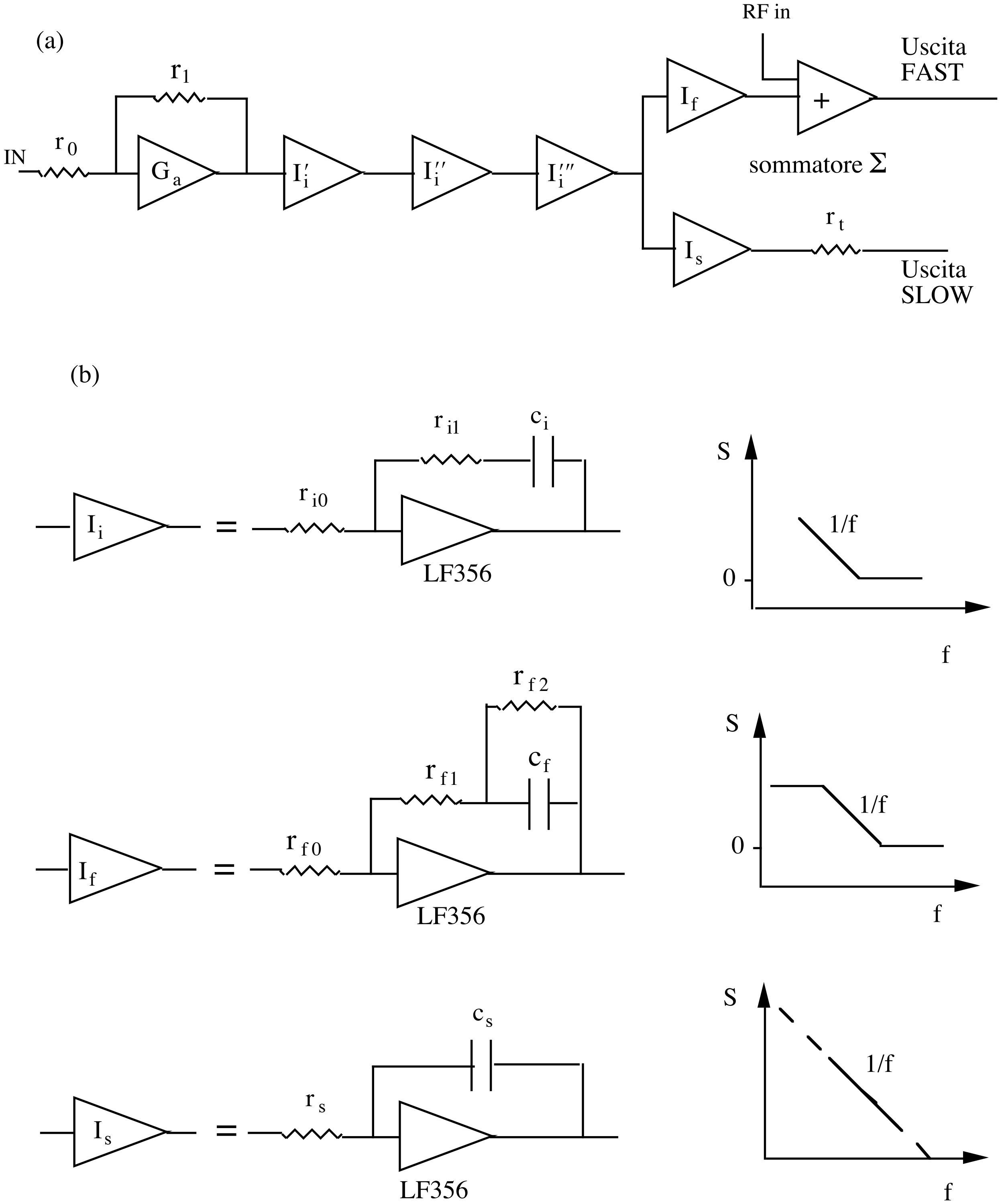


Figura 3.3.6: (a) Schema a blocchi del circuito di amplificazione (servo); (b) i singoli elemen ti del circuito con l'andamento schematico (in scala log-log) delle funzioni di trasferimento.

Figura 3.3.7: Schema elettrico del circuito servo.

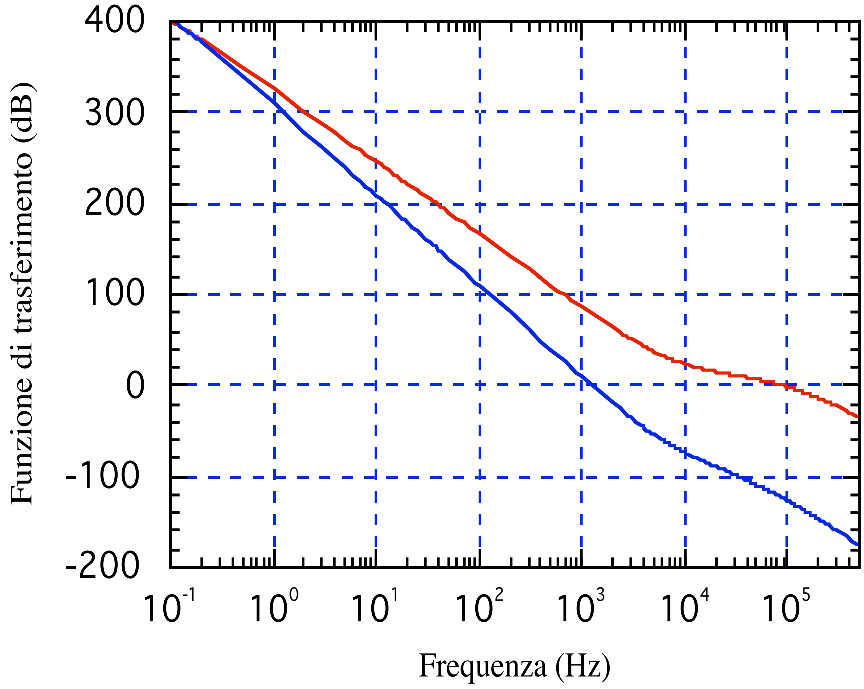


Figura 3.3.8: Funzioni di trasferimento dei circuiti FAST (in alto), SLOW (in basso) e global e per una pendenza del segnale d'errore $D_0 = 2.8 \cdot 10^{-5}$ V/Hz, corrispondente ad un indice di m odulazione $\beta \approx 0.55$. Il G_{loop} del circuito coincide con la curva superiore.

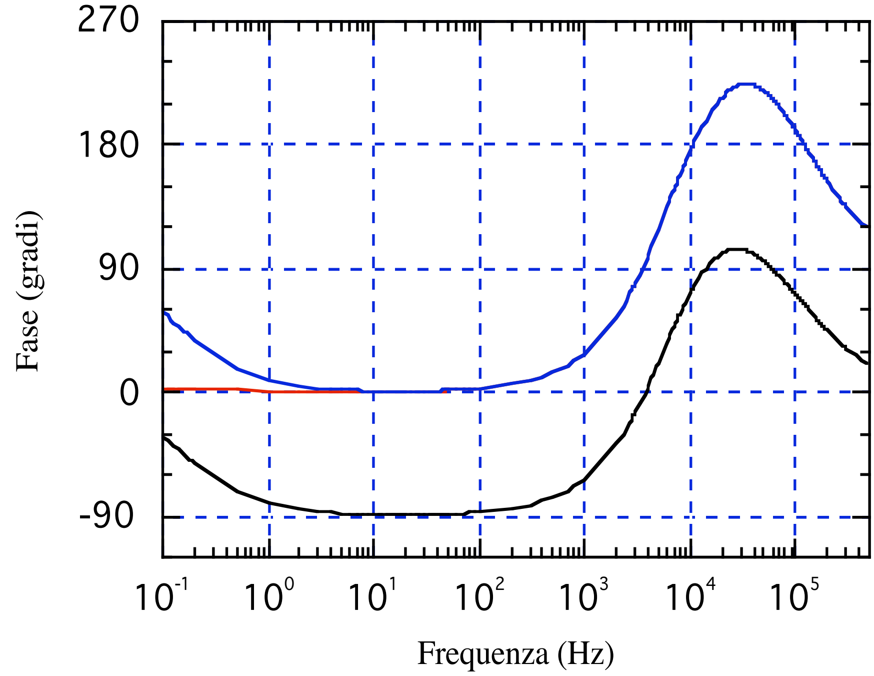


Figura 3.3.9: Fase delle funzioni di trasferimento dei circuiti FAST (in alto), SLOW (in bass o) e globale per una pendenza del segnale d'errore $D_0 = 2.8 \cdot 10^{-5}$ V/Hz, corrispondente ad un indice di modulazione $\beta \approx 0.55$. La fase globale è vicina allo zero per frequenze più basse di 100 Hz e coincide poi con la fase del circuito FAST.

3.4. DENSITÀ SPETTRALE DEL SEGNALE D'ERRORE

Nel paragrafo 3.2 si è visto che il segnale d'errore, per $|\nu_L - \nu_c| < \Delta\nu_p/2$, è direttamente p roporzionale alla differenza di frequenza tra laser e cavità (equazione (3.2.13)). La gr andezza

$$\frac{V_{FB}}{D_0} = \nu_c - \nu_L \tag{3.4.1}$$

è una differenza di frequenze; facendo riferimento al suo spettro di potenza si usa dar ne la misura su una banda di frequenze larga 1 Hz; i suoi valori quindi possono essere espressi in $\mathrm{Hz}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$. Si può quindi ottenere una misura della densità spettrale della differenza di frequenza tra lase e cavità dalla misura della densità spettrale di V_{FB}. N ella figura 3.4.1 è riportata la densità spettrale di $\Delta\nu$.

Figura 3.4.1: Densità spettrale della differenza di frequenza fra laser e cavità per D_0 = 2.8 V/Hz. I picchi sono dovuti alla alimentazione di rete.

CAPITOLO 4

ELLISSOMETRO ED EFFETTO FARADAY

4.1 CARATTERIZZAZIONE DEL FASCIO TRASMESSO

4.1.1 Misure di rumore

Nell'esperimento PVLAS il fascio di luce trasmesso dalla cavità F.P. è usato per misurare la birifrangenza magnetica del vuoto mediante la tecnica ellissometrica descritta nel paragrafo 1.2. L'effetto di birifrangenza è modulato ad una frequenza doppia di quella di rotazione del magnete ($2\nu_M \approx 2$ Hz). È quindi importante studiare il contenuto spettrale a basse frequenze del rumore del fascio trasmesso (si veda equazione (1.2.14)).

Il rumore in ampiezza è espresso dalla grandezza RIN (Relative Intensity Noise):

$$\mathrm{RIN} = \frac{V_{noise}(f)}{V_{dc}} \qquad 4.1.1$$

dove V_{noise} è la densità spettrale del rumore alla frequenza f misurata in $V/\sqrt{Hz}$ e V_{dc} è il valore della componente continua del segnale del fotodiodo.

In figura 4.1.1 è mostrato il grafico del rumore in ampiezza del laser libero. La curva in basso mostra lo spettro del rumore in ampiezza della luce emessa dal laser raccolta da un fotodiodo posto a distanza di 10 cm dalla sorgente. La curva in alto della stessa figura mostra invece lo spettro della luce raccolta dallo stesso fotodiodo posto a distanza di 3 m dal laser. L'aumento del rumore a basse frequenze è probabilmente legato alla turbolenza dell'aria.

La figura 4.1.2 mostra lo spettro del rumore della luce trasmessa dal F.P. agganciato. Come si vede il rumore in ampiezza risulta notevolmente aumentato. Ciò si può spiegare tenendo conto del fatto che per una cavità di finesse F=1800 il fascio luminoso percorre in aria una distanza di circa 1 km.

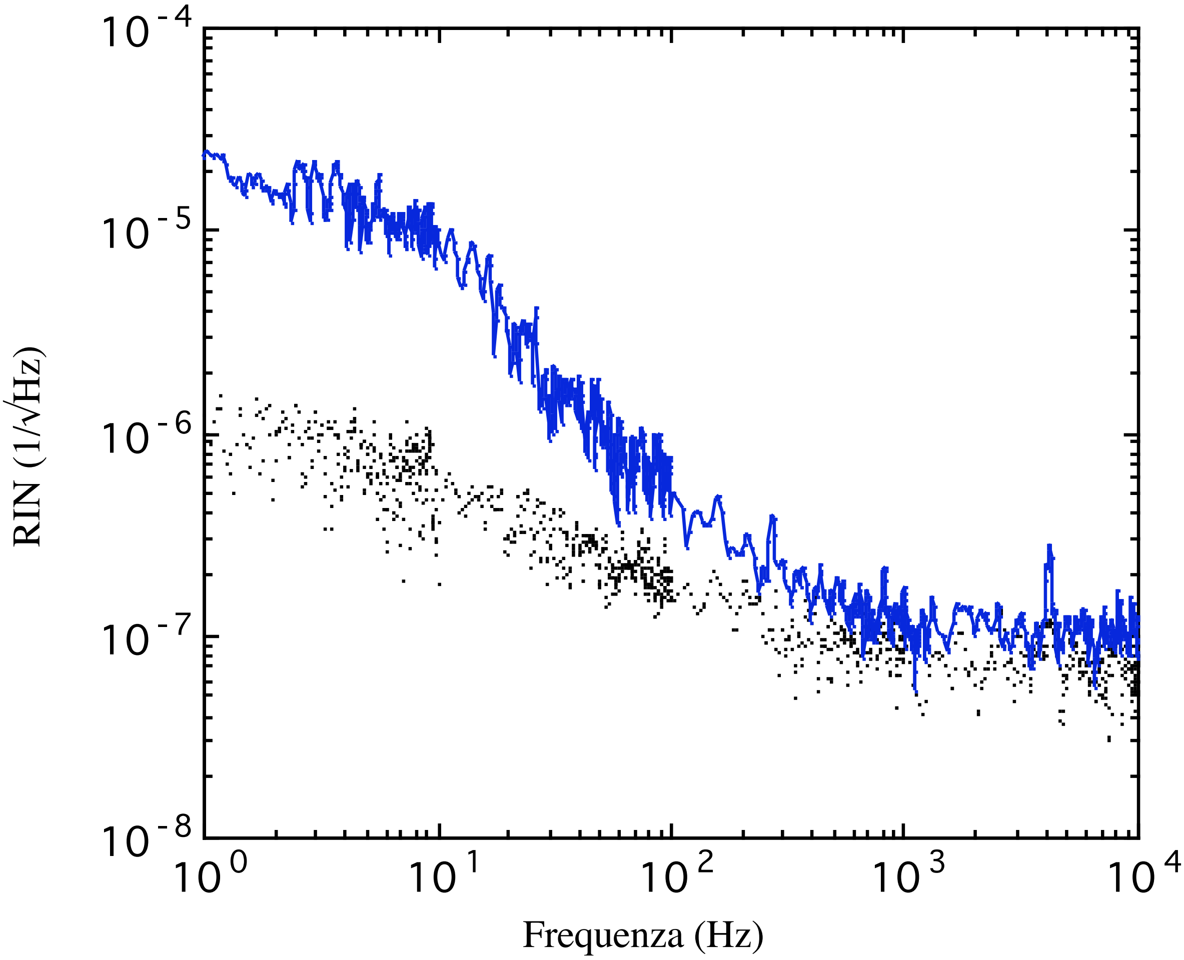


Figura 4.1.1: Rumore in ampiezza del laser libero a distanza 10 cm (in basso) e 3 m (in alto). La curva in alto corrisponde ad un'intensità del fascio luminoso di circa 1 mW, (240 mV), qu ella in basso ad un'intensità di circa 1.5 mW (350 mV).

Che il rumore sia legato alla turbolenza del mezzo attraversato dalla luce è ulteriorme nte provato dal fatto che per una cavità di finesse F=30000 montata in vuoto, in cui il fascio percorre una distanza ≈17 km, il rumore risulta più basso di un'ordine di grand ezza rispetto ai dati di figura 4.1.2 (Pino Ruoso 1993).

Figura 4.1.2: Rumore in ampiezza della luce trasmessa dalla cavità. L'intensità del fascio luminoso è circa 2 mW, corrispondente a 450 mV.

4.1.2 Misure di estinzione

Per le misure di estinzione sul fascio trasmesso dalla cavità si è usato l'apparato di figura 4.1.3. Come si è visto nel paragrafo 2.6 gli specchi dielettrici multistrato introducono un'ellitticità nella polarizzazione del fascio di luce che si propaga all'interno della cavità. Ciò può portare, per una data frequenza della luce, ad un doppio picco di trasmissione. Le due componenti corrispondono in questo caso ai due stati di polarizzazione lineare parallelo ed ortogonale agli assi di birifrangenza degli specchi della cavità. Tale fenomeno è stato osservato sperimentalmente per una cavità F.P. di finesse 300. Nella cavità studiata nel corso del presente lavoro di tesi non si è mai osservata una doppia riga in trasmissione e nemmeno l'asimmetria della funzione di Airy che potrebbe derivare dalla sovrapposizione di due picchi non risolti (si veda figura 2.4.7). Si è invece osservata, in certe condizioni, un'estinzione $\sigma^2 \approx 10^{-3}$, molto peggiore di quella ottenuta con i soli polarizzatori incrociati in assenza della cavità ($\sigma^2 \approx 10^{-7}$). Questo valore è stato interpretato come un'ellitticità legata alla birifrangenza degli specchi della cavità (strati riflettenti o substrato), giacchè ruotando gli specchi si riusciva a riportare l'estinzione ad un valore $\sigma^2 \approx 2 \cdot 10^{-7}$. Assumendo che il valore massimo di ellitticità osservato $\psi^2 \approx 10^{-3}$ sia interamente dovuto alla riflessione multipla sugli strati riflettenti degli specchi, si può stimare, usando la (2.6.2), la differenza di fase $\Delta\varphi$ tra gli assi veloce e lento della lamina equivalente agli specchi della cavità. Si ottiene $\Delta\varphi \approx 6 \cdot 10^{-5}$. Questo valore, come si vede dalla (2.6.3), non è sufficiente a dare un picco di trasmissione diverso per ciascuno degli stati di polarizzazione della luce, in accordo con quanto osservato.

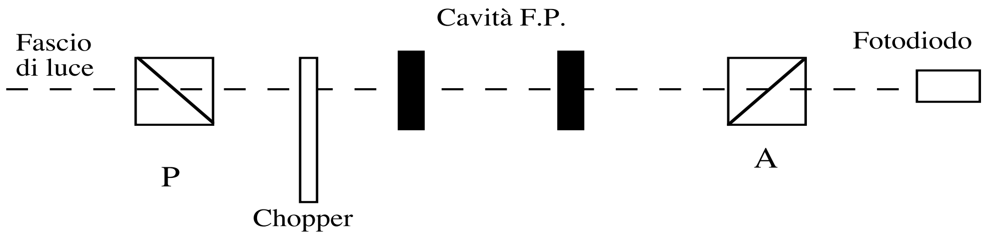


Figura 4.1.3: Schema di principio usato per effettuare le misure di estinzione con la cavità agganciata.

4.2 ELLISSOMETRO IN ARIA

In questo paragrafo si presentano i risultati di una misura dell'effetto Faraday in aria ottenuta sfruttando la caratteristica della cavità F.P. di allungare il cammino ottico eff ettivo del fascio luminoso. Si farà vedere che la riflessione multipla della luce permet te di amplificare l'effetto Faraday, rispetto al singolo passaggio, di un fattore

$$N = \frac{1+R}{1-R} \cong \frac{2F}{\pi} \tag{4.2.1}$$

dove R è la riflettività degli specchi e F la finesse della cavità. Questo stesso coefficie nte di amplificazione interviene in PVLAS nella misura della birifrangenza magnetic a del vuoto (appendice A). Se ne è ottenuto un valore sperimentale misurando la cost ante di Verdet dell'aria. Ciò equivale ad effettuare una misura della finesse indipende nte da quella descritta nel paragrafo 3.1.

4.2.1 Effetto Faraday

Si consideri una sostanza otticamente non attiva immersa in un campo magnetico $\mathbf{B} = B(z) \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Un fascio di luce monocromatica linearmente polarizzata che si propag a nella sostanza nella direzione z del campo magnetico è soggetta ad una rotazione de l piano di polarizzazione. Tale fenomeno è l'effetto Faraday e l'angolo di rotazione ϑ del piano di polarizzazione segue la legge :

$$\vartheta = V(\lambda) \int B(z) \quad dz \tag{4.2.2}$$

dove V è la costante di Verdet del materiale, che dipende dalla lunghezza d'onda dell a luce e dalla temperatura.

Un'onda piana monocromatica linearmente polarizzata può essere descritta come som ma di due onde circolarmente polarizzate controrotanti (destrogira e levogira). In pres enza di un campo magnetico le sostanze otticamente non attive diventano birifrangen ti per gli stati di polarizzazione circolari della luce. Le due onde si propagano quindi nella sostanza con differenti velocità di fase (Landsberg 1979), cioè con differenti ind ici di rifrazione. Questo spiega la rotazione del piano di polarizzazione della luce: inf atti il versore di polarizzazione $\hat{\mathbf{e}}$ di un'onda piana linearmente polarizzata può essere rappresentato come combinazione lineare di due versori di polarizzazione lineare mu tuamente ortogonali $\hat{\mathbf{e}}_1$ ed $\hat{\mathbf{e}}_2$. Questi sono legati ai versori di polarizzazione circolar e $\hat{\mathbf{e}}_+$ ed $\hat{\mathbf{e}}_-$ dalle relazioni (Landau 1991)

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-\right) \qquad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-\right) \tag{4.2.3}$$

Se $\hat{\mathbf{e}}_+$ acquista lo sfasamento $e^{-i\alpha}$ ed $\hat{\mathbf{e}}_-$ lo sfasamento $e^{i\alpha}$, il versore $\hat{\mathbf{e}}_1$ si trasforma come

$$\hat{\mathbf{e}}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_+ e^{-i\alpha} + \hat{\mathbf{e}}_- e^{i\alpha}\right) = -\hat{\mathbf{e}}_1 \operatorname{sen}\alpha + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos\alpha \tag{4.2.4}$$

cioè ruota di un angolo α pari alla metà dello sfasamento relativo subito dalle due on de circolarmente polarizzate. Allo stesso modo si dimostra che $\hat{\mathbf{e}}_2$, e quindi anche il versore di polarizzazione $\hat{\mathbf{e}}$ della luce linearmente polarizzata, risultano ruotati di α. I n altre parole, uno sfasamento delle due onde circolarmente polarizzate è equivalente a una rotazione del piano di polarizzazione della luce linearmente polarizzata.
La birifrangenza magnetica non dipende dal verso di propagazione della luce ma solo dal verso del campo magnetico. Di conseguenza l'effetto Faraday viene amplificato d al F.P..

4.2.2 Amplificazione della rotazione Faraday in un Fabry-Perot

Come si è detto, la luce che entra nella cavità F.P. attraversa molte volte la regione de l campo magnetico per riflessione multipla sugli specchi. Le rotazioni acquistate in ci ascun passaggio si sommano e la luce, quindi, esce dalla cavità ruotata di un angolo c he è N volte quello ϑ acquisito in un unico passaggio.
Usiamo il formalismo delle matrici di Jones (Yariv 1991) per ricavare il campo elettri co trasmesso dalla cavità. L'espressione che esprime tale campo elettrico è:

$$\begin{pmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[T e^{i\frac{\delta}{2}} \left(R e^{i\delta} \begin{vmatrix} \cos 2\vartheta & -\operatorname{sen} 2\vartheta \\ \operatorname{sen} 2\vartheta & \cos 2\vartheta \end{vmatrix} \right)^n \times \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \tag{4.2.5}$$

dove T ed R sono, rispettivamente, la trasmissività e riflettività degli specchi della ca vità, $\delta/2$ lo sfasamento acquistato dalla luce in un passaggio all'interno del F.P. e $E_0 = (E_{0x}, E_{0y})$ rappresenta il vettore campo elettrico della luce incidente. Durante le misur e la frequenza del laser era mantenuta in risonanza con la cavità e quindi $\delta=2m\pi$. Ess endo $\vartheta<<1$, si può porre $\cos\vartheta=1$ e $\mathrm{sen}\vartheta=\vartheta$. Si ottiene allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T e^{in\pi} R^{n} \begin{vmatrix} 1 & -2\vartheta \\ 2\vartheta & 1 \end{vmatrix}^{n} \times \begin{vmatrix} 1 & -\vartheta \\ \vartheta & 1 \end{vmatrix} = -T \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\vartheta \\ \vartheta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - R \begin{vmatrix} 1 & -2\vartheta \\ 2\vartheta & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{T}{\left(1-R\right)^{2} + 4R^{2}\vartheta^{2}} \begin{vmatrix} 1-R & -2R\vartheta \\ 2R\vartheta & 1-R \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -\vartheta \\ \vartheta & 1 \end{vmatrix} \tag{4.2.6}$$

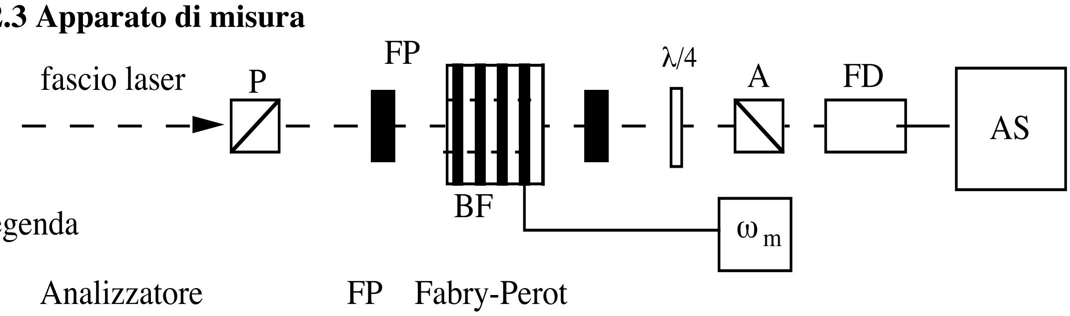
$$= -\frac{T}{\left(1-R\right)^{2} + 4R^{2}\vartheta^{2}} \begin{vmatrix} 1-R-2R\vartheta^{2} & -\vartheta\left(1+R\right) \\ \vartheta\left(1+R\right) & 1-R-2R\vartheta^{2} \end{vmatrix}$$

Per $\vartheta<<1/F$ la (4.2.6) diventa

$$\begin{pmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \end{pmatrix} = -\frac{T}{1-R} \begin{vmatrix} 1 & -\vartheta\left(\frac{1+R}{1-R}\right) \\ \vartheta\left(\frac{1+R}{1-R}\right) & 1 \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \tag{4.2.7}$$

Confrontando questa espressione con l'equazione (2.4.16), si riconosce che la luce tra smessa dal F.P. risulta qui ruotata di un angolo $N\vartheta$, con N dato dall'equazione (4.2.1) .

4.2.3 Apparato di misura



Legenda

A	Analizzatore	FP	Fabry-Perot
AS	Analizzatore spettro	$\lambda/4$	Lamina $\lambda/4$
BF	Bobina Faraday	P	Polarizzatore
FD	Fotodiodo	ω_M	Oscillatore

Figura 4.2.1: Schema ottico per la misura dell'effetto Faraday in aria. La lamina $\lambda/4$ è usata per migliorare l'estinzione dell'apparato in alternativa alla rotazione degli specchi della cavità. In questa misura σ^2=2 10^{-5}. Durante la misura laser e cavità sono agganciati in frequenza.

La figura 4.2.1 mostra lo schema ottico adottato per effettuare la misura dell'effetto Faraday in aria. Al centro della cavità F.P. il fascio attraversa una regione di campo magnetico generato da una bobina con asse coincidente con la direzione di propagazione della luce.

Il campo elettrico E_F all'uscita dell'analizzatore è la componente y della seguente espressione

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \left(-\frac{T}{1-R} \right) \begin{vmatrix} 1 & -N\vartheta \\ N\vartheta & 1 \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

dove la prima matrice a sinistra rappresenta il prisma analizzatore A. Con la bobina spenta l'analizzatore è incrociato con il polarizzatore a dare l'estinzione del fascio. Si ha

$$E_F = E_{in}\left(\frac{T}{1-R}\right)\left(\vartheta\frac{1+R}{1-R}\right) \tag{4.2.9}$$

e per l'intensità

$$I_F = I_t\left(\vartheta\frac{1+R}{1-R}\right)^2 \tag{4.2.10}$$

dove I_t è l'intensità della luce trasmessa dal Fabry-Perot agganciato, misurata prima dell'analizzatore (equazione 2.4.33). L'intensità totale I_F che il fotodiodo raccoglie è la somma del termine dato dalla (4.2.10) e di quello dovuto all'estinzione σ^2

$$I_F = I_t\left[\sigma^2 + \left(\vartheta\frac{1+R}{1-R}\right)^2\right] \tag{4.2.11}$$

Per effettuare la misura si è modulata la corrente della bobina con una pulsazione ω_m. In questo modo l'effetto viene misurato come l'ampiezza I_{2m} di una componenente di Fourier del segnale del fotodiodo. Ciò permette di separare i due termini di intensità dell'equazione (4.2.11). Infatti, ponendo $\vartheta=\vartheta_0 \cos \omega_m t$, si ottiene

$$I_F = I_t\sigma^2 + I_t\left[N\vartheta_0 \cos(\omega_m t)\right]^2 =$$

$$= I_t\left(\sigma^2 + \frac{1}{2}N^2\vartheta_0{}^2\right) + \underbrace{\frac{1}{2}I_t N^2\vartheta_0{}^2}_{I_{2m}} \cos(2\omega_m t) \qquad (4.2.12)$$

dove si vede che il termine I_{2m} alla frequenza doppia di quella di modulazione ω_m del la bobina ha ampiezza proporzionale al quadrato dell'effetto. La rotazione ϑ_0 acquisit a dal piano di polarizzazione della luce in un unico passaggio all'interno del campo m agnetico è allora

$$\vartheta_0 = \sqrt{2\frac{I_{2m}}{I_t}}\left(\frac{1-R}{1+R}\right) \qquad (4.2.13)$$

4.2.4 Risultato sperimentale

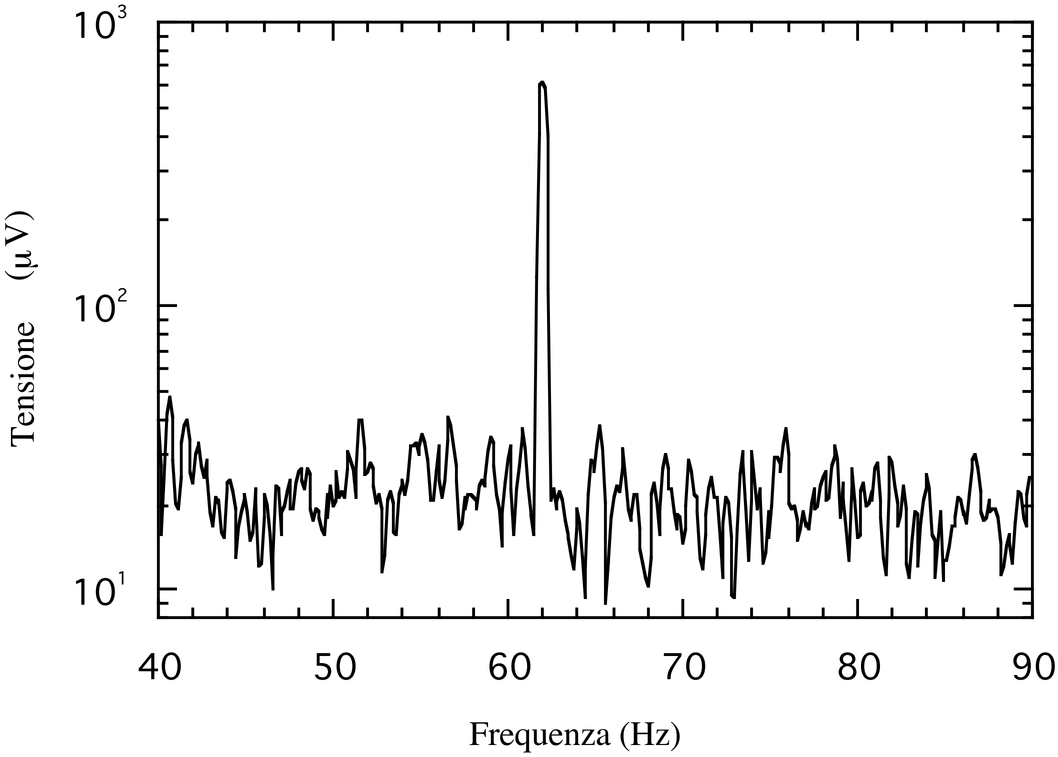


Figura 4.2.2: Misura dell'effetto Faraday in aria: spettro in frequenza del segnale dal fotodiod o in trasmissione; con R_c=10 MΩ si ha I_{2m}= 25 pW; l'intensità trasmessa misurata prima dell 'analizzatore è I_t= 1.36 mW.

La bobina usata per effettuare la misura è costituita da un avvolgimento di N_S=4074 s pire di filo di rame di diametro 1 mm. Il diametro esterno della bobina è $2r_1$=5.5 cm, quello interno $2r_2$=1.2 cm e la lunghezza L=20 cm. La bobina è posizionata al centro del F.P., in asse con il percorso della luce. Essa viene alimentata con una corrente I=7 0 mA impulsata a una frequenza ν_m=31 Hz.
Il valore dell'integrale che figura nella (4.2.2) è con ottima approssimazione dato dal valore della circuitazione di B:

$$\int B(z)\, dz = \mu_0\ N_S\, I = 358\ \ \mu T\ m = 358\ \ \text{Gauss cm}$$

Per escludere l'eventualità che due o più spire fossero cortocircuitate, si è calcolato il valore teorico del campo magnetico sull'asse della bobina (vedi Appendice B), e si è confrontato il valore così ottenuto con il risultato di una serie di misure effettuate con un magnetometro. I valori teorici e sperimentali sono risultati uguali entro la precisio ne del magnetometro.
In figura 4.2.2 è riportato lo spettro in frequenza del segnale dal fotodiodo. Il picco è l'ampiezza V_{2m} della componenente di Fourier del segnale misurato dal fotodiodo all a frequenza $2\nu_m$=62 Hz. Si ha V_{2m}=620 μV. Questo valore di tensione corrisponde a d un'intensità della luce I_{2m}=25 pW. L'intensità della luce trasmessa dal F.P. misurata prima dell'analizzatore è I_t =1.36 mW.
Dalla (4.2.13) si ricava il valore dell'angolo ϑ_0, la rotazione acquisita dalla luce in un unico passaggio all'interno del campo magnetico:

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2I_{2m}}{I_t}}\left(\frac{1-R}{1+R}\right) = 1.67\cdot 10^{-7}\quad \text{rad} \tag{4.2.14}$$

Si può ora utilizzare l'equazione (4.2.2) per ricavare il valore della costante di Verdet dell'aria a λ=1064 nm:

$$V_{aria} = \frac{\vartheta_0}{\left(\int B(z)\, dz\right)} = 4.7\cdot 10^{-10}\quad \text{rad/gauss}\cdot\text{cm} \tag{4.2.15}$$

che risulta in ottimo accordo con quello ricavato dalla letteratura (Ingersoll 1956-195 8, Tobias 1961).

Alle ascisse z_1 e z_2 degli specchi è presente un campo magnetico oscillante residuo $B(z_1)=B(z_2)\approx 7$ mG (figura B.3). Questo campo potrebbe, per effetto Farady sugli strati riflettenti degli specchi, dare luogo ad una rotazione spuria ϑ'_0 del piano di polarizzazione della luce, che costituirebbe un errore sistematico della misura. L'ordine di grandezza di questo effetto può essere stimato supponendo che la costante di Verdet dei materiali di cui sono costituiti gli strati riflettenti sia dell'ordine di grandezza di quella del SiO_2 ($V_{SiO_2}=10^{-6}$ rad/gauss cm) (Ramaseshan 1946) che lo spessore attraversato sia dell'ordine di alcune lunghezze d'onda. Si ottiene

$$\vartheta'_0 = V_{SiO_2} B(z_1)\lambda \cong 10^{-12} \text{ rad}$$

che risulta diversi ordini di grandezza più piccola del valore dato dalla (4.2.14). Per evidenziare un eventuale effetto dovuto al campo residuo si è poi avvicinata la bobina alla posizione di uno degli specchi, ciò che fa crescere il campo magnetico $B(z_1)$ di un fattore 10^3. Non si è potuta osservare nessuna variazione dell'intensità del picco V_{2m}, ciò che esclude definitivamente la presenza di questo effetto spurio nelle misure effettuate.

I risultati della misura descritta in questo capitolo dimostrano la capacità dell'interferometro F.P. di amplificare un effetto fisico sulla luce accumulata in cavità e di migliorare il rapporto segnale-rumore. Consideriamo infatti i grafici del rumore in intensità del laser libero (figura 4.1.1) e del fascio trasmesso dalla cavità (figura 4.1.2). Alla frequenza f_{2m}=62 Hz il rumore nel fascio trasmesso è aumentato, rispetto a quello del laser libero, di un fattore $\approx 10^2$. Il segnale invece cresce come il quadrato della finesse della cavità. Considerando il livello di rumore alla base del picco di figura 4.2.2 si vede che il minimo valore dell'angolo ϑ_0 che l'apparato è in grado di rivelare è $\approx 3\cdot 10^{-8}$ rad. Con un solo passaggio, considerando cioè il laser libero, il segnale corrispondente sarebbe rimasto sotto il livello di rumore. Il valore del minimo angolo rivelabile con l'ellissometro è un fattore 10^3 più grande dell'ellitticità prevista nell'esperimento PVLAS. In quest'ultimo caso però si punta ad avere una finesse più alta, e dunque un più alto fattore di amplificazione dell'effetto, oltre che ad usare il metodo dell'eterodina descritto nel capitolo 1. Si può stimare la sensibilità dell'ellissometro per misure di rotazione con il metodo dell'eterodina, pensando la rotazione $\Theta = N\vartheta_0 \cos\omega_m t$ come un segnale di modulazione di ampiezza $\Theta_0 = N\vartheta_0$. Dalla (4.2.14)

$$\Theta_0 = \sqrt{\frac{2\,V_{2m}}{I_t\,\alpha_t}} = 1.9\cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

dove α_t è il fattore di risposta del fotodiodo ($\alpha_t = 2.5 \cdot 10^7$ V/W) (paragrafo 2.3). Riscr iviamo l'equazione (1.2.12) come

$$S = \frac{V_{noise}(f_m \pm f_M)}{I_t\ \Theta_0\ \alpha_t \sqrt{\Delta f}} = \frac{V_{noise}(f_m \pm f_M)}{\sqrt{2\ V_{2m}\ I_t\ \alpha_t\ \Delta f}}$$

dove $V_{noise}(f_m \pm f_M)/(\Delta f)^{1/2}$ è la densità spettrale del rumore in tensione alle frequenze $f_m \pm f_M$. Scegliendo $f_M = 10$ Hz, si è misurato $V_{noise}(f_m \pm f_M)/(\Delta f)^{1/2} \approx 40\ \mu V/(Hz)^{1/2}$. Si ottiene allora

$$S = 6.1 \cdot 10^{-6} \quad \text{rad} / \sqrt{\text{Hz}}$$

CONCLUSIONI

Con il lavoro svolto per questa tesi si è iniziato lo studio per la realizzazione di un ell
issometro per effettuare la misura della birifrangenza magnetica del vuoto (esperimen
to PVLAS). Si sono affrontati il problema della cavità Fabry-Perot e quello dell'agga
ncio della frequenza del laser a quella di risonanza della cavità. È stata costruita una c
avità Fabry-Perot di finesse ≈ 2000 lunga un metro, e la si è caratterizzata con misure
di intensità e di rumore dei fasci trasmesso e riflesso. Per quanto riguarda il circuito
di aggancio si è studiato e realizzato un sistema di retroazione in grado di mantenere i
l rumore in frequenza del laser al livello di pochi milliHertz/(Hertz)$^{1/2}$ a basse freque
nze. Risultati originali di questo lavoro sono stati uno schema di modulazione della fa
se del laser alternativo all'uso delle celle di Pockels, e il calcolo rigoroso della funzio
ne di trasferimento in riflessione della cavità. Due articoli su questi argomenti sono in
corso di pubblicazione su due riviste scientifiche internazionali. Usando la cavità Fa
bry-Perot, si è realizzato un ellissometro con cui si è effettuata una misura dell'effetto
Faraday sull'aria. La misura ha evidenziato, come previsto, la capacità della cavità di
amplificare il rapporto segnale-rumore. Lo strumento ha raggiunto una sensibilità S
$\approx 6 \cdot 10^{-6}$ rad/(Hertz)$^{1/2}$, ben al di sopra del livello di rumore shot.
La tesi ha soprattutto permesso di mettere a fuoco alcuni problemi cruciali legati al pr
ogetto dell'esperimento finale, attualmente in fase di montaggio, e alla sua esecuzione
. In questo caso la cavità dovrà avere lunghezza 5 m e finesse ≈ 50000. Essa dovrà in
oltre essere realizzata in vuoto. L'alto valore della finesse comporta l'impossibilità di
allineare la cavità in aria prima di praticare il vuoto. In questo caso infatti la lunghezz
a del cammino ottico equivalente rende non trascurabile l'assorbimento dell'aria. Nell
a cavità realizzata si è osservato che per migliorare l'estinzione del fascio trasmesso o
ccorre ruotare ciascuno specchio attorno al suo asse. Bisognerà dunque prevedere un
sistema di allineamento e di rotazione degli specchi comandabile dall'esterno della ca
mera a vuoto. La cavità studiata nel corso del presente lavoro di tesi è stata realizzata
con gli specchi sostenuti da due supporti indipendenti. Le prove effettuate hanno dim
ostrato però che la stabilità meccanica, e dunque il rumore del fascio trasmesso della
cavità, migliorano quando gli specchi sono fissati alle due estremità di un cilindro di

supporto. È evidente la difficoltà di realizzazione di uno schema di questo tipo nella disposizione finale dell'esperimento PVLAS. Probabilmente si renderà necessario svi luppare un sistema di stabilizzazione della posizione relativa degli specchi della cavit à.

APPENDICE A

Amplificazione dell'ellitticità in una cavità Fabry-Per ot

Consideriamo una cavità ottica risonante Fabry-Perot costituita da due specchi piani e paralleli posti a una distanza d e un mezzo birifrangente di lunghezza L all'interno d i essa con asse ottico parallelo alle facce degli specchi. Consideriamo un'onda piana monocromatica linearmente polarizzata di lunghezza d'onda λ che si propaga lungo l' asse della cavità. Quando essa attraversa una volta il mezzo birifrangente le compone nti del campo elettrico dell'onda secondo gli assi veloce e lento acquisiscono uno sfas amento relativo

$$\Delta\varphi = 2\pi\,(n_l - n_v)\,\frac{L}{\lambda} \tag{A.1}$$

dove n_l è l'indice di rifrazione della componente lenta e n_v l'indice di rifrazione di que lla veloce. Tale sfasamento introduce una ellitticità nel fascio di luce che per $\Delta\varphi << 1$ è

$$\psi = \frac{\Delta\varphi}{2}\cos 2\theta \tag{A.2}$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di polarizzazione e l'asse lento. La luce che entra ne lla cavità F.P. attraversa più volte la regione di birifrangenza per riflessione multipla sugli specchi. Usiamo il formalismo delle matrici di Jones (Yariv 1991) per calcolare il campo elettrico della luce trasmessa dalla cavità:

$$\begin{pmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[T e^{i\frac{\delta}{2}} \left(R e^{i\delta} \begin{vmatrix} e^{i\,2\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,2\Delta\varphi} \end{vmatrix} \right)^n \times \begin{vmatrix} e^{i\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\varphi} \end{vmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

dove T ed R sono, rispettivamente, la trasmissività e riflettività degli specchi della ca vità, $E_0=(E_{0x}, E_{0y})$ rappresenta il vettore campo elettrico della luce incidente nel siste ma di riferimento degli assi lento e veloce del mezzo birifrangente e

$$\frac{\delta}{2} = 2\pi\, n\frac{d-L}{\lambda} + 2\pi\, \frac{n_l + n_v}{\lambda}\frac{L}{\lambda}$$

lo sfasamento medio acquisito dalla luce in un passaggio all'interno del F.P. dove n è l'indice di rifrazione del mezzo non birifrangente. Nelle condizioni di massima risona nza, cioè $\delta=2m\pi$ (paragrafo 2.4), sviluppando la (A.3) si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T\ e^{i\pi}\ R^{n} \begin{vmatrix} e^{i\,2\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,2\Delta\varphi} \end{vmatrix}^{n} \times \begin{vmatrix} e^{i\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= -T\, \frac{\begin{vmatrix} e^{i\,\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\Delta\varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - R\begin{vmatrix} e^{i\,2\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,2\Delta\varphi} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{T}{1-2R\cos 2\Delta\varphi + R^2}\begin{vmatrix} 1-Re^{-i\,2\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & 1-Re^{i\,2\Delta\varphi} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e^{i\,\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\Delta\varphi} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{T}{1-2R\cos 2\Delta\varphi + R^2}\begin{vmatrix} e^{i\,\Delta\varphi} - Re^{-i\,\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\Delta\varphi} - Re^{i\,\Delta\varphi} \end{vmatrix} \tag{A.4}$$

Per $\Delta\varphi<<1$ la (A.4) diventa

$$-\frac{T}{(1-R)^2}\begin{vmatrix} 1+i\,\Delta\varphi - R + i\,R\,\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 1-i\,\Delta\varphi - R - i\,R\,\Delta\varphi \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

e quindi:

$$\begin{pmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \end{pmatrix} = -\frac{T}{1-R}\begin{vmatrix} 1+i\,\Delta\varphi\frac{1+R}{1-R} & 0 \\ 0 & 1-i\,\Delta\varphi\frac{1+R}{1-R} \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}$$

Per $\Delta\varphi << 1/F$ si può riscrivere la (A.5) come:

$$\begin{pmatrix} E_{tx} \\ E_{ty} \end{pmatrix} = -\frac{T}{1-R} \begin{vmatrix} e^{i\,\Delta\varphi\frac{1+R}{1-R}} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\Delta\varphi\frac{1+R}{1-R}} \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \qquad \text{(A.6)}$$

Confrontando questa espressione con l'equazione (2.4.16) e considerando la (A.2) si r iconosce che la luce trasmessa dal Fabry-Perot acquisisce un'ellitticità Ψ che per $\Delta\varphi<$ $<1/F$ è

$$\Psi = \psi \frac{1+R}{1-R} \equiv N\,\psi \qquad \text{(A.7)}$$

APPENDICE B

campo magnetico di una bobina spessa

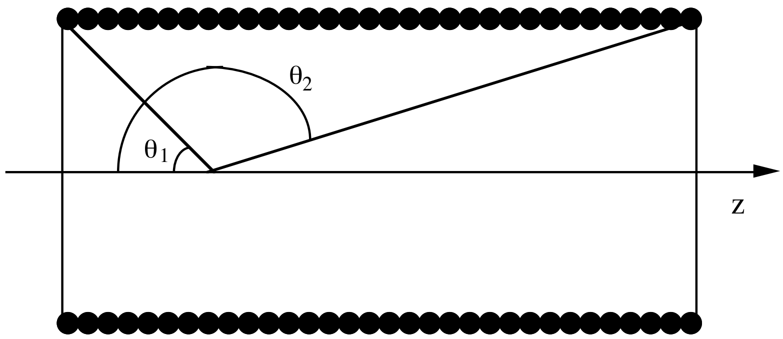


Figura B.1: Solenoide di lunghezza finita.

Si consideri un solenoide di lunghezza L, costituito da N_S spire che non si sovrappon gono percorse da un corrente I. Il campo magnetico B sull'asse del solenoide (figura B.1) è dato da (Amaldi 1986):

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{N_S}{L} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \right) \tag{B.1}$$

Nel caso in cui si abbia una bobina in cui le spire si sovrappongono (figura B.2), il co ntributo dB(z) dato al campo magnetico totale B(z) dalle spire comprese tra r e r+dr è

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2} I \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \right) \frac{dN_S}{L} \tag{B.2}$$

dove dN_S vale

$$dN_S = f \frac{L\, dr}{\sigma} \tag{B.3}$$

dove σ rappresenta la sezione del filo di rame e il coefficiente adimensionale f, "fatto re di impacchettamento", rappresenta il numero di sezioni di filo contenute nell'unità di superficie di una sezione meridiana della bobina. Il valore di tale coefficiente è dat o da

$$f = \frac{N_S \sigma}{L(r_2 - r_1)} \tag{B.4}$$

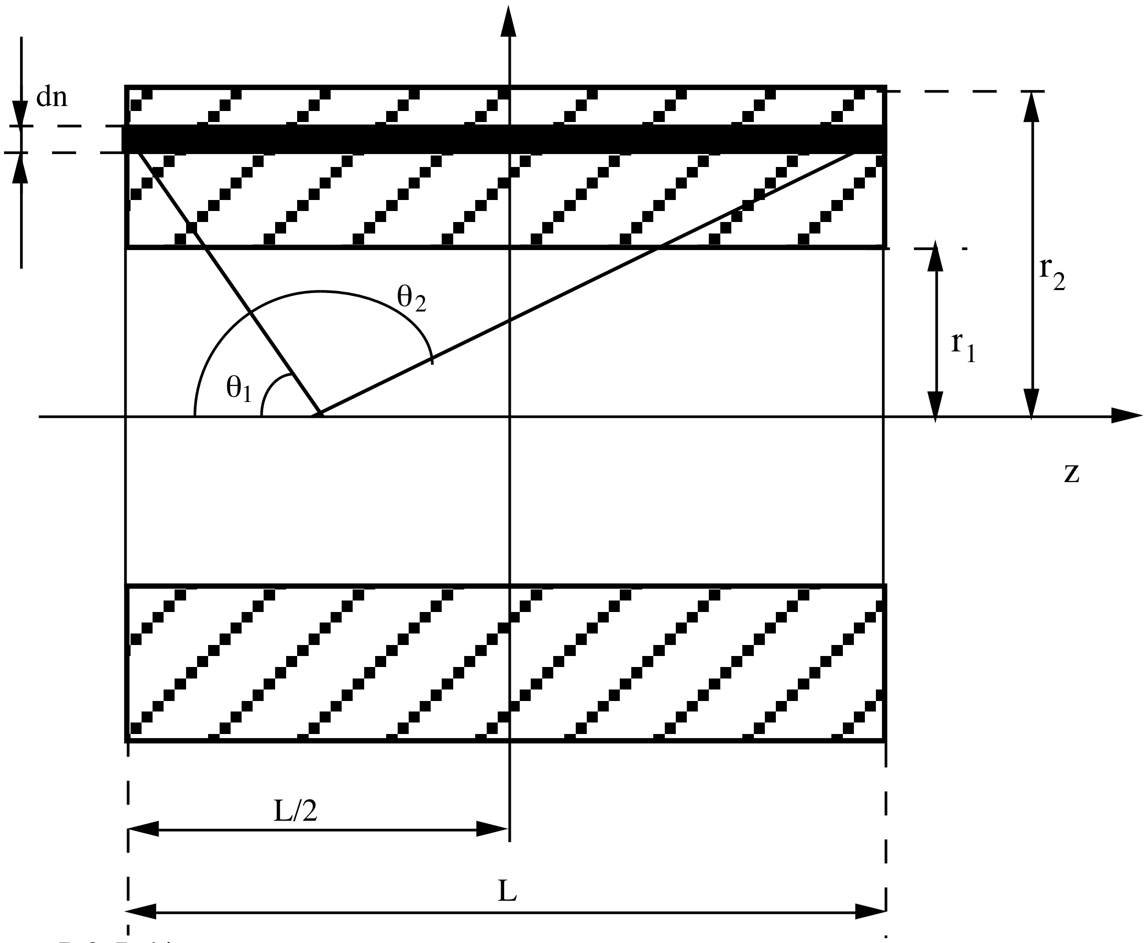


Figura B.2: Bobina spessa.

Inserendo la (B.3) nella (B.2) si ottiene

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{f}{\sigma} I\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)dr =$$

$$= \frac{\mu_0}{2}\frac{f}{\sigma} I\left(\frac{\left(\frac{L}{2}+z\right)}{\left|\frac{L}{2}+z\right|}\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\theta_1}} - \frac{\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\left|\frac{L}{2}-z\right|}\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\theta_2}} \right)dr \qquad (B.5)$$

dove i termini (L/2+z)/|L/2+z|, (z-L/2)/|L/2-z| sono stati introdotti per mantenere il se gno di $\cos\theta_1$ e $\cos\theta_2$. Operiando nella (B.5) la sostituzione

$$tg\theta_1 = \frac{r}{\left(\frac{L}{2}+z\right)} = x \quad , \quad tg\theta_2 = \frac{r}{\left(\frac{L}{2}-z\right)} = y \qquad (B.6)$$

la si può riscrivere nella forma

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{f}{\sigma} I\left(\frac{\left(\frac{L}{2}+z\right)^2}{\left|\frac{L}{2}+z\right|}\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}dx + \frac{\left(\frac{L}{2}-z\right)^2}{\left|\frac{L}{2}-z\right|}\sqrt{\frac{1}{1+y^2}}dy \right) \qquad (B.7)$$

Poniamo ora:

$$\sqrt{1+x^2} = t_x + x \quad , \quad \sqrt{1+y^2} = t_y + y \qquad (B.8)$$

La (B.7) diventa

$$dB(z) = -\frac{\mu_0}{2}\frac{f}{\sigma} I\left(\left|\frac{L}{2}+z\right|\frac{dt_x}{t_x} + \left|\frac{L}{2}-z\right|\frac{dt_y}{t_y} \right) \qquad (B.9)$$

che integrata porta alla:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{f}{\sigma}I\left[\left|\frac{L}{2}+z\right|\ln\left(\frac{\sqrt{1+x_1^2}-x_1}{\sqrt{1+x_2^2}-x_2}\right)+\left|\frac{L}{2}-z\right|\ln\left(\frac{\sqrt{1+y_1^2}-y_1}{\sqrt{1+y_2^2}-y_2}\right)\right] \quad \text{(B.10)}$$

dove

$$x_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\left(\frac{L}{2}+z\right)} \quad , \quad y_{1,2} = \frac{r_{1,2}}{\left(\frac{L}{2}-z\right)} \quad \text{(B.11)}$$

sono gli estremi su cui viene calcolato l'integrale. La figura B.3 mostra l'andamento d ella (B.10) per la bobina usata per la misura dell'effetto Faraday sull'aria.

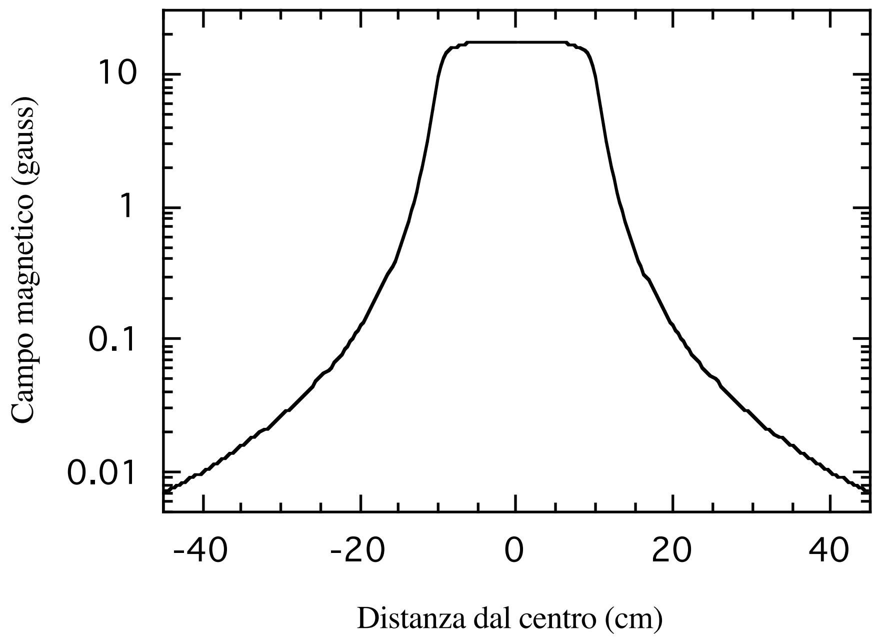


Figura B.3: Campo magnetico sull'asse di una bobina spessa lunga 20 cm, con diametro inter no di 1.2 cm e diametro esterno di 5.5 cm, percorsa da una corrente I=70 mA.

Bibliografia

Adler S.L.,

Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field, Ann. Phys. **67**, 599 (1971)

Amaldi E., Bizzarri R. e Pizzella G.,

Fisica Generale, (Zanichelli, Bologna, 1986)

Born M. e E. Wolf,

Principles of Optics, 3ª ed. (Pergamon, New York, 1965)

Bower J.L. e Schultheiss P.M.

Introduction to the design of servomechanisms, (Wiley, New York, 1958)

Cameron R., Cantatore G., Melissinos A.C., Semertzidis Y., Halama H.J., Lazarus D. M., Prodell A.G., Nezrick F., Rizzo C. e Zavattini E.,

Search for nearly massless, weakly coupled particles by optical techniques, Phys. Rev. **D47**, 3707 (1993)

Cantatore G.,

Apparato per la rivelazione della birifrangenza magnetica del vuoto. Cavità multipass. Tesi di Laurea in Fisica, Università di Pisa (Anno accademico 1985-86)

Carusotto S., Polacco E., Iacopini E., Stefanini G., Zavattini E. e Scuri F.,

The ellipticity introduced by interferential mirrors on a linearly polarized beam ortogonally reflected, Appl. Phys . **B48**, 231 (1989)

Euler H. e Heisenberg W.,

Z. Phys. **98**, 718 (1938)

Furry W.H.,

Phys. Rev. **51**, 125 (1937)

Iacopini E., Smith B., Stefanini G. e Zavattini E.,

On a sensitive ellipsometer to detect the vacuum polarization induced by a magnetic field, Nuovo Cimento **61 B**, 21 (1981)

Ingersoll L.R. e Liebenberg D.H.,
Faraday effect in gases and vapors.II, J. Opt Soc. Am. **46**, 538 (1956)
Ingersoll L.R. e Liebenberg D.H.,
Faraday effect in gases and vapors.III, J. Opt Soc. Am. **48**, 339 (1958)
Jackson J.D.,
Classical Elettrodinamics , 2ª ed. (Wiley, New York, 1975)
Landsberg G.S.,
Ottica, (Edizioni Mir, Mosca, 1979)
Landau L.D. e Lifsits E.M.,
Fisica teorica vol 4: *Teoria quantistica relativistica*, 2ª ed. (Mir, Roma, 1 991)
Micossi P.,
Misura della birifrangenza introdotta nella riflessione di luce linearment e polarizzata da uno specchio interferenziale, Tesi di Laurea in Fisica, U niversità di Trieste (Anno accademico 1991-92)
Nilsson A.C., Gustafson E.K. e Byer R.L.,
Eigenpolarization theory of monolithic non-planar ring oscillators, IEEE J. Quantum Elec. **25**, 767 (1989)
Pound R.W., Hall J.L., Kowalski F.V., Hough J., Ford G.M., Munley A.J. e Ward H,
Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator, Appl. Phys. **B 31**, 97 (1983)
Ramaseshan S.,
Proc. Indian. Acad. Sci. **24**, 426 (1946)
Ruoso G.,
Realizzazione di una cavità risonante ottica ad alta finezza per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto co tecniche ellissometriche, Tesi di Dottorato in Fisica, Università di Padova (Anno accademico 1993-94)
Schwinger J.,
On gauge invariance and vacuum polarization, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)
Shoemaker D., Brillet A., Nary Man C., Crègut O. e Kerr G.,
Frequency-stabilized laser-diode-pumped Nd:YAG laser, Opt. Lett. **14**, 6 09 (1989)
Svelto O.,
Principles of lasers, 2ª ed. (Plenum, New York, 1989)

Tobias I. e Kauzmann W.,
Faraday effect in molecules, J. Chem. Phys. **35**, 538 (1961)
Yariv A.,
Optical electronics 4ª e. (Saunders, New York, 1991)