

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

DIPARTIMENTO DI FISICA



DOTTORATO DI RICERCA IN FISICA

MESSA A PUNTO DI UN ESPERIMENTO
PER UNA MISURA SULLA POLARIZZABILITÀ
MAGNETICA DEL VUOTO

DOTTORANDA: ANNA MARIA DE RIVA

X CICLO

" The light-quantum has the peculiarity that it apparently ceases to exist when it is in one of its stationary states, namely, the zero state, in which its momentum and therefore also its energy, are zero. When a light-quantum is absorbed it can be considered to jump into this zero state, and when one is emitted it can be considered to jump from the zero state to one in which it is physically in evidence, so it appears to have been created. Since there is no limit to the number of light-quanta that may be created in this way, we must suppose that there are an infinite number of light-quanta in the zero state."

P.A.M. DIRAC

[The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation, Proc. Roy. Soc. A114, 243 (1927)]

Indice

INTRODUZIONE	1
1 GLI EFFETTI DISPERSIVI MAGNETICI	11
1.1 La birifrangenza magnetica del vuoto	11
1.2 Correzioni di ordine superiore	16
1.3 Birifrangenza magnetica e rotazione	17
1.4 I risultati dell'esperimento LAS	22
2 APPARATO SPERIMENTALE E SEGNALI PREVISTI	25
2.1 Apparato sperimentale: generalità	25
2.1.1 Il sito finale e quello di test	27
2.2 L'apparato ottico e l'ellissometro	34
2.2.1 Il laser	34
2.2.2 I polarimetri	37
2.2.3 L'interferometro Fabry-Pérot	39
2.2.4 Le cavità realizzate	42
2.2.5 Il modulatore di ellitticità	45
2.3 Calcolo dei segnali attesi	50
2.3.1 Misura della birifrangenza magnetica del vuoto	50
2.3.2 Misura del dicroismo prodotto dall'assione	53
2.4 La sensibilità prevista per l'esperimento	55
3 MISURE DI ELLISSOMETRIA	57
3.1 Introduzione	57
LA SENSIBILITÀ MISURATA	58
3.2 Considerazioni sui rumori presenti nella misura	58
3.3 Limiti richiesti sui rumori	59

3.4	Misure di sensibilità con la cella di Faraday	62
3.5	Sensibilità con modulatore fotoelastico	66
L'EFFETTO COTTON-MOUTON IN O₂		70
3.6	Note introduttive	70
3.7	La tecnica sperimentale	70
3.8	Risultati sperimentali e analisi	75
CONCLUSIONI		81
A IL CIRCUITO DI AGGANCIO		85
A.1	Introduzione	85
A.2	La tecnica di Pound-Drever	88
A.3	La modulazione di fase	90
A.4	Il segnale di discriminazione	90
A.5	Il Servo	94
B ANISOTROPIA DEGLI SPECCHI		97
B.1	Introduzione	97
B.2	La lamina equivalente	98
B.3	Derivazione dell'estinzione misurata	102
B.4	Risultati sperimentali ed analisi	104
B.5	Conclusioni	109
Bibliografia		111

Introduzione

Il completamento della teoria elettromagnetica di Maxwell attraverso i principi quantistici ha dato origine alla teoria dell'Elettrodinamica Quantistica (QED). Un ruolo essenziale è occupato dal principio di indeterminazione di Heisenberg che, insieme al principio di Equivalenza Massa-Energia, fornisce una rappresentazione intuitiva delle fluttuazioni del vuoto e allo stesso tempo fa capire la necessità, nelle Teorie dei Campi in generale, di definire *ab initio* uno stato fondamentale particolare, lo stato fisico *vuoto*.

La manifestazione più tangibile del *vuoto* è quella legata agli effetti, sperimentalmente osservabili, dovuti alla polarizzazione delle sue fluttuazioni per mezzo di campi sufficientemente forti, fenomeno detto *polarizzazione del vuoto*. La realizzazione di esperimenti i cui risultati possano sindacare quantitativamente, fino ai limiti del possibile, i vari aspetti fenomenologici che la teoria attribuisce a questo stato particolare è uno dei temi più affascinanti della fisica moderna.

La linearità è una delle proprietà più stridenti dell'elettrodinamica classica [1]: due o più soluzioni delle equazioni di Maxwell possono essere sovrapposte per produrre un campo che è anch'esso soluzione delle medesime equazioni. In passato sono state proposte teorie non lineari [2] ma non si è trovato nessun evidente scostamento dalla convenzionale elettrodinamica di Maxwell. D'altra parte, è ben noto che le Teorie Relativistiche dei Campi permettono che particelle ed antiparticelle possano essere create e distrutte. Se un campo elettromagnetico può creare coppie virtuali di particella ed antiparticella non è difficile immaginare che il campo influenzerà la distribuzione di coppie che, a loro volta, influenzeranno il campo stesso.

Nella teoria *efficace*, sviluppata qui di seguito, in cui le coppie virtuali sono eliminate dalla descrizione, le equazioni risultanti riflettono questa nuova realtà fisica per mezzo di termini non lineari. Sulla base dei soli vincoli di invarianza per trasformazioni di Lorentz e di gauge si può determinare

la forma generale delle correzioni alle equazioni di Maxwell e lo sforzo è relativamente semplice se ci si restringe alle correzioni di ordine più basso e si considerano campi debolmente variabili. Si giunge in tal modo ad una famiglia a due parametri di possibili teorie: nessun argomento classico potrà però fornire informazioni su tali parametri. Non verranno qui riprodotti i complicati calcoli che forniscono i valori di questi parametri nell'ambito della QED: saranno piuttosto usati i risultati ottenuti per comprendere più a fondo la teoria di Maxwell e il modo in cui il vuoto influenza i fenomeni elettromagnetici.

È indispensabile rivedere velocemente alcuni concetti base che riguardano le variabili di campo utilizzate nella descrizione covariante della teoria dell'elettromagnetismo. Si utilizzano le unità naturali di Heaviside ($\hbar = c = 1$), la metrica di Minkowsky con segnatura $(-, +, +, +)$ ed il tensore di campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ +E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ +E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ +E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

cioè $F_{0i} = -E_i = -F^{0i}$ e $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k = F^{ij}$. La definizione di $F_{\mu\nu}$ riflette una fondamentale simmetria della teoria: l'invarianza per trasformazioni di gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ dove Λ è un'arbitraria funzione scalare.

Con l'aiuto del tensore antisimmetrico $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ ($\varepsilon^{0123} = 1$) si costruisce il duale $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ con componenti $\tilde{F}^{0i} = B_i$ e $\tilde{F}^{ij} = -\varepsilon_{ijk} E_k$. Quindi si possono fornire le espressioni compatte degli unici due invarianti per trasformazioni di Lorentz e di gauge, indipendenti, di secondo ordine nei campi e non contenenti derivate prime

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (B^2 - E^2) \quad (2)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3)$$

Se la teoria di Maxwell è lineare e quindi le equazioni del moto coinvolgono al più derivate prime dei campi, la Lagrangiana deve essere una combinazione lineare dei sopracitati invarianti. Essendo

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\alpha A_\beta) = \partial_\mu \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta \right] \quad (4)$$

i termini lineari in \mathcal{G} sono irrilevanti¹. Quindi la richiesta di invarianza per trasformazioni di Lorentz e di gauge, sostenuta dalla richiesta che le equazioni del moto siano lineari ed al più di primo ordine nelle derivate dei campi, porta all'univoca definizione della densità di Lagrangiana \mathcal{L} in assenza di distribuzioni macroscopiche di cariche e correnti

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2). \quad (5)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 \quad (6)$$

possono essere usate per ottenere le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Le due rimanenti equazioni, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, sono il risultato del vincolo $\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ che segue dalla definizione del duale in termini di $F_{\mu\nu}$: sono quindi una diretta conseguenza dell'invarianza di gauge e non dipendono dalla particolare scelta di \mathcal{L} .

Come menzionato poco sopra, gli effetti quantistici portano ad equazioni che descrivono interazioni non lineari tra i campi. Rilasciando l'assunzione di linearità e limitandosi, per semplicità, a campi lentamente variabili, cioè, a campi tali che ogni contributo alla Lagrangiana basato su un termine della forma $\partial_\alpha F_{\mu\nu}$ possa essere trascurato, la Lagrangiana deve contenere tutti e soli gli invarianti associati a $F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}_{\mu\nu}$ e non le loro derivate. Osservando che

$$F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} - \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} = 2\mathcal{F} \delta_\alpha^\mu \quad (7)$$

$$F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} = \mathcal{G} \delta_\alpha^\mu \quad (8)$$

si deduce che tutti gli invarianti di terzo ordine si annullano e che il primo contributo non banale viene dagli invarianti di quarto ordine. Denotando con F e \tilde{F} le matrici con elementi F_μ^ν e \tilde{F}_μ^ν rispettivamente, le equazioni (7) e (8) diventano $\tilde{F}\tilde{F} - FF = 2\mathcal{F}I$ e $F\tilde{F} = -\mathcal{G}I$ dove I è la matrice identità. Quindi si ha

$$Tr(F^4) = Tr(F^2 F^2) = Tr[F^2 (\tilde{F}^2 - 2\mathcal{F}I)] = Tr(F^2 \tilde{F}^2) - 2\mathcal{F}Tr(F^2) \quad (9)$$

¹Inoltre \mathcal{G} è uno pseudoscalare: potenze dispari di \mathcal{G} non devono essere incluse se la teoria deve essere invariante per trasformazioni di parità.

ed usando $F\tilde{F} = -\mathcal{G}I$ e $Tr F^2 = -4\mathcal{F}$ si ottiene

$$Tr (F^4) = 4\mathcal{G}^2 + 8\mathcal{F}^2. \quad (10)$$

Calcoli simili per i rimanenti invarianti di ordine quarto mostrano che essi sono combinazioni lineari di \mathcal{F}^2 e \mathcal{G}^2 eccetto $Tr(F^3\tilde{F}) = -Tr(F\tilde{F}^3) = 4\mathcal{F}\mathcal{G}$. Come già sottolineato, termini lineari in \mathcal{G} non sono permessi dalla conservazione di parità. Quindi la Lagrangiana efficace deve essere della forma

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + c_1\mathcal{F}^2 + c_2\mathcal{G}^2. \quad (11)$$

I coefficienti c_1 e c_2 non possono essere derivati dagli argomenti generali usati per il calcolo di \mathcal{L} .

A questo punto è possibile determinare le modifiche da apportare alle equazioni di Maxwell. A partire da (11), le equazioni di Eulero-Lagrange in forma covariante diventano

$$\partial_\nu \{F^{\mu\nu} - 2c_1\mathcal{F}F^{\mu\nu} - 2c_2\mathcal{G}\tilde{F}^{\mu\nu}\} = 0. \quad (12)$$

È interessante esprimere le componenti temporale ($\mu = 0$) e spaziale ($\mu = i$) di questa equazione in una forma che enfatizza il ruolo giocato dal vuoto quantistico. Per $\mu = 0$ si ha

$$\partial_i \{E_i - 2c_1\mathcal{F}E_i - 2c_2\mathcal{G}B_i\} = 0. \quad (13)$$

Definendo il vettore spostamento elettrico del mezzo come

$$D_i = E_i - 2c_1\mathcal{F}E_i - 2c_2\mathcal{G}B_i \quad (14)$$

si ottiene la familiare relazione

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (15)$$

Il vuoto può essere pensato come un mezzo la cui funzione di risposta è caratterizzata dal tensore dielettrico

$$\epsilon_{ij} \approx \delta_{ij} + c_1 (E^2 - B^2) \delta_{ij} + 2c_2 B_i B_j. \quad (16)$$

Per $\mu = 1$, l'equazione (12) diventa

$$\partial_0 \{F^{i0} - 2c_1\mathcal{F}F^{i0} - 2c_2\mathcal{G}\tilde{F}^{i0}\} + \partial_j \{F^{ij} - 2c_1\mathcal{F}F^{ij} - 2c_2\mathcal{G}\tilde{F}^{ij}\} = 0. \quad (17)$$

Il contenuto della prima parentesi è $-D_i$. Sostituendo le componenti F^{ij} e \tilde{F}^{ij} e gli invarianti \mathcal{F} e \mathcal{G} si trova che il contenuto della seconda parentesi può essere scritto come $\varepsilon_{ijk}H_k$ dove

$$H_k = B_k - 2c_1\mathcal{F}B_k + 2c_2\mathcal{G}E_k. \quad (18)$$

Quindi si ha

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} - \varepsilon_{ijk}\partial_j H_k = 0 \quad (19)$$

cioè

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \quad (20)$$

che permette di trattare il *vuoto* come un mezzo con tensore di permeabilità magnetica dato da

$$\mu_{ij} \approx \delta_{ij} + c_1 (B^2 - E^2) \delta_{ij} + 2c_2 E_i E_j. \quad (21)$$

Pensando al *vuoto* come ad un mezzo con una funzione di risposta elettromagnetica non banale si ottiene il vantaggio di usare la nostra conoscenza dell'elettromagnetismo nei materiali per investigare alcuni interessanti fenomeni suggeriti da questa analogia. In particolare, alla luce di quanto detto, configurazioni di campo semplici come quella di un condensatore a facce piane e parallele o di un filo infinito percorso da corrente differiscono dalle descrizioni fornite dalla fisica classica. Più in dettaglio, l'introduzione di distribuzioni macroscopiche di cariche e di correnti $J_a = (\rho, \vec{J})$ corrisponde al termine aggiuntivo $\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^a A_a$ nella Lagrangiana (11). Nell'ipotesi di conservazione di carica ($\partial_\mu J^\mu = 0$), le equazioni di Eulero-Lagrange diventano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (22)$$

In condizioni stazionarie ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$), per un filo di lunghezza infinita percorso da una corrente I si ottiene la relazione

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (23)$$

Le consuete argomentazioni di simmetria indicano che il campo \vec{H} deve avere un'unica componente $H = I/2\pi r$ tangenziale alla circonferenza C di raggio r ,

lungo la quale è calcolato l'integrale (23). Trascurando in (18) la dipendenza da E , si ottiene per B la seguente espressione²

$$B \approx \frac{I}{2\pi r} (1 + c_1 B^2) = \frac{I}{2\pi r} (1 + 2c_1 u) \quad (24)$$

dove si è posto $u = B^2/2$. Essendo, come si vedrà in seguito, $c_1 > 1$, l'equazione trovata dice che $B > I/(2\pi r)$. La giustificazione si ottiene ragionando in termini delle coppie virtuali presenti nel *vuoto* descritto dalla QED: la presenza di un campo magnetico esterno produce un allineamento dei dipoli magnetici delle coppie virtuali dando luogo ad un campo magnetico indotto che si somma a quello prodotto dalla corrente. Poichè per produrre una variazione dell'1% occorre un campo B dell'ordine di 4.3×10^{10} T, la verifica sperimentale di questa correzione non è attuabile con la presente tecnologia.

Più interessante è il fatto, oggetto dell'esperimento PVLAS (Polarizzazione del Vuoto e LAser), che la velocità della luce possa essere alterata dalla presenza di campi esterni, una conclusione completamente opposta alla teoria lineare delle equazioni di Maxwell.

Durante gli anni 70-80 un gruppo di ricercatori italiani al CERN condusse uno studio sulle proprietà dello stato fisico *vuoto* e la loro osservabilità: in particolare affrontarono il problema di misurare la velocità della luce, quando questa si propaga in uno spazio privo di materia in presenza di un forte campo magnetico in funzione dell'intensità di quest'ultimo. Tale dipendenza, quantitativamente molto piccola, rispecchia la possibile polarizzazione da parte del campo magnetico, delle fluttuazioni del *vuoto* con la conseguente modifica dei valori della costante dielettrica ϵ e della permeabilità magnetica μ dello spazio ($c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$). Nel 1983 [3, 4] venne realizzato al CERN un apparato sperimentale di prova che diventò in seguito l'archetipo per questo tipo di esperimenti ed ovviamente per lo stesso PVLAS: un fascio di luce monocromatica linearmente polarizzata (prodotta da un laser ad Argon) attraversa più volte una regione di *vuoto* in presenza di un campo magnetico dipolare \vec{B}_{EXT} , orientato ortogonalmente alla direzione di propagazione del fascio. L'esperimento consiste nel rivelare la piccolissima ellitticità acquistata dal fascio di luce durante l'attraversamento della regione magnetica. Tale ellitticità Ψ_{QED} è legata al valore della velocità della luce e questo valore, diverso da c , dipende dalla relativa orientazione del vettore \vec{B}_{EXT} rispetto

²L'assunzione che i campi in questione siano lentamente variabili unita alla richiesta che $c_1 B^2$ rimanga una piccola correzione, pone dei limiti sulla validità della relazione a correnti I grandi ed a grandi distanze r .

al campo elettrico $\vec{E}_F(t)$ associato al fascio luminoso. Gli indici di rifrazione del vuoto in presenza del campo magnetico (in ogni caso sempre maggiori di uno) sono dati dalle seguenti espressioni approssimate

$$\begin{cases} n_{\parallel} = 1 + c_2 B_{EXT}^2 \\ n_{\perp} = 1 + c_1 B_{EXT}^2 \end{cases} \quad (25)$$

dove n_{\parallel} e n_{\perp} sono rispettivamente gli indici di rifrazione per luce polarizzata parallelamente ed ortogonalmente a \vec{B}_{EXT} . I corrispondenti valori previsti dalla QED sono [5]

$$\begin{cases} n_{\parallel} = 1 + 7A_e B_{EXT}^2 \\ n_{\perp} = 1 + 4A_e B_{EXT}^2 \\ A_e = \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{\lambda_e^3}{m_e c^2} = \frac{4}{3} \times 10^{-32} \text{ cm}^3/\text{erg} \end{cases} \quad (26)$$

dove A_e è una quantità legata alla teoria dell'elettrodinamica quantistica, λ_e è la lunghezza d'onda Compton ridotta dell'elettrone ed m_e è la sua massa a riposo. Quindi lo spazio privo di materia pesante attraversato dalla luce in presenza di un forte campo magnetico si comporta come un cristallo debolmente uniassico.

In conclusione una misura dell'ellitticità

$$\Psi_{QED} = \pi (n_{\parallel} - n_{\perp}) \frac{L}{\lambda} \quad (27)$$

dove L è la lunghezza della regione magnetica e λ è la lunghezza d'onda della luce, comporta una determinazione sperimentale di A_e e quindi un test diretto di una delle correzioni più significative apportate all'elettromagnetismo classico dalla quantizzazione del campo elettromagnetico (esistenza dell'interazione fotone-fotone).

L'apparato realizzato ha permesso lo studio degli effetti spuri, dei rumori da minimizzare e la comprensione della cavità ottica da utilizzare per poter, con molte riflessioni della luce in cavità, aumentare l'effetto osservabile. Sebbene lontano dalla sensibilità necessaria, il metodo ottico proposto indicava la giusta direzione da seguire per evidenziare l'effetto. Nel quadro di questi studi, tesi a massimalizzare l'effetto, il Dott. M. Morpurgo realizzò e mise in funzione al CERN nel 1982 un prototipo di magnete dipolo superconduttore raffreddato all'elio superfluido; il campo ottenuto fu di circa 8 T e rappresentò all'epoca un primato mondiale [6].

Nell'ambito dello studio teorico sulla ricerca di altre possibili cause legate alle fluttuazioni del *vuoto* che possono dare origine ad ellitticità supplementari, L.Maiani, R.Petronzio ed E. Zavattini [7] misero in luce per la prima volta la possibilità di affrontare con l'apparato ottico realizzato una ricerca originale ed appassionante sull'esistenza dell'*assione leggero*, una particella bosonica neutra a spin nullo con massa inferiore al meV. Indicazioni teoriche richiedono l'esistenza di tale particella giustificando la sinora mancata osservazione con il suo debole accoppiamento alla materia ordinaria. Se tale particella esistesse, con massa sufficientemente piccola, i seguenti effetti sarebbero osservabili con l'apparato ottico montato:

1. l'ellitticità totale osservata dopo un attraversamento della regione magnetica dovrebbe contenere un contributo aggiuntivo a quello dato da (27), dovuto al *mescolamento coerente* del campo assionico con quello elettromagnetico;
2. durante ogni passaggio nella regione magnetica, una parte della luce, piccolissima peraltro, dovrebbe essere convertita in assione determinando una rotazione del piano di polarizzazione della luce (dicroismo).

L'interesse più vivo per questa particella si ha in Astrofisica. Infatti in questo campo una delle questioni cruciali che ci si pone è di che cosa sia costituita la cosiddetta *massa mancante* (o *massa oscura*) dell'Universo in cui gli ammassi di stelle sembrano essere immersi e che conferisce loro le proprietà cinetiche che si osservano. Una delle soluzioni invocate è appunto quella di assumere l'esistenza di un assione neutro, leggero e con vita media molto lunga, paragonabile all'età dell'Universo il quale riempie lo spazio cosmico. I test effettuati al CERN e l'importanza del problema della massa mancante convinsero un gruppo di fisici dell'Università di Trieste (Gruppo LAS), dell'Università di Rochester (USA) e dei Laboratori B.N.L. del Fermilab (USA) a realizzare al completo il dispositivo suggerito e studiato al CERN ed ad intraprendere la ricerca dell'assione leggero o perlomeno, nel caso in cui questo non si trovasse, a stabilire limiti significativi sulla possibile sua esistenza con osservazioni eseguite su esperimenti interamente terrestri. Il risultato principale di questa ricerca, terminata nel 1993, nella quale non si è trovata alcuna prova a favore dell'esistenza dell'assione, è l'aver fornito limiti per i valori della costante di accoppiamento assione-fotone-fotone e per la massa dell'assione stesso. I valori ottenuti verranno discussi nel Capitolo (1).

Ancora oggi i limiti più stringenti sulla non esistenza dell'assione leggero sono purtroppo forniti dall'analisi di osservazioni eseguite non su reazioni o fenomeni innescati in modo controllato nei laboratori terrestri, ma su fenomeni extraterrestri o su reazioni in laboratori terrestri in cui parte dei reagenti però è ipotizzata essere presente nello spazio in quantità sufficiente. Questa situazione spiega tra l'altro l'impulso da parte degli sperimentatori a proseguire il suddetto tipo di ricerca con apparati ottici sempre più performanti.

L'esperimento montato ai B.N.L. è stato un successo per la ricerca di limiti sugli assioni leggeri, non ha però raggiunto la sensibilità necessaria per misurare la costante A_e . Questo è l'obiettivo primario in cui sono oggi impegnati alcuni gruppi nei vari laboratori del mondo. I diversi apparati proposti sono del tipo dell'apparato realizzato al CERN nel 1983 nei quali però si deve tener conto degli ultimi progressi della tecnica:

1. la possibilità oggi di avere facilmente zone magnetiche lunghe e con campi magnetici elevati;
2. la disponibilità di avere specchi interferenziali di grande qualità per cui le cavità ottiche da impiegare possono essere del tipo Fabry-Pérot piuttosto che del tipo a multipassaggi ottenendo così un maggior numero di passaggi della luce con un conseguente aumento dell'effetto da osservare;
3. la disponibilità di laser con più basso rumore in ampiezza e maggiore stabilità in frequenza.

L'esperimento PVLAS ha scelto come configurazione quella in cui il magnete ruota materialmente su se stesso con l'asse coincidente con l'asse della zona magnetica cilindrica (lunga circa 1 m) alla frequenza di circa 1 Hz. Nella zona magnetica è inserita, solidale col terreno ed indipendente dal magnete, una cavità ottica verticale di tipo Fabry-Pérot lunga circa 5 m. L'apparato, finanziato dall'INFN-Gruppo II, è attualmente in costruzione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro. Nella tesi verranno descritti gli sviluppi raggiunti principalmente nell'ottica. Per la calibrazione dell'apparato si è lavorato su un effetto noto: la polarizzabilità dei gas in campi magnetici trasversi (effetto Cotton-Mouton), fornendo risultati nuovi quali la misura della costante Cotton-Mouton per l'Ossigeno molecolare per $\lambda = 1064$ nm, per la quale esistono calcoli teorici ma non precedenti misure sperimentali.

Capitolo 1

GLI EFFETTI DISPERSIVI MAGNETICI

1.1 La birifrangenza magnetica del vuoto

Nell'ambito della QED il vuoto è considerato lo stato fisico fondamentale del campo elettromagnetico. Questo, come tutti gli stati fisici quantistici, è soggetto a fluttuazioni che si manifestano attraverso la creazione di coppie virtuali di particelle (principalmente elettroni e positroni). Queste coppie di particelle virtuali cariche possono essere polarizzate mediante campi elettromagnetici.

La trattazione teorica della polarizzazione del vuoto [8, 9, 10] è assai complessa e per questo saranno qui di seguito riportati solo gli aspetti caratteristici ed i risultati conclusivi.

Nel 1936 Euler ed Heisenberg [8] derivarono la Lagrangiana efficace per descrivere il fenomeno della polarizzazione del vuoto dovuto ad un campo magnetico costante. Questo effetto può essere interpretato come *scattering fotone-fotone* tra un fotone di un fascio laser che attraversa la regione magnetica ed un fotone virtuale del campo magnetico. All'ordine più basso tale Lagrangiana è data da (in unità naturali razionalizzate) [8, 9]

$$\mathcal{L}_{EFF} = \mathcal{L}_{EFF}^{(0)} + \mathcal{L}_{EFF}^{(1)} = (-\mathcal{F}) + [4A_e\mathcal{F}^2 + 7A_e\mathcal{G}^2] \quad (1.1)$$

dove $\mathcal{F} = \frac{(B^2 - E^2)}{2}$, $\mathcal{G} = \vec{E} \cdot \vec{B}$ ed

$$A_e = \frac{\alpha^2 \lambda_e^3}{90\pi m_e c^2} = \frac{4}{3} \times 10^{-32} \text{ cm}^3/\text{erg} \quad (1.2)$$

con α costante di struttura fine, $\lambda_e = \hbar/m_e c$ lunghezza d'onda Compton ridotta per l'elettrone, m_e massa a riposo dell'elettrone.

In (1.1) il campo elettromagnetico (\vec{E}, \vec{B}) è la somma del campo del fascio laser linearmente polarizzato $(\vec{E}_F(t), \vec{B}_F(t))$ e del campo magnetico statico \vec{B}_{EXT} .

Il primo termine $\mathcal{L}_{EFF}^{(0)}$ è la Lagrangiana classica di Maxwell; il termine successivo $\mathcal{L}_{EFF}^{(1)}$ è proprio la correzione qui di interesse e che rientra nei fenomeni che si andranno a studiare. I diagrammi di Feynman corrispondenti (a), (b) sono mostrati in Fig.1.1. Tale Lagrangiana efficace è stata

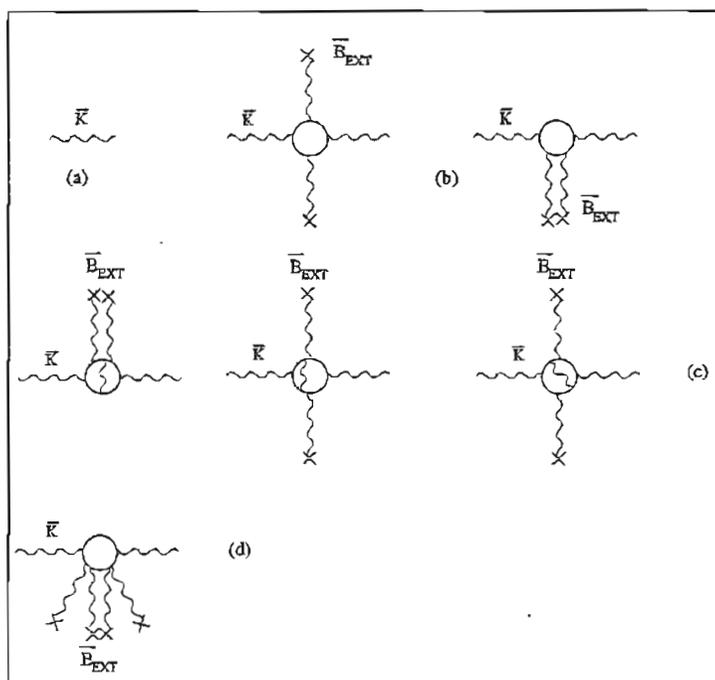


Figura 1.1: Diagrammi di Feynman: le linee circolari rappresentano i loop elettrone-positrone; le linee ondulate e le linee ondulate terminate da una croce rappresentano rispettivamente i fotoni del fascio laser con vettore d'onda \vec{K} e i fotoni virtuali associati al campo magnetico esterno \vec{B}_{EXT} . (a) Termine di Maxwell $\mathcal{L}_{EFF}^{(0)}$. (b) Correzioni descritte dal termine $\mathcal{L}_{EFF}^{(1)}$ proporzionali a $\alpha^2 B_{EXT}^2$. (c) Correzioni proporzionali a $\alpha^3 B_{EXT}^2$. (d) Correzioni proporzionali a $\alpha^2 B_{EXT}^4$.

ottenuta nell'ipotesi semplificativa di campo elettromagnetico costante. La

sua validità si estende, tuttavia, oltre questo limite: si tratta di una buona approssimazione anche nel caso in cui i campi abbiano variazione lenta nello spazio e nel tempo. La scala di variazione è posta dalla lunghezza d'onda Compton dell'elettrone $\lambda_e = 386.16$ fm e dal tempo associato a tale lunghezza $\bar{\tau}_e = \hbar/m_e c^2 = 1.288 \times 10^{-21}$ sec. I parametri sono quindi λ/λ_e e $\bar{\tau}/\bar{\tau}_e$ dove λ e $\bar{\tau}$ caratterizzano le variazioni spaziali e temporali del campo elettromagnetico. L'approssimazione è resa ancora migliore dal fatto che a causa dell'invarianza per trasformazioni di Lorentz e di gauge, la Lagrangiana efficace contiene derivate seconde del tensore $F^{\mu\nu}$. Le correzioni più basse, quindi, sono quadratiche nei parametri adimensionali definiti sopra. La dinamica di tutti i campi elettromagnetici macroscopici è accuratamente descritta dalla Lagrangiana efficace (1.1). Si è assunto inoltre che i campi elettromagnetici in questione siano molto inferiori ai valori di soglia $B \gg B_c = 4.4 \times 10^{13}$ G, $E \gg E_c = 1.3 \times 10^{18}$ V/m = B_c .

A partire da tale Lagrangiana, combinando le definizioni canoniche del vettore spostamento elettrico \vec{D} e del campo magnetico \vec{H}

$$\vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EFF}}{\partial \vec{E}} \quad \vec{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{EFF}}{\partial \vec{B}} \quad (1.3)$$

con le equazioni dell'elettromagnetismo nei materiali [11]

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.4)$$

dove ϵ e μ rappresentano le grandezze tensoriali costante dielettrica e permeabilità magnetica, è possibile definire, come accennato nell'Introduzione, le caratteristiche ottiche del vuoto in presenza di un campo elettromagnetico costante. Si ottengono le relazioni

$$D_i = E_i - 4A_e (B^2 - E^2) E_i + 14A_e \vec{E} \cdot \vec{B} B_i \quad (1.5)$$

$$H_i = B_i - 4A_e (B^2 - E^2) B_i - 14A_e \vec{E} \cdot \vec{B} E_i \quad (1.6)$$

da cui

$$\epsilon_{ij} \approx \delta_{ij} + 4A_e (E^2 - B^2) \delta_{ij} + 14A_e B_i B_j \quad (1.7)$$

$$\mu_{ij} \approx \delta_{ij} + 4A_e (B^2 - E^2) \delta_{ij} + 14A_e E_i E_j \quad (1.8)$$

coincidenti, non appena si ponga $c_1 = 4A_e$ e $c_2 = 7A_e$, con le espressioni dedotte nell'Introduzione sfruttando le sole proprietà di invarianza.

I termini non lineari che emergono indicano che il principio di sovrapposizione degli effetti non vale più: la propagazione di un'onda elettromagnetica nel vuoto risente della presenza di un campo esterno.

Si supponga che l'onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata si propaghi nel campo magnetico in direzione ortogonale al campo stesso. Sotto le seguenti ipotesi:

- 1) valga l'approssimazione di campo debole: $|\vec{B}_F| \ll |\vec{B}_{EXT}|$,
- 2) si considerino solo i termini lineari in $\vec{E} = \vec{E}_F$ in (1.5) e (1.6)

si ottengono le seguenti relazioni

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + 10A_e B_{EXT}^2 \quad \mu_{\parallel} = 1 + 4A_e B_{EXT}^2 \quad (1.9)$$

$$n_{\parallel} = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}} \approx 1 + 7A_e B_{EXT}^2 \quad (1.10)$$

se il vettore campo elettrico dell'onda elettromagnetica è parallelo al campo esterno;

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - 4A_e B_{EXT}^2 \quad \mu_{\perp} = 1 + 12A_e B_{EXT}^2 \quad (1.11)$$

$$n_{\perp} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}} \approx 1 + 4A_e B_{EXT}^2 \quad (1.12)$$

se il vettore campo elettrico dell'onda incidente è ortogonale alla direzione del campo magnetico.

Pertanto si ha

$$\Delta n_{QED} = n_{\parallel} - n_{\perp} = 3A_e B_{EXT}^2 \approx 4 \times 10^{-32} B_{EXT}^2 \quad (1.13)$$

con B_{EXT} espresso in Gauss.

Il vuoto, polarizzato dal campo magnetico, non è più isotropo e si comporta, per la radiazione che lo attraversa, come un cristallo debolmente uniascico. È interessante osservare che le espressioni $n_{\perp} - 1$ e $n_{\parallel} - 1$, entrambe positive, sono determinate rispettivamente dai coefficienti di \mathcal{F}^2 , $4A_e$, e di \mathcal{G}^2 , $7A_e$ nell'espressione (1.1): una misura di Δn_{QED} mostra che la violazione delle equazioni di Maxwell è realmente dovuta alla presenza di coppie virtuali elettrone-positrone, come affermato dalla QED.

L'ellitticità (Fig.1.2) indotta sul fascio laser di lunghezza d'onda λ linearmente polarizzato ad un angolo ϑ rispetto alla direzione del campo magnetico che attraversa una regione magnetica di dimensione lineare L è [12]

$$\Psi_{QED} = \frac{a}{b} = \pi \frac{L}{\lambda} \Delta n_{QED} \sin(2\vartheta). \quad (1.14)$$

L'utilizzo di una cavità Fabry-Pérot permette di amplificare il cammino

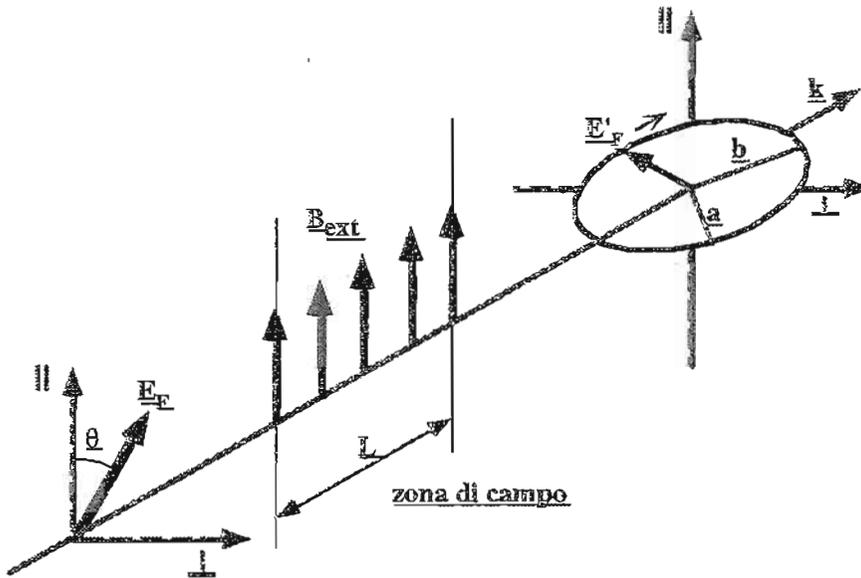


Figura 1.2: Schema dell'ellitticità acquistata da un fascio laser nell'attraversare una regione magnetica in vuoto.

ottico della luce all'interno della regione magnetica di un fattore $2F/\pi$ dove F è la finezza della cavità. Pertanto supposto $F = 100\,000$, con i parametri dell'esperimento ($L = 0.9$ m, $\lambda = 1.064$ μm , $B_{EXT} = 8.8$ T) e per $\vartheta = 45^\circ$ si ha

$$\Psi_{QED} = 5.2 \times 10^{-11}. \quad (1.15)$$

La correzione $\mathcal{L}_{Spin0}^{(1)}$ dovuta a particelle bosoniche di massa m_p a spin 0

è stata calcolata da Schwinger [10]

$$\mathcal{L}_{Spin0}^{(1)} = \frac{7}{4} A_p (E^2 - B^2)^2 + A_p (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \quad (1.16)$$

dove

$$A_p = \frac{\alpha^2 (\hbar/m_p c)^3}{90\pi m_p c^2}. \quad (1.17)$$

Poichè il termine correttivo scala come l'inverso della quarta potenza della massa ed il bosone più leggero è il pione che ha una massa circa 300 volte quella dell'elettrone, $\mathcal{L}_{Spin0}^{(1)}$ è trascurabile rispetto a $\mathcal{L}_{EFF}^{(1)}$.

1.2 Correzioni di ordine superiore

Come osservato da Adler [13] la Lagrangiana di Euler-Heisemberg, vista in termini dei diagrammi di Feynman, contiene solo i grafici di interazione fotone-fotone ad anello. Tali grafici sono tutti costituiti da un loop elettrone-positrone con intorno, per il teorema di Furry, un numero pari di gambe fotoniche. Le correzioni di ordine superiore sono pertanto del tipo mostrato dai diagrammi (c) di Fig.1.1.

La Lagrangiana associata alle correzioni radiative (c) di Fig.1.1 è stata derivata da V.I.Ritus [14] per campi molto inferiori ai valori critici e recentemente ricontrrollata da D.Bakalov [15]

$$\mathcal{L}_{EFF}^{(2)} = 4A_e \xi_1 \mathcal{F}^2 + 7A_e \xi_2 \mathcal{G}^2 \quad (1.18)$$

dove

$$\xi_1 = \frac{45}{2} \frac{16}{81} \frac{\alpha}{\pi} \quad \xi_2 = \frac{45}{14} \frac{263}{162} \frac{\alpha}{\pi}. \quad (1.19)$$

Si noti che ad eccezione dei differenti coefficienti, questo termine ha forma simile alla lagrangiana dominante $\mathcal{L}_{EFF}^{(1)}$. Il calcolo dettagliato indica che i coefficienti dei due invarianti \mathcal{F} e \mathcal{G} regolano anche in questo caso la velocità della luce lungo due direzioni mutuamente ortogonali ed ortogonali alla direzione di propagazione. Gli indici di rifrazione sono infatti dati da

$$n_{\parallel} = 1 + 7A_e \xi_1 B_{EXT}^2 \quad n_{\perp} = 1 + 4A_e \xi_2 B_{EXT}^2. \quad (1.20)$$

Al second'ordine, la differenza tra gli indici di rifrazione diverrà

$$\Delta n_{QED} = 3A_e B_{EXT}^2 \left[1 + \frac{25}{4} \frac{\alpha}{\pi} \right] \quad (1.21)$$

Le correzioni radiattive sono dunque di ordine α/π rispetto al termine dominante.

Sebbene gli effetti dello scattering luce-luce (b) (Fig.1.1) siano stati osservati come piccole correzioni in altri contesti, la correzione (1.21) a questi effetti non è ancora stata osservata: è da sottolineare comunque che questa correzione è solo l'1.45% del termine dominante.

I contributi dovuti alle correzioni di ordine superiore descritte dai diagrammi di Feynman di tipo (d) (Fig.1.1) sono riportati da Adler [13]. Il risultato completo riportato in [13] è

$$\Delta n_{QED} = \left[\frac{\alpha}{30\pi} + \frac{135}{648} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right] \left(\frac{B_{EXT}}{B_c} \right)^2 + \frac{11\alpha}{315\pi} \left(\frac{B_{EXT}}{B_c} \right)^4. \quad (1.22)$$

L'effetto aggiuntivo, pari a $10^{-70} B_{EXT}^2$, è del tutto trascurabile.

1.3 Birifrangenza magnetica e rotazione dovute al mescolamento assione-fotone

L'assione è una particella bosonica pseudoscalare neutra a spin zero ipotizzata da Peccei e Quinn [16] nel 1977 per risolvere il problema dell'invarianza per trasformazioni di coniugazione di carica e parità delle interazioni forti [17, 19]. Tale assione detto *invisibile* ha diverse implicazioni astrofisiche e cosmologiche¹: essendo leggero e debolmente interagente può trasportare energia dall'interno delle stelle contribuendo ad accelerare il processo di raffreddamento [20]; inoltre risulta un possibile candidato per la materia *oscura* degli aloni galattici [21] richiesta per spiegarne la rotazione anomala. La materia oscura si sarebbe formata all'epoca del big bang e la sua presenza potrebbe modificare i parametri utilizzati nei modelli evolutivi dell'universo.

L'assione si accoppia tramite fermioni a due fotoni, similmente al π^0 , mediante un meccanismo noto come *anomalia triangolare elettromagnetica* (Fig.1.3 (a)). Conseguentemente l'assione può essere prodotto da fotoni che si propagano in un campo magnetico statico \vec{B}_{EXT} attraverso l'effetto Primakoff (Fig.1.3 (b)) e se è molto leggero si può ottenere un fenomeno di

¹Eventuali bosoni neutri scalari a spin 0 potrebbero invece essere le particelle che mediano una ipotetica nuova interazione che si sommerebbe a quella gravitazionale, portando ad una variazione della legge di Newton ricercata sin dalle prime misure di Eötvös negli anni 30.

mescolamento tra il fotone e l'assione stesso [23]. Gli studi astrofisici forniscono limiti indiretti (basati su modelli teorici) superiori per la massa m_a dell'assione, mentre la cosmologia dà limiti inferiori. L'insieme di questi

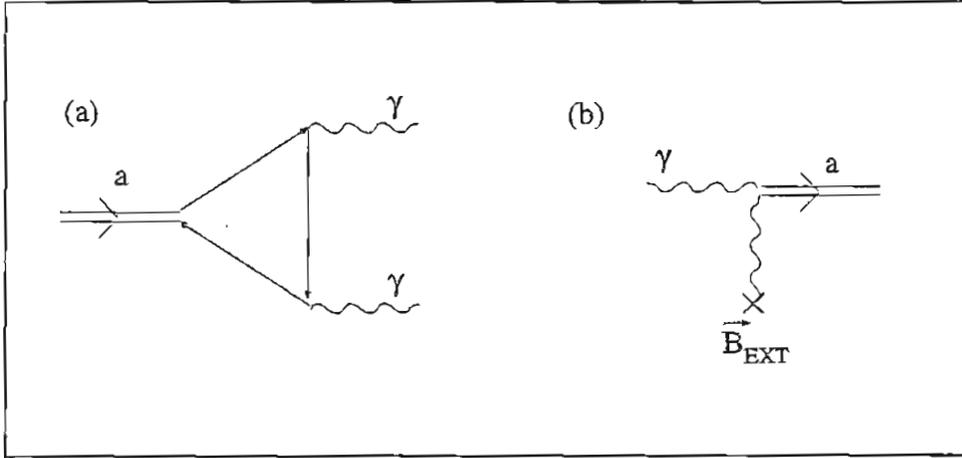


Figura 1.3: (a) Accoppiamento dell'assione a a due fotoni γ attraverso l'anomalia triangolare elettromagnetica. (b) Effetto Primakoff: produzione dell'assione da un fotone γ che si propaga in un campo magnetico statico \vec{B}_{EXT} .

lascia aperto un intervallo di valori pari [22]

$$10^{-6} \text{ eV} < m_a < 10^{-3} \text{ eV} \quad (1.23)$$

fissando contemporaneamente dei limiti sulla costante di accoppiamento a due fotoni $g_{a\gamma\gamma}$ mediante la relazione

$$g_{a\gamma\gamma} \sim \frac{m_a}{m_\pi} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{f_\pi} \quad (1.24)$$

dove $m_\pi = 135 \text{ MeV}$ e $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ sono rispettivamente la massa e la costante di decadimento del pione neutro. Le stime per $g_{a\gamma\gamma}$ sono dell'ordine di $10^{-13} \text{ GeV}^{-1}$, ben al di sotto della scala debole.

Si consideri un fascio di fotoni di energia ω che si propaga in una regione di campo magnetico trasverso². In unità naturali razionalizzate, la den-

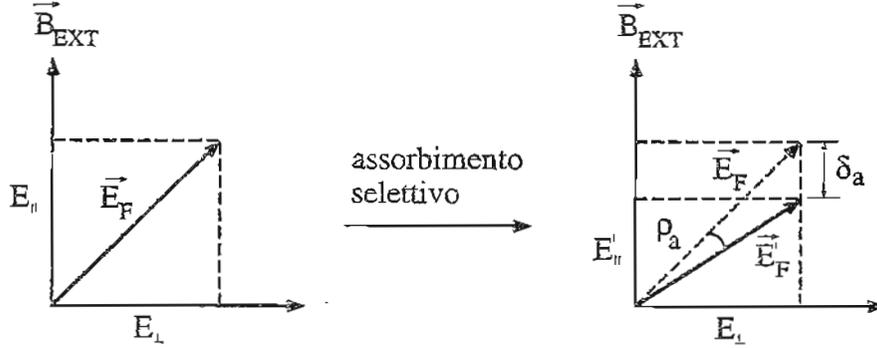


Figura 1.4: Rotazione ρ_a dovuta all'assorbimento selettivo di una componente del campo elettrico del fotone \vec{E}_F .

sità di Lagrangiana di una particella pseudoscalare, di cui la parola assione costituisce qui una generalizzazione, in un campo elettromagnetico è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}a \partial^{\mu}a - m_a^2 a^2) + \frac{1}{4M}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}a \quad (1.25)$$

dove a è il campo assionico, $F^{\mu\nu}$ è la somma dei contributi del campo esterno $F_{\mu\nu}^{EXT}$ e del campo A_{μ} dei fotoni del fascio laser

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{EXT} + \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \quad (1.26)$$

ed M è l'inverso della costante di accoppiamento $M = 1/g_{a\gamma\gamma}$. Per un campo magnetico statico e fotoni reali, il terzo termine in (1.25) diventa

$$\frac{1}{M}(\vec{E}_F \cdot \vec{B}_{EXT})a \quad (1.27)$$

²La conversione di un fotone in un assione a spin 0 comporta una variazione del numero quantico azimuthale J_z del momento angolare. Il fotone ha $J_z = \pm 1$ e l'assione $J_z = 0$. Un campo longitudinale (simmetria azimuthale) non può indurre una variazione in J_z .

dove \vec{E}_F è il campo elettrico dei fotoni. Dalla (1.27) si deduce che solo luce polarizzata parallelamente a \vec{B}_{EXT} produce assioni. Se la massa m_a delle particelle è inferiore all'energia ω dei fotoni, le particelle prodotte sono reali e si ha una conseguente attenuazione della componente parallela (dicroismo) di \vec{E}_F mentre l'altra componente rimane inalterata: il vettore campo elettrico della luce che lascia la regione di campo magnetico è pertanto ruotato di un piccolo angolo ρ_a come mostrato in Fig.1.4. Se l'assione prodotto interagisce con il campo esterno \vec{B}_{EXT} per riconvertirsi in un fotone reale (Fig.1.5), non c'è rotazione: la componente parallela della luce oscilla in un assione massivo per parte del suo cammino, ed è quindi ritardata in fase rispetto alla componente ortogonale. Il ritardo di fase si manifesta come un'ellitticità ψ_a del fascio emergente. L'assione che qui compare può non essere reale. Con la scelta del gauge di Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e con il campo esterno ortogonale alla direzione di propagazione, al prim'ordine nei campi del fotone e dell'assione le equazioni del moto sono

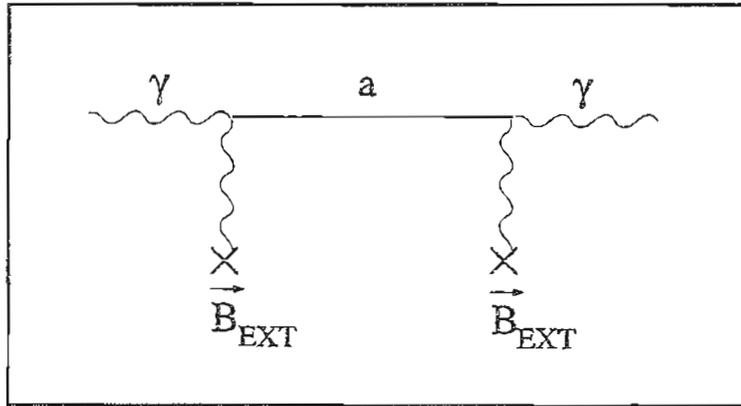


Figura 1.5: Produzione di assioni con riconversione.

$$\begin{cases} (\square + m_a^2) a - \frac{1}{M} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{B}_{EXT} = 0 \\ \square \vec{A} + \frac{1}{M} \dot{a} \vec{B}_{EXT} = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

Seguendo la trattazione svolta in [23], per soluzioni di tipo onda piana $e^{i(\omega t - kz)}$ che si propaga lungo z , le (1.28) possono essere scritte nella seguente forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \omega^2 + \partial_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 + \partial_z^2 & -iB_{EXT}\frac{\omega}{M} \\ 0 & iB_{EXT}\frac{\omega}{M} & \omega^2 + \partial_z^2 - m_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_P \\ a \end{pmatrix} = 0 \quad (1.29)$$

dove A_0 e A_P sono le componenti ortogonale e parallela al campo magnetico esterno B_{EXT} . Se il campo esterno è lentamente variabile nello spazio e nel tempo rispetto alla frequenza dei fotoni in maniera tale che

$$\omega^2 + \partial_z^2 = (\omega + i\partial_z)(\omega - i\partial_z) \approx (\omega + k)(\omega - i\partial_z) \approx 2\omega(\omega - i\partial_z) \quad (1.30)$$

l'equazione matriciale per le componenti accoppiate diventa

$$\left[\begin{pmatrix} \omega - i\partial_z & 0 \\ 0 & \omega - i\partial_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\Delta_M \\ i\Delta_M & \Delta_a \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_P \\ a \end{pmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

con

$$\Delta_M = \frac{B_{EXT}}{2M} \quad \Delta_a = -\frac{m_a^2}{2\omega}. \quad (1.32)$$

La matrice (1.31) può essere diagonalizzata ruotando i campi originali secondo un angolo di mescolamento ϑ_a definito dalla relazione

$$\frac{1}{2} \tan 2\vartheta_a = \frac{\Delta_M}{-\Delta_a} = \frac{B_{EXT}\omega}{m_a^2 M}. \quad (1.33)$$

Nell'ipotesi di mescolamento debole ($\frac{1}{2} \tan 2\vartheta_a \sim \vartheta_a$), lo shift di fase ϕ_a e l'attenuazione δ_a della componente $A_P(z)$ sono dati da [23, 7]

$$\phi_a = \vartheta_a^2 \left[\frac{m_a^2 z}{2\omega} - \sin \left(\frac{m_a^2 z}{2\omega} \right) \right] \quad (1.34)$$

$$\delta_a = 2\vartheta_a^2 \sin^2 \left(\frac{m_a^2 z}{4\omega} \right). \quad (1.35)$$

I parametri fisici che vengono misurati sono l'ellitticità ψ_a e la rotazione ρ_a del fascio che, per luce entrante nella regione magnetica con polarizzazione ad un angolo di 45° rispetto al campo magnetico, sono, rispettivamente la metà dello shift di fase e dell'attenuazione:

$$\psi_a = \frac{1}{2} \left[\frac{B_{EXT}^2 \omega^2}{M^2 m_a^4} \right] \left[\frac{m_a^2 L}{2\omega} - \sin \left(\frac{m_a^2 L}{2\omega} \right) \right] \approx \frac{(B_{EXT} m_a)^2 L^3}{96\omega M^2} \quad (1.36)$$

$$\rho_a = \left[\frac{B_{EXT}^2 \omega^2}{M^2 m_a^4} \right] \sin^2 \left(\frac{m_a^2 L}{4\omega} \right) \approx \frac{B_{EXT}^2 L^2}{16M^2} \quad (1.37)$$

Le relazioni approssimate valgono nell'ipotesi $\frac{m_a^2 L}{4\omega} \ll 1$: questa è la condizione di massima produzione di assioni reali. Infatti affinché si possa avere una produzione coerente di assioni reali i campi dell'assione e del fotone devono rimanere in fase lungo la lunghezza L della regione magnetica, cioè quindi deve essere

$$m_a^2 < \frac{2\pi\omega}{L}. \quad (1.38)$$

Questa relazione pone dei limiti sulla massa dell'assione che può essere rivelato.

L'utilizzo di una cavità Fabry-Pérot consente, anche in questo caso, di amplificare gli effetti. Tuttavia qualunque specchio fisico risulta trasparente agli assioni e quindi solo la componente fotonica del fascio viene riflessa: ogni riflessione agisce come un filtro che riporta la componente assionica del fascio a zero. L'aumento prodotto dalla cavità non si può quindi interpretare direttamente come un aumento del cammino ottico. Valgono pertanto le seguenti relazioni³

$$\psi_a = \frac{1}{2} \frac{2F}{\pi} \left[\frac{B_{EXT}^2 \omega^2}{M^2 m_a^4} \right] \left[\frac{m_a^2 L}{2\omega} - \sin \left(\frac{m_a^2 L}{2\omega} \right) \right] \approx \frac{F (B_{EXT} m_a)^2 L^3}{48\pi\omega M^2} \quad (1.39)$$

$$\rho_a = \frac{2F}{\pi} \left[\frac{B_{EXT}^2 \omega^2}{M^2 m_a^4} \right] \sin^2 \left(\frac{m_a^2 L}{4\omega} \right) \approx \frac{F B_{EXT}^2 L^2}{8\pi M^2}. \quad (1.40)$$

Nell'esperimento PVLAS è possibile effettuare misure separate dei due parametri ψ_a e ρ_a consentendo di ottenere informazioni su $g_{a\gamma\gamma}$ ed m_a indipendentemente dal modello scelto per descrivere l'assione. Un segnale positivo fornirà quindi direttamente massa e costante di accoppiamento della particella mentre la mancata rivelazione escluderà una zona del piano $(m_a, g_{a\gamma\gamma})$ ⁴.

1.4 I risultati dell'esperimento LAS

Nell'esperimento LAS [25] un fascio laser ($\lambda = 516$ nm) attraversava una regione di campo magnetico lunga 8.8 m. La corrente di alimentazione dei

³Si ricorda che $1 \text{ T} = 195 \text{ eV}^2$ e $1 \text{ m} = 5 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}$.

⁴In realtà bisognerà tener presente che alla birifrangenza misurata contribuisce anche l'effetto della birifrangenza magnetica del vuoto predetto della QED.

magneti superconduttori veniva modulata intorno al suo valore medio ad una frequenza massima di 80 mHz. Una linea ottica di ritardo (cavità multipass) forniva un'amplificazione del cammino ottico pari a 34. Il limite fissato per Δn_{QED} fu

$$\Delta n_{QED} < 10^{-18} \quad (1.41)$$

con $B_{EXT}^2 = 4 \times 10^8$ (Gauss)², ancora un fattore 6×10^4 dall'effetto cercato. Come si vedrà nel dettaglio in seguito, le modifiche introdotte in PVLAS dovrebbero fornire il guadagno necessario per la rivelazione dell'effetto.

Un limite di 3.5×10^{-10} rad fu posto sulla possibile rotazione della polarizzazione del fascio laser dovuta alla produzione di assioni reali per una effettiva lunghezza del cammino ottico di 2.2 Km in un campo magnetico di 3.25 T. Si concluse che non esistono particelle con massa $m_a < 10^{-3}$ eV che si accoppiano a due fotoni con forza $g_{a\gamma\gamma} > 3.6 \times 10^{-7}$ GeV⁻¹.

Il vincolo più stringente $g_{a\gamma\gamma} \sim 1 \times 10^{-10}$ GeV⁻¹ è stato ottenuto da considerazioni sull'evoluzione delle stelle [20].

Capitolo 2

APPARATO SPERIMENTALE E CALCOLO DEI SEGNALI ATTESI

2.1 Apparato sperimentale: generalità

L'apparato sperimentale si può naturalmente dividere in due parti: la regione magnetica, nella quale avviene l'interazione cercata e l'ellissometro che permette la misura della polarizzazione della luce.

L'ellissometro è costituito da due polarimetri incrociati, il polarizzatore P e l'analizzatore A. Il fascio laser incidente con polarizzazione lineare acquista, in presenza dell'effetto, una piccola ellitticità Ψ_{QED} prima di raggiungere l'analizzatore. L'intensità trasmessa da quest'ultimo è data da

$$I_T = I_C [\sigma^2 + \Psi_{QED}^2] \quad (2.1)$$

dove I_C è l'intensità incidente su A e σ^2 è il fattore di estinzione dell'ordine di $10^{-7} - 10^{-8}$. Poiché il valore calcolato per Ψ_{QED} è troppo piccolo (1.15), è necessario fare in modo che l'ellitticità da misurare sia presente nel segnale I_T almeno come termine lineare. Tale linearizzazione si ottiene introducendo sia una modulazione alla pulsazione ω_m nel segnale da rivelare sia un segnale di ellitticità nota (segnale portante) nella polarizzazione della luce

$$\psi_p(t) = \psi_0 \cos \omega_p t \quad (2.2)$$

—soggetto al controllo dello sperimentatore e di entità maggiore di quello che si vuole misurare.

L'interferenza tra il segnale portante ed il segnale introdotto dalla modulazione dell'effetto produce alle frequenze $\omega_p \pm 2\omega_m$ due segnali proporzionali al prodotto tra l'ampiezza del segnale portante ed il valore dell'ellitticità cercata. Poichè l'informazione di interesse si trova nelle due bande laterali rispetto alla frequenza portante, tale tecnica si può definire eterodina.

L'utilizzo della tecnica eterodina introduce due vantaggi:

1. la linearizzazione della dipendenza da Ψ_{QED} porta ad un miglioramento del rapporto segnale-rumore dell'ordine di ψ_0/Ψ_{QED} dove ψ_0 è l'ampiezza della portante;
2. il segnale di interesse è modulato a frequenze controllate dallo sperimentatore e può essere analizzato in frequenza.

Nell'esperimento PVLAS il segnale portante viene introdotto da un modulatore fotoelastico o dall'azione combinata di una lamina a quarto d'onda e di una cella di Faraday, le cui caratteristiche saranno, in entrambi i casi, descritte nel dettaglio in seguito.

Rispetto all'esperimento LAS [24, 25], nell'apparato in corso di realizzazione sono state introdotte due importanti modifiche con l'obiettivo di accrescere la grandezza dell'effetto e la sensibilità dell'apparato: esse riguardano la cavità ottica e la modulazione dell'effetto cercato. In LAS una linea ottica di ritardo costituita da una cavità a multipassaggi [26] permetteva una amplificazione del cammino ottico pari a 34 (per il test di QED). L'impiego di un risonatore ottico di tipo Fabry-Pérot di finezza 100 000 produce una amplificazione equivalente di circa 63 700. In LAS la modulazione dell'effetto veniva attuata attraverso la modulazione dell'ampiezza del campo magnetico, variando la corrente di alimentazione. Le caratteristiche costruttive del magnete superconduttore allora utilizzato non consentirono nè la modulazione di B_{EXT} con ampiezze pari al suo valore massimo nè modulazioni con frequenza superiore a poche decine di mHz. È stata quindi studiata la possibilità di porre il magnete superconduttore [6] in rotazione a velocità costante in maniera tale che il vettore \vec{B}_{EXT} ruotasse nel piano di polarizzazione della luce e quindi la modulazione dell'effetto (1.14) avvenisse attraverso la modulazione dell'angolo ϑ tra la direzione di polarizzazione della luce incidente e la direzione del campo magnetico. Gli studi condotti hanno evidenziato

la possibilità di ottenere frequenze di rotazione fino ad 1 Hz facendo uso di tecnologie disponibili commercialmente.

La nuova configurazione offre i seguenti vantaggi rispetto a quella adottata da LAS: l'ampiezza di modulazione di B_{EXT} è pari all'intensità massima del campo (8.8 T) e la frequenza di modulazione è circa 15 volte maggiore. Dal momento che il livello di rumore a basse frequenze f ha andamento $1/f$, il rapporto segnale-rumore aumenta di 15 volte o comunque tanto quanto è consentito dal resto dell'apparato. Questa aspettativa si basa da un lato sull'esperienza acquisita nelle misure di sensibilità in funzione della frequenza [27] e dall'altro sulle migliori caratteristiche del laser impiegato. Nell'esperimento LAS si usò un laser ad Argon, non stabilizzato, multimodo e con rumore in ampiezza causato dalla scarica del gas. Nell'esperimento PVLAS il laser è di tipo Nd:YAG a stato solido, stabilizzato, monomodo e con una cavità monoblocco che riduce le fluttuazioni di intensità.

Nella Tabella (2.1) sono riassunte le modifiche introdotte in PVLAS; il parametro G fornisce l'atteso miglioramento.

Parametro	LAS	PVLAS	G
B_{EXT}^2	4 T ²	80 T ²	20
Lunghezza Magnete	8.8 m	0.9 m	0.1
Amplificazione	34	63 700	1 870
Freq.Mod.	50 mHz	2 Hz	15
λ	512 nm	1064 nm	0.5
			28 000

Tabella 2.1: Miglioramenti introdotti nell'esperimento PVLAS.

Con un tempo di misura di circa 2×10^4 sec, il limite fissato da LAS [25] fu $\Psi_{QED} < 1.8 \times 10^{-9}$ con $B_{EXT}^2 = 4 \times 10^8$ G corrispondente a $\Delta n_{QED} < 10^{-18}$, un fattore circa 6×10^4 superiore all'effetto previsto ($\Delta n_{QED} \approx 1.6 \times 10^{-23}$). Essendo in PVLAS $\Delta n_{QED} \approx 3.2 \times 10^{-22}$, le modifiche introdotte sembrano permettere la realizzazione della misura. Ovviamente, come si vedrà in seguito, il guadagno atteso sarà fortemente dipendente dalla rumorosità ambientale e dalla stabilità del sistema.

2.1.1 Il sito finale e quello di test

In Fig.2.1 è rappresentato il prospetto dell'installazione completa. La struttura portante è realizzata in granito nero d'Africa e protegge l'apparato dalle

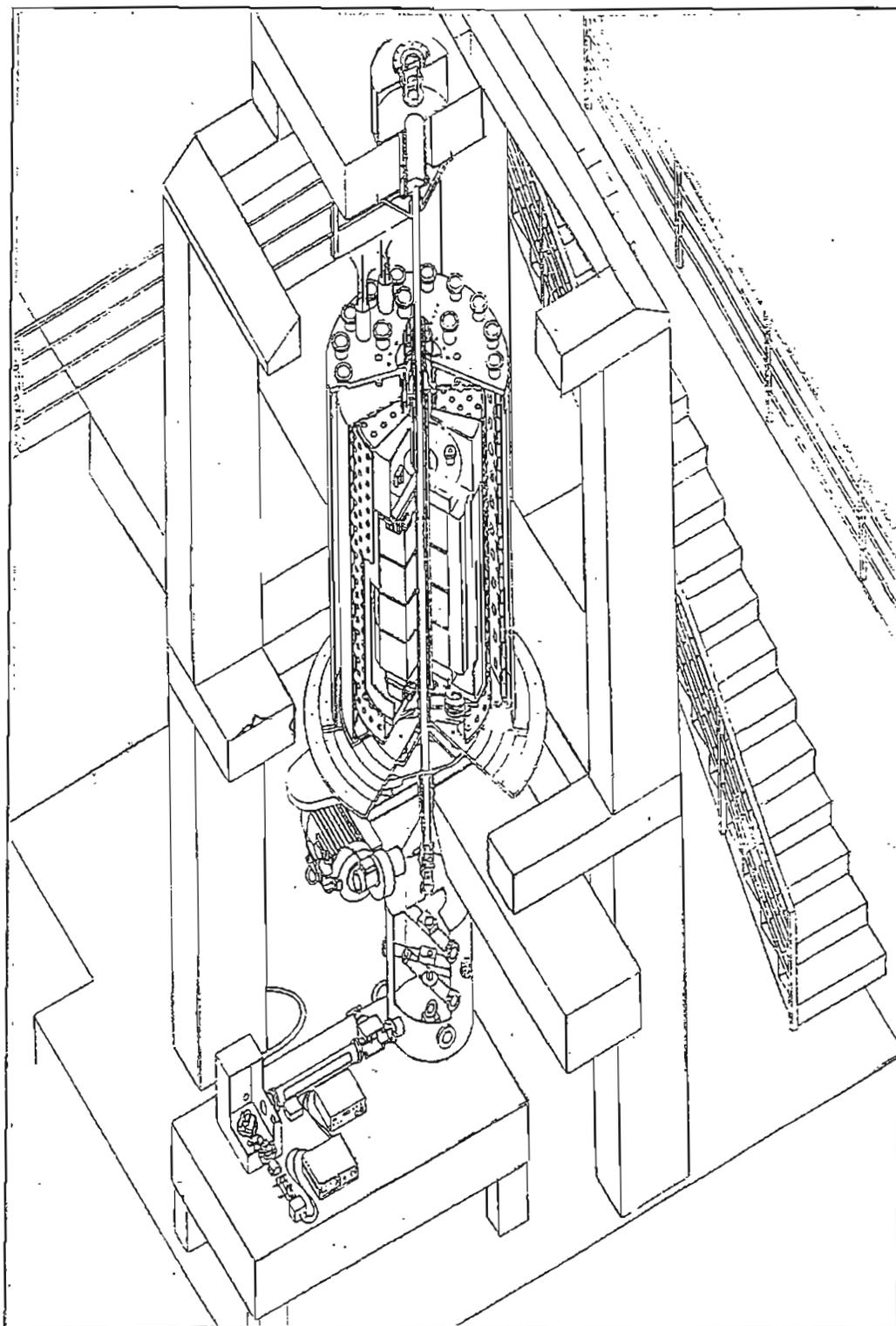


Figura 2.1: Disegno artistico dell'apparato completo di PVLAS.

variazioni ambientali.

L'intero apparato poggia su di un grosso blocco di cemento adagiato su un letto sabbioso separato dalle pareti circostanti. Tale accorgimento ha la finalità di ridurre al minimo l'accoppiamento con le sorgenti esterne di vibrazioni e ridurre così la rumorosità dell'apparato.

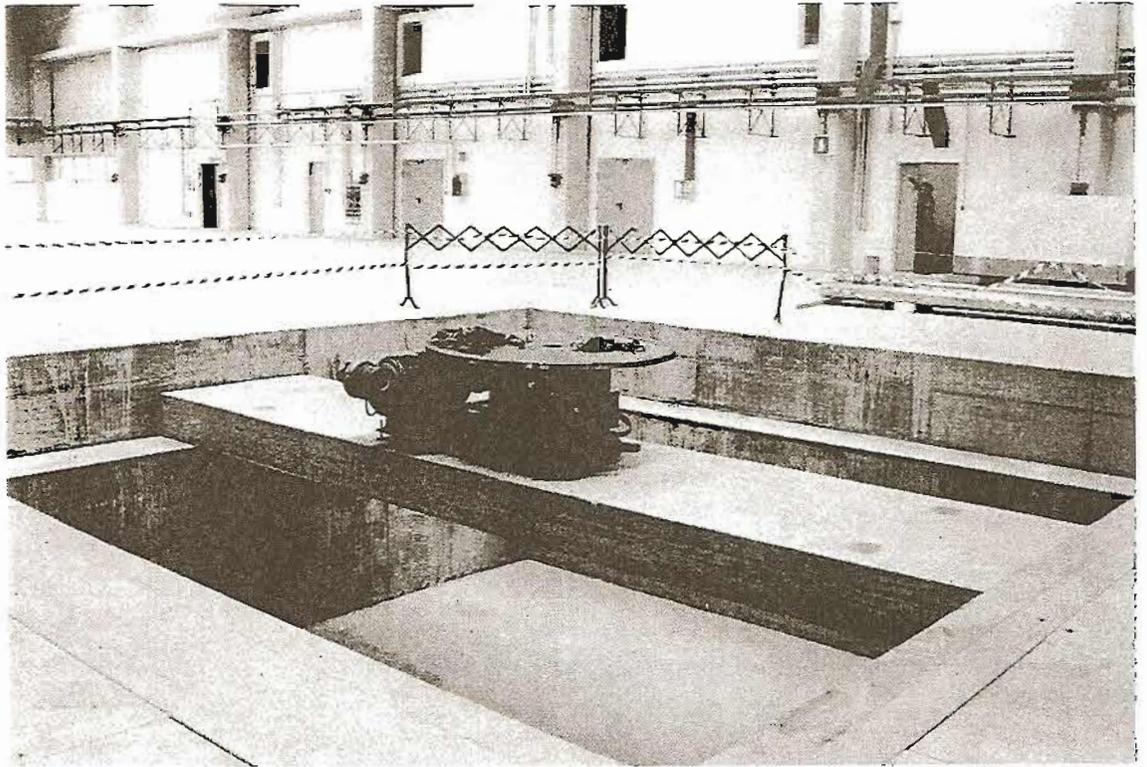
Nello schema si possono distinguere: il magnete inserito nel criostato che consente di mantenere la temperatura necessaria per la superconduttività anche durante la rotazione, quando sarà necessario rimuovere i collegamenti con i dispositivi criogenici, la tavola rotante che presenta centralmente un foro per il passaggio del fascio luminoso e la cavità Fabry-Pérot che occupa questo foro ed un foro cilindrico lungo l'asse del magnete del diametro di circa 3 cm. La cavità, di lunghezza complessiva 5 m, è contenuta entro un tubo in quarzo nel quale viene fatto il vuoto. In Fig.2.2 sono illustrate alcune fasi dell'installazione. La fotografia Fig.2.2 (a) mostra il sito finale dell'esperimento. Sulla trave di cemento armato è stata collocata la tavola rotante al cui centro è praticato un foro per l'alloggiamento della cavità. Sulla tavola rotante (Fig.2.2 (b)) è stato posizionato il magnete superconduttore per effettuare le prove di bilanciamento in rotazione. La fotografia Fig.2.2 (c) mostra l'installazione del criostato. Attualmente il magnete è stato collocato al suo interno e l'intero sistema è stato perfettamente bilanciato in rotazione alla frequenza di 1 Hz. In Fig.2.3 è schematizzato l'apparato sperimentale realizzato per gli studi preliminari che riproduce, in scala e senza il magnete, quello previsto per l'esperimento. È costituito da due banchi ottici in granito posti ad una distanza di circa 3 m. Tutt'intorno alla struttura è montata un'impalcatura che permette di accedere al banco ottico superiore per mezzo di una scala. Sul banco ottico inferiore, protetto da una copertura in plastica mobile, trovano posto la sorgente laser ed una serie di elementi ottici tra i quali uno specchio che riflette la luce verticalmente verso il fotodiodo PD_T. La parte verticale dell'apparato è costituita da una camera da vuoto contenente l'ellissometro formato dai due polarimetri A e P, dagli specchi della cavità Fabry-Pérot M₁ e M₂ e dal modulatore di ellitticità. La camera è un tubo di acciaio del diametro di circa 10 cm, chiuso alle estremità da due finestre in quarzo F₁ ed F₂ per permettere il passaggio della luce. Gli elementi ottici contenuti nella camera sono montati su flange prodotte dalla ditta Cinel posizionate su delle croci poste lungo il tubo. Esse permettono il movimento degli elementi ottici attraverso dei passanti meccanici da vuoto. I movimenti sui quali è possibile intervenire sono

30CAPITOLO 2. APPARATO SPERIMENTALE E SEGNALI PREVISTI

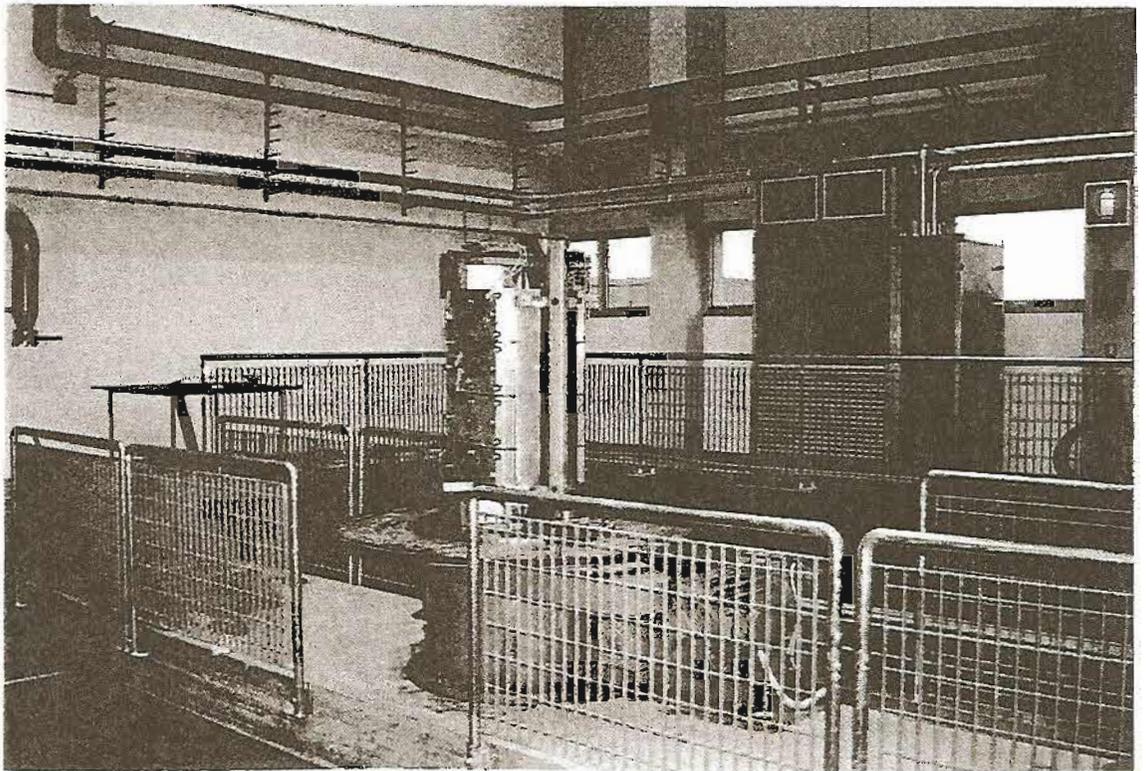
- traslazione lungo gli assi x e y con una corsa massima di circa 2 cm,
- rotazione intorno agli assi x e y con angolo massimo di qualche grado,
- rotazione completa intorno all'asse z .

Il corretto posizionamento degli specchi della cavità in vuoto risulta fondamentale quando si vuole realizzare una cavità ad alta finezza. Il vuoto viene ottenuto, in questa fase preliminare di allestimento dell'apparato, da una pompa a membrana (Modello Varian MD4) posta in serie ad una pompa a turbina (Modello Varian V70LP). Le due pompe sono montate all'altezza dell'analizzatore A e durante le misure vengono spente. La pressione, misurata con un Pirani, è stabile intorno al mbar. In questa fase di studio non è stato necessario raggiungere gli alti vuoti richiesti per il test di QED (Pressione minore di 10^{-8} Torr). In tal caso è previsto l'allestimento di un sistema da vuoto più raffinato con l'impiego di pompe ioniche. Qualora poi si voglia agire sui componenti ottici senza compromettere il vuoto raggiunto entro la cavità, è previsto un sistema di valvole di isolamento.

(a)



(b)



(c)

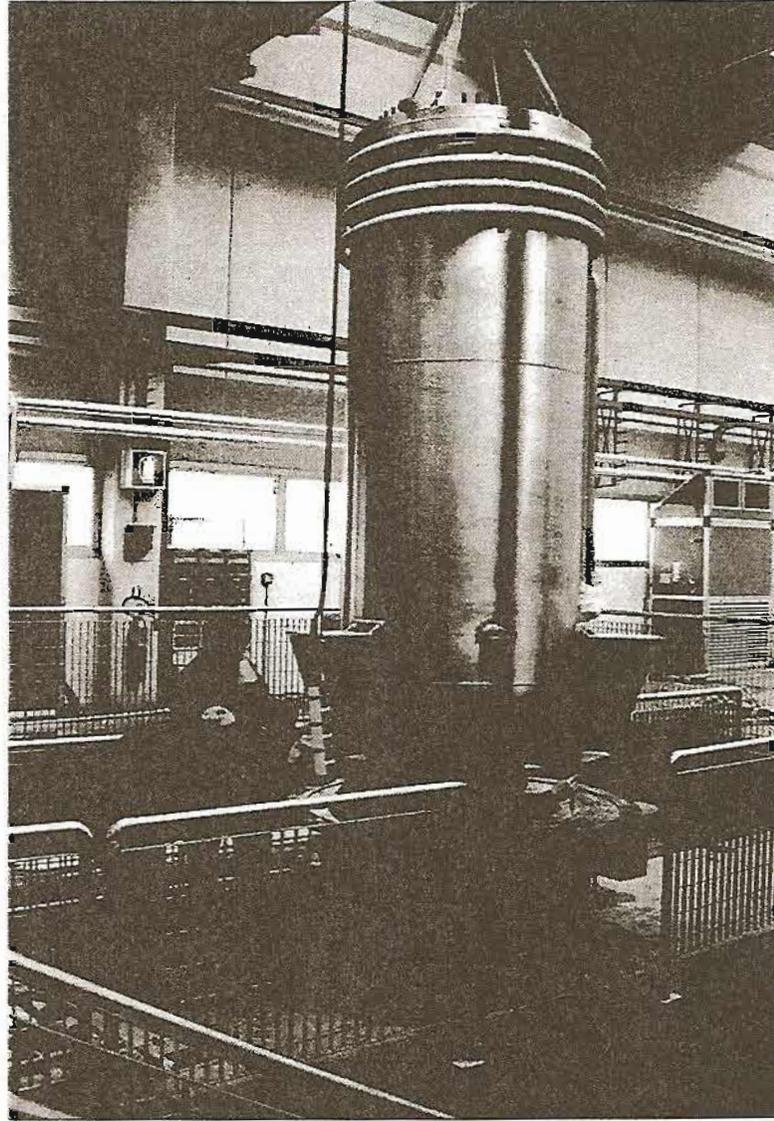


Figura 2.2: Fotografie di alcune fasi dell'installazione dell'apparato nel sito definitivo.

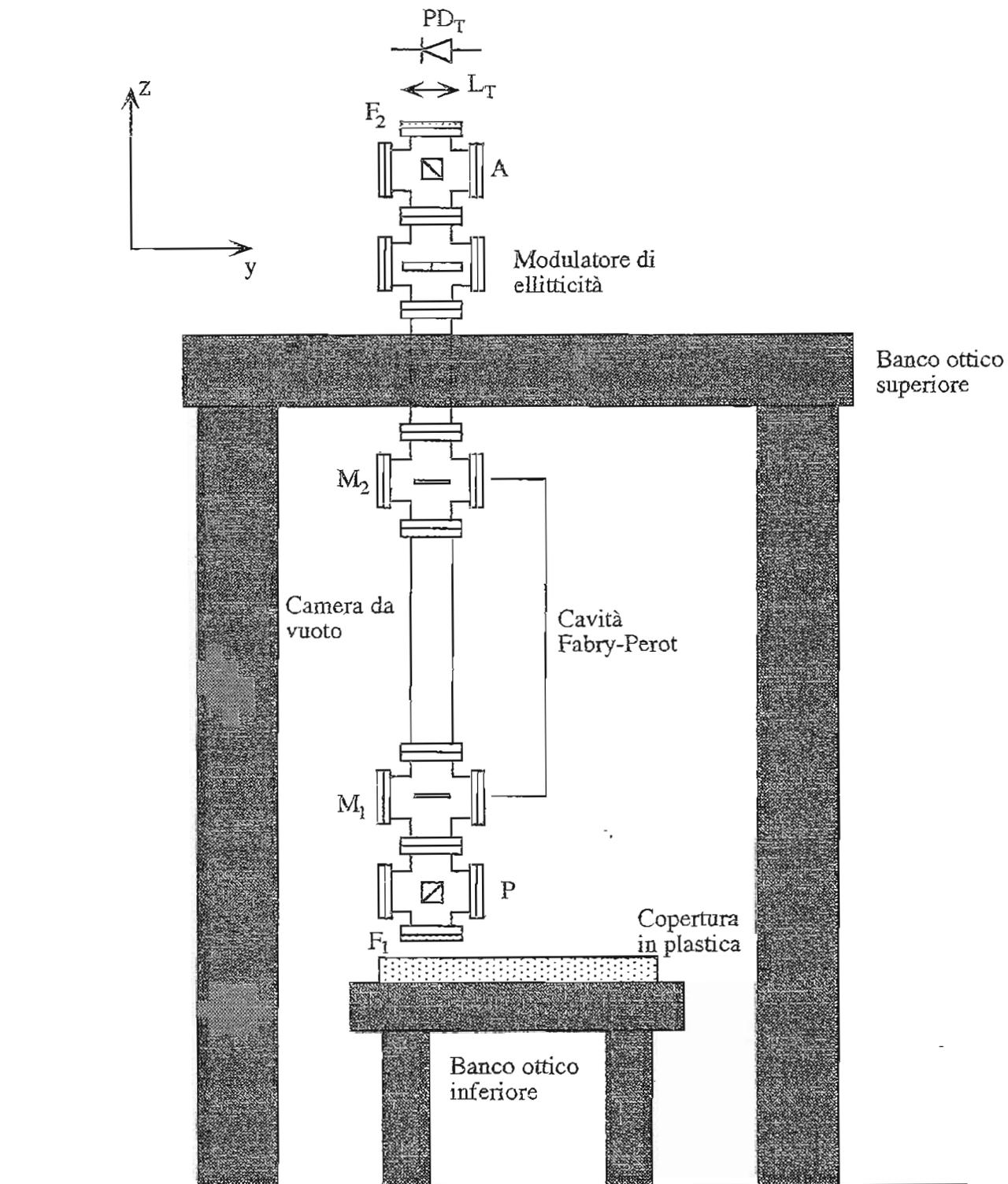


Figura 2.3: Schema dell'apparato sperimentale allestito per i test preliminari.

2.2 L'apparato ottico e l'ellissometro

In Fig.2.4 è dettagliato il montaggio dei vari componenti sul banco ottico sottostante la regione magnetica. Alla testa laser seguono l'isolatore ottico OI, alcuni componenti che fanno parte del sistema di asservimento del laser alla cavità (un beam splitter polarizzatore PP, una lente L_R , un fotodiodo PD_R e una cella di Faraday FC), un telescopio TL che adatta il fascio laser alla geometria fissata dalla cavità, due specchi S_1 e S_2 orientati a 45° che dirigono il fascio verso il terzo specchio S_3 . Quest'ultimo invia la luce lungo l'asse del magnete (coincidente con l'asse ottico della cavità). Attraverso la finestra di quarzo F_1 la luce entra nel sistema da vuoto: la sua polarizzazione viene definita dal polarimetro P ed attraversa la cavità accordata in frequenza al fascio laser. All'uscita della cavità, sul banco ottico superiore, la luce passa attraverso il modulatore di ellitticità. Quindi attraversa A posizionato per minima trasmissione e la finestra di quarzo F_2 . Infine la lente L_T focalizza il fascio sul fotorivelatore PD_T .

2.2.1 Il laser

Durante la fase di test si sono usati due laser con potenza emessa, rispettivamente, pari a 15 mW e 100 mW. Le caratteristiche del fascio emesso sono riportate nella seguente tabella, come specificate dalla casa costruttrice (LightWave Electronics).

Potenza	15 mW / 100 mW
Lunghezza d'onda	1064 nm
Modo Spaziale	TEM_{00}
Polarizzazione verticale	$> 1000 : 1$
Dimensione del waist	0.25 mm ($\pm 10\%$)
Divergenza (angolo completo)	3.0 mrad ($\pm 10\%$)

Tabella 2.2: Caratteristiche del fascio emesso dal laser.

Si tratta di laser a stato solido di tipo NPRO (Non Planar Ring Oscillator): la cavità risonante è costituita da un mono cristallo di Nd:YAG all'interno del quale la luce descrive un cammino ottico ad anello non planare per riflessione totale interna su tre superfici del cristallo stesso (Fig.2.5 (a)). I laser hanno basso rumore in ampiezza ed elevata stabilità in frequenza, caratteristiche che derivano dal pompaggio ottico a diodo laser e dalla cavità monolitica. Infatti

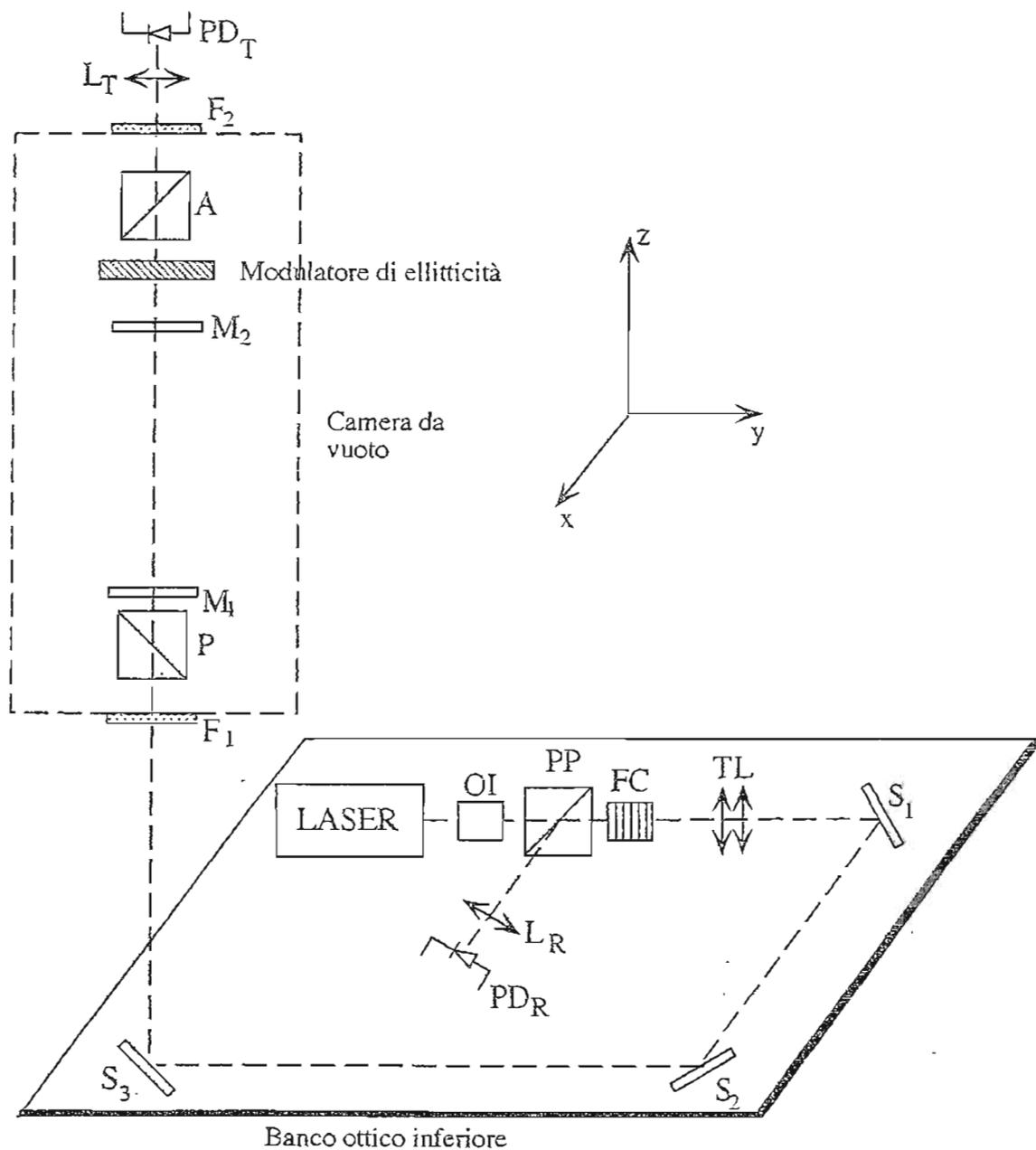
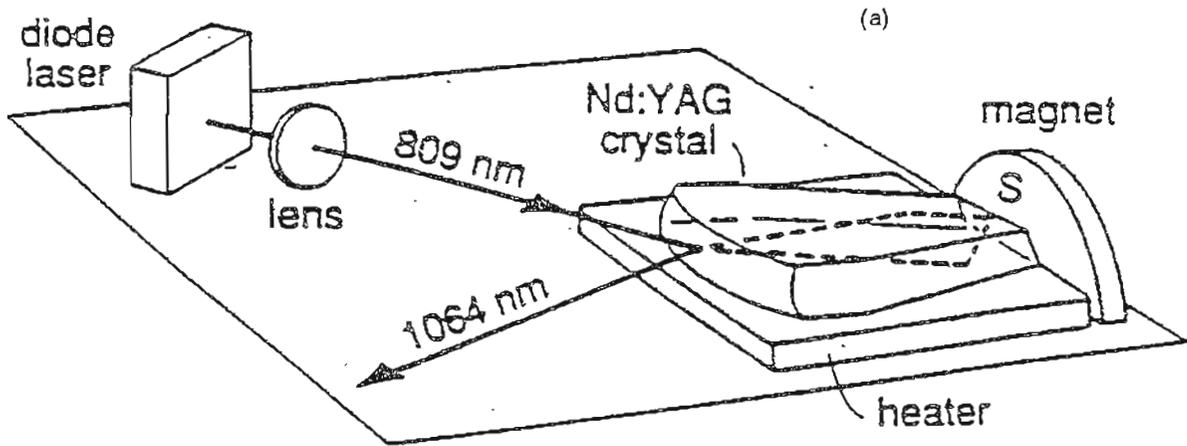


Figura 2.4: Schema generale dell'apparato ottico. Gli elementi sono descritti nel testo.



(b)

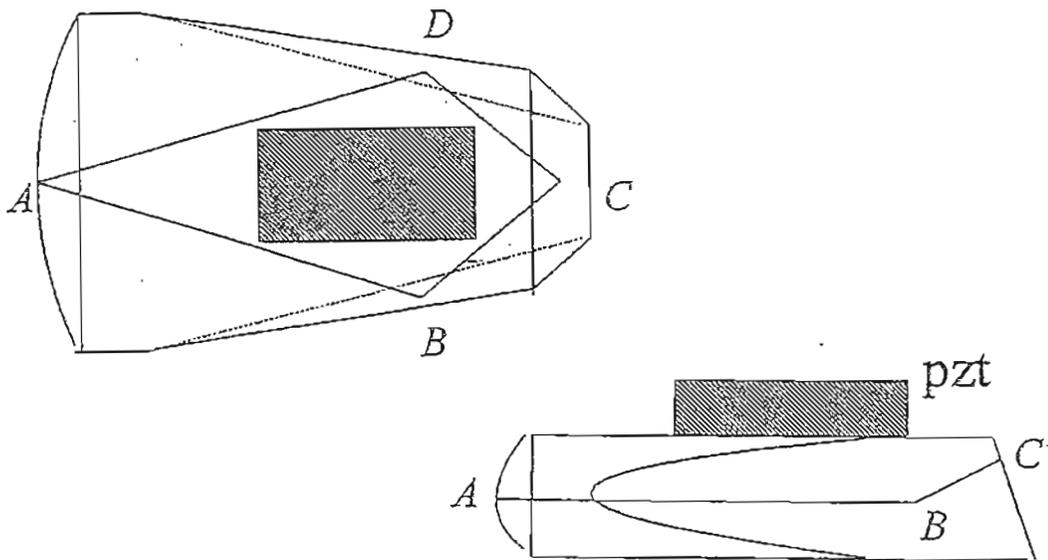


Figura 2.5: (a) Schema del laser NPR. (b) È visibile il cristallo rispettivamente dall'alto e di lato con il cammino che la luce percorre al suo interno. La parte tratteggiata rappresenta il piezoelettrico che serve per modificare la frequenza di emissione.

il pompaggio a diodo evita il problema del rumore associato alle lampade a scarica e l'uso della cavità monolitica non planare, unito alla presenza in cavità di un piccolo campo magnetico, consente di ottenere l'eccitazione di singolo modo ed il completo isolamento del campo elettrico della luce di ritorno [30].

La frequenza della luce emessa può essere variata mediante due sistemi di controllo corrispondenti a due bocche di ingresso per segnali in tensione poste sul pannello principale della scatola di controllo del laser. Il primo (*slow*) è un termistore (heater) posto a contatto con la base della cavità (Fig.2.5 (a)). La variazione della frequenza è ottenuta modificando la temperatura e dunque le dimensioni del cristallo. Questo sistema di controllo ha banda passante di circa 1 Hz su un intervallo di circa 1 GHz. La regolazione della frequenza può essere effettuata sia manualmente, con un potenziometro, che con un segnale in tensione (± 5 V). Il secondo sistema di controllo (*fast*) è costituito da un piezoelettrico (PZT) incollato sulla faccia superiore della cavità monolitica (Fig.2.5 (b)). Anch'esso ha la funzione di variare, per pressione meccanica, le dimensioni della cavità risonante e, con esse, la frequenza della luce. La banda passante è di 100 KHz.

Questi controlli sono alla base del circuito di retroazione usato per mantenere la frequenza della radiazione emessa in risonanza con la cavità Fabry-Pérot, descritto nel dettaglio in (A).

La presenza di un isolatore ottico all'uscita del laser (Fig.2.4) è necessaria per impedire che la luce riflessa dalla cavità torni sul laser stesso alterandone le caratteristiche di uscita. L'isolatore usato (Modello fr1060/5TS) è prodotto dalla Gsanger.

2.2.2 I polarimetri

I polarimetri sono i componenti fondamentali per misure di ellissometria. Sono stati usati due polarimetri di tipo Glan [31] costituiti da due prismi in cristallo di calcite separati da una intercapedine d'aria. L'anisotropia ottica della calcite fa sì che la propagazione della luce entro il cristallo avvenga in due modi distinti per le polarizzazioni ortogonale e parallela all'asse ottico del cristallo. Tali modi di propagazione sono rispettivamente definiti raggio *ordinario* e raggio *straordinario*. La faccia d'ingresso del primo prisma è parallela all'asse ottico. Alla superficie di separazione tra il primo prisma e l'intercapedine d'aria il raggio ordinario viene eliminato per riflessione totale

interna. Il raggio straordinario viene trasmesso attraverso la superficie e la sua direzione originale viene ripristinata dal secondo prisma.

Per un fascio di luce incidente linearmente polarizzato ad un angolo α rispetto alla normale all'asse ottico, con ampiezza del campo elettrico pari a E_0 , l'ampiezza del campo elettrico trasmesso vale $E_0 \sin \alpha$ e quindi l'intensità è data da

$$I(\vartheta) = I_0 \sin^2 \alpha \quad (2.3)$$

con $I_0 = E_0^2$. Per $\alpha = 0$ l'intensità trasmessa da un polarimetro ideale è zero. Un polarimetro reale trasmette sempre una piccola parte della luce incidente con polarizzazione ortogonale all'asse ottico, con valore minimo di intensità I_{min} . Il rapporto $\sigma^2 = I_{min}/I_0$ caratterizza la bontà del polarimetro ed è detto *estinzione*.

Le specifiche dei polarimetri usati sono riportate nella seguente Tabella (2.3).

	σ^2	Superficie utile	Casa Fornitrice
Polarizzatore P	10^{-8}	Circolare di raggio 0.5 cm	B. Halle
Analizzatore A	10^{-7}	Quadrata di lato 1 cm	K. Lambrecht

Tabella 2.3: Caratteristiche dei polarimetri utilizzati.

I valori di σ^2 sono stati misurati usando una coppia di polarimetri dello stesso tipo.

I polarimetri sono i primi elementi ottici, tra quelli presenti nella camera da vuoto, ad essere allineati con il fascio laser. L'allineamento viene effettuato agendo sulla direzione del fascio per mezzo degli specchi di rimando¹ S_1 , S_2 ed aggiustando i polarimetri con le movimentazioni delle flange sulle quali sono montati. L'utilizzo del polarimetro della K. Lambrecht, che ha estinzione minore ma superficie utile maggiore, si è reso necessario vista la lunghezza della cavità per ottenere un buon centraggio del fascio sull'analizzatore. Le misure di estinzione vengono effettuate lasciando fisso il polarizzatore e ruotando l'analizzatore intorno all'asse z . Il valore dell'estinzione ottenuto senza cavità è 10^{-7} come previsto dalle specifiche riportate in Tabella (2.3).

¹Gli specchi di rimando S_1 ed S_2 sono montati su sostegni che ne permettono la movimentazione tramite viti micrometriche.

2.2.3 L'interferometro Fabry-Pérot

Attraversato il polarimetro P, la luce incontra l'interferometro Fabry-Pérot, costituito da due specchi ad alta riflettività affacciati posti ad una distanza d . La luce, attraversandoli, viene in parte riflessa e in parte trasmessa, dando luogo a fenomeni di interferenza multipla. Gli specchi sono dielettrici multistrato, realizzati evaporando in vuoto alternativamente strati successivi di due materiali con indice di rifrazione diversi, n_1 e n_2 , su un substrato con indice di rifrazione n_s . Per incidenza normale gli strati hanno spessori l_1 e l_2 tali da soddisfare la condizione $n_1 l_1 = n_2 l_2 = \lambda/4$ dove λ è la lunghezza d'onda della luce nel vuoto. Sovrapponendo un numero dispari j di strati in modo tale che la successione inizi e termini con lo strato di indice di rifrazione maggiore n_1 , la riflettività per incidenza normale è data dalla relazione [32]

$$R = \left[\frac{n_1^{j+1} - n_2^{j-1} n_s}{n_1^{j+1} + n_2^{j-1} n_s} \right]^2. \quad (2.4)$$

Gli specchi utilizzati sono realizzati dalla Research Electro Optics (Boulder, Colorado) e le caratteristiche sono elencate nella seguente tabella:

Riflettività R	$\geq 0.999\,969$
Perdite P	$\approx 2 \times 10^{-5}$
Trasmittività T	$\approx 1 \times 10^{-5}$
Raggio di curvatura R_c	10 m
Substrato	vetro BK7 o silice
Diametro	2.4 cm

Tabella 2.4: Caratteristiche degli specchi interferenziali. Il numero di strati e il tipo di materiale dielettrico non sono noti.

Senza perdere in generalità [33], si possono considerare gli specchi, piani, paralleli, caratterizzati dai parametri, relativi all'intensità T , R e P tali che

$$R + T + P = 1. \quad (2.5)$$

Nel parametro P sono incluse le perdite di luce dovute alla diffrazione e all'assorbimento.

Il campo elettrico trasmesso dalla cavità è allora

$$\vec{E}_C = \vec{E}_0 T e^{i\frac{\delta}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} (R e^{i\delta})^p = \frac{T e^{i\frac{\delta}{2}}}{1 - R e^{i\delta}} \vec{E}_0 \quad (2.6)$$

dove \vec{E}_0 è il campo elettrico della luce incidente perpendicolarmente agli specchi. Il primo termine in (2.6) rappresenta il campo elettrico della luce che ha attraversato l'interferometro senza aver subito riflessioni; gli altri termini descrivono la luce che è stata riflessa al suo interno. La luce trasmessa è quindi composta da termini sfasati tra loro di una quantità che, per un ciclo completo di andata e ritorno nel Fabry-Pérot, vale

$$\delta = \frac{4\pi dn}{\lambda} \quad (2.7)$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo presente tra gli specchi, supposto non assorbente, e λ è la lunghezza d'onda della luce.

Il Fabry-Pérot si comporta come un filtro passa-banda per la luce con funzione di trasferimento per l'intensità ($I_C = \vec{E}_C \vec{E}_C^*$) data da

$$\frac{I_C}{I_0} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (2.8)$$

dove I_0 è l'intensità della luce incidente.

La condizione di risonanza tra la luce incidente e la cavità corrisponde al massimo della funzione di trasferimento ($\sin^2 \frac{\delta}{2} = 0$). In questa condizione la frequenza della luce ν soddisfa la relazione

$$\nu = \frac{c}{2nd} q \quad (2.9)$$

con q numero intero. La frazione di luce trasmessa diventa

$$\frac{I_C}{I_0} = \frac{T^2}{(1 - R)^2}. \quad (2.10)$$

La distanza tra due picchi di risonanza è detta *Free Spectral Range* (FSR) ed è data da

$$FSR = \frac{c}{2nd}. \quad (2.11)$$

Il parametro fondamentale di una cavità Fabry-Pérot è la *Finezza* F definita come

$$F = \frac{FSR}{\Delta\nu_c} \quad (2.12)$$

dove $\Delta\nu_c$ è la larghezza a metà altezza della funzione di trasferimento (2.8). Dalla (2.11) risulta

$$F = \pi \frac{\sqrt{R}}{1 - R} \quad (2.13)$$

e quindi la Finezza di una cavità Fabry-Pérot dipende solo dalla riflettività degli specchi. In particolare per $R \approx 1$ si ha

$$F = \frac{\pi}{T + P} \quad (2.14)$$

e questa relazione rimane valida anche quando all'interno del Fabry-Pérot è contenuto un mezzo assorbente a patto di considerare P come la somma di tutte le perdite in cavità [27, 35, 29].

La proprietà della cavità Fabry-Pérot sfruttata dall'esperimento PVLAS è l'aumento del cammino ottico della luce nel mezzo in essa contenuto. Dalla relazione (2.6) segue l'espressione per la differenza di fase tra il campo trasmesso \vec{E}_C ed il campo incidente \vec{E}_0

$$\varphi_T = \text{arctg} \left[\frac{R \sin \delta}{1 - R \cos \delta} \right]. \quad (2.15)$$

In risonanza ($\sin \frac{\delta}{2} = 0$) e supponendo che nel Fabry-Pérot sia presente un mezzo birifrangente con indici di rifrazione riferiti agli assi principali dati da $n_1 = n_0 + \frac{\Delta n}{2}$, $n_2 = n_0 - \frac{\Delta n}{2}$, lo sfasamento risultante tra le componenti del campo trasmesso, riferite agli assi principali, è dato, per $\Delta n \ll 1$

$$\Delta\varphi_T = \frac{R}{1 - R} \Delta\delta = \frac{R}{1 - R} 4\pi \frac{d}{\lambda} \Delta n. \quad (2.16)$$

Ricordando che lo sfasamento per il singolo passaggio del mezzo birifrangente è $\Delta\phi = 2\pi d \Delta n / \lambda$ si ottiene

$$\Delta\varphi_T = 2 \frac{R}{1 - R} \Delta\phi \quad (2.17)$$

che per $R \approx 1$ diventa

$$\Delta\varphi_T = 2 \frac{F}{\pi} \Delta\phi. \quad (2.18)$$

Lo sfasamento tra le componenti del campo trasmesso è equivalente a quello che si avrebbe se la luce attraversasse un mezzo birifrangente di lunghezza $d_{EFF} = \frac{2F}{\pi} d$.

La realizzazione pratica di una cavità Fabry-Pérot richiede di ottenere e mantenere la condizione di risonanza tra la luce e la cavità: la frequenza della luce laser deve coincidere con una frequenza di risonanza della cavità. La tecnica adottata è di tipo Pound-Drever [56, 57] e si basa su un sistema di aggancio in fase retroattivo descritto in Appendice (A).

2.2.4 Le cavità realizzate

Una cavità ottica ha infiniti modi risonanti che differiscono sia per la distribuzione spaziale che per la frequenza (2.9). L'unico ad avere un profilo gaussiano di intensità è il modo Tem_{00} detto anche *modo fondamentale* [33]. Il fascio laser che eccita la cavità deve essere accoppiato con il modo fondamentale del risonatore. Questo richiede che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- 1) il waist del fascio laser deve coincidere in posizione e dimensione con il waist del modo Tem_{00} della cavità;
- 2) l'asse ottico della cavità deve coincidere con la direzione di propagazione del fascio laser.

Un cattivo accoppiamento comporta o l'aggancio in frequenza su un modo diverso da quello fondamentale o l'aggancio sul fondamentale con intensità trasmessa fortemente ridotta. La prima condizione è realizzata mediante

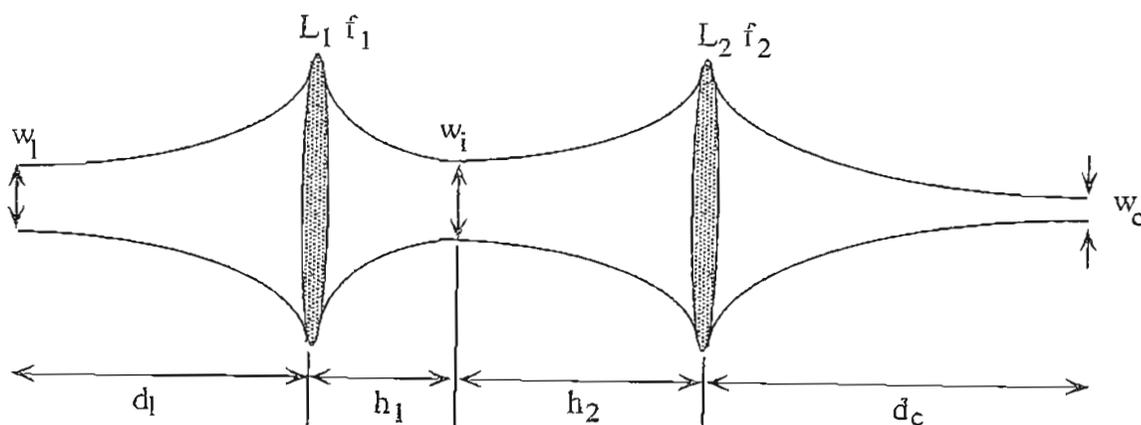


Figura 2.6: Schema di funzionamento del telescopio. Sono indicati i profili del fascio incidente, del fascio trasmesso e di quello presente tra le due lenti.

l'utilizzo di un telescopio TL, cioè di un sistema ottico formato da due lenti L_1 e L_2 di focali rispettivamente f_1 e f_2 , poste ad una distanza h . Lo schema di

funzionamento è mostrato in Fig.2.6 dove sono indicati sia il fascio incidente, il cui waist ($w_l = 0.25$ mm) dista d_l dalla lente L_1 , sia il fascio trasmesso il cui waist w_c dista d_c dalla lente L_2 e coincide con il waist della cavità [34]

$$w_c = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R_c - d)}. \quad (2.19)$$

Inoltre è schematizzato il fascio trasmesso da L_1 il cui waist w_i dista rispettivamente h_1 e h_2 dalle due lenti. Le relazioni che legano questi parametri si possono trovare in [35, 29, 38].

L'allineamento tra il fascio laser e l'asse della cavità è ottenuto agendo sulle movimentazioni delle flange Cinel sulle quali sono posizionati gli specchi. Una volta che il fascio laser è centrato sui polarimetri si effettua il centraggio degli specchi del Fabry-Pérot. Sulle flange che devono sostenere gli specchi vengono montati, al posto degli specchi, dei dischetti di plastica con un foro centrale di circa 0.5 cm di diametro, chiamati centraggi. Agendo sulle traslazioni lungo gli assi x e y e guardando con un visore a infrarosso attraverso delle finestre laterali della camera da vuoto, si fa in modo che il fascio passi attraverso i fori dei centraggi. In questa maniera si è certi che gli specchi del Fabry-Pérot, una volta inseriti nella camera da vuoto, sono centrati sul fascio laser.

Con riferimento alla Fig.2.4, la luce laser dopo aver attraversato l'isolatore ottico incontra un beam splitter polarizzatore PP orientato a massima trasmissione e successivamente una cella di Faraday FA che ne ruota la polarizzazione di 45° . Il campo elettrico della luce, riflesso indietro dallo specchio della cavità, passando una seconda volta attraverso FA subisce una rotazione totale di 90° così da essere deviato da PP e focalizzato dalla lente L_R sul fotodiodo. Gli specchi vengono inseriti uno alla volta; per primo si posiziona lo specchio M_2 e, agendo sulle rotazioni intorno agli assi x e y , si fa in modo che il fascio riflesso all'indietro segua lo stesso percorso del fascio incidente: questa condizione garantisce l'incidenza normale sullo specchio. Questo controllo viene effettuato sia usando il visore ad infrarosso sia massimizzando la luce sul fotodiodo PD_R (Fig.2.4), preventivamente ben allineato. Le stesse operazioni vengono ripetute per lo specchio M_1 .

Quando entrambi gli specchi sono posizionati nella camera da vuoto, si passa ad effettuare il vero e proprio allineamento tra l'asse della cavità e il fascio laser. Per fare ciò si invia all'ingresso fast del laser un'onda triangolare di frequenza 0.1-0.3 Hz che genera una spazzata sulle frequenze della luce emessa. Posizionando poi una telecamera sulla finestra superiore F_2 della

camera da vuoto e orientando l'analizzatore A a massima trasmissione si visualizzano su di un monotor i modi risonanti della cavità eccitati dal laser. Quello che si vede è un susseguirsi di modi al variare della frequenza della luce laser. A questo punto effettuando piccoli spostamenti degli specchi si massimizza l'intensità del modo Tem_{00} .

La valutazione della Finezza delle cavità realizzate è effettuata attraverso la misura della costante di tempo τ del risuonatore [34] definita come $\tau = \frac{1}{2\pi\Delta\nu_c}$. Utilizzando le relazioni (2.11) e (2.12) si ricava l'espressione che lega la costante di tempo di una cavità di lunghezza d alla Finezza

$$F = \frac{\tau\pi c}{d}. \quad (2.20)$$

La stima di τ si ricava osservando il decadimento della luce trasmessa dalla cavità quando si interrompe il fascio laser. L'emissione di luce viene interrotta ponendo il laser stesso in *stand-by*: tale operazione ha un tempo di realizzazione di circa 30 μsec notevolmente inferiore ai tempi di decadimento della luce presente in cavità.

L'intensità della luce trasmessa è rivelata dal fotodiodo PD_T con l'analizzatore orientato alla massima trasmissione ed il segnale $I_C(V)$ è visualizzato usando un oscilloscopio digitale.

Come già accennato, il raggiungimento di alte Finezze nell'impiego di un Fabry-Pérot è uno dei punti strategici dell'esperimento. Durante il primo anno di dottorato l'attività sperimentale è stata indirizzata verso la realizzazione di cavità ad alto fattore di qualità $Q = \frac{\nu}{\Delta\nu_c}$.

Inizialmente si è cercato di raggiungere finezze dell'ordine di 100 000 con una cavità orizzontale di lunghezza 1.75 m [39]. Successivamente si è passati alla configurazione verticale ed è stata realizzata una cavità Fabry-Pérot di 3.2 m: il risultato ottenuto è stato rassicurante per la fattibilità della cavità finale di 5 m. Lo spazio utile rimanente in seguito all'inserimento dei componenti ottici per la realizzazione dell'ellissometro completo è stato considerevolmente ridotto: la cavità ottica presente attualmente nell'ellissometro è lunga $d = 2.14$ m.

Le caratteristiche delle migliori cavità realizzate sono riportate nella seguente Tabella.

L'errore percentuale su τ , stimato ripetendo più volte la misura, è in generale del 10%. I valori di Q sono i più elevati riportati in letteratura per un risuonatore ottico. In Fig.2.7 si trovano i corrispondenti decadimenti esponenziali

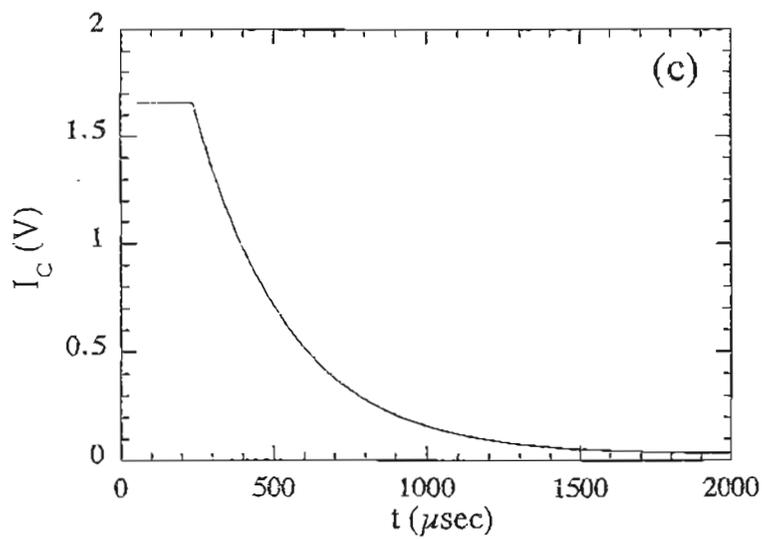
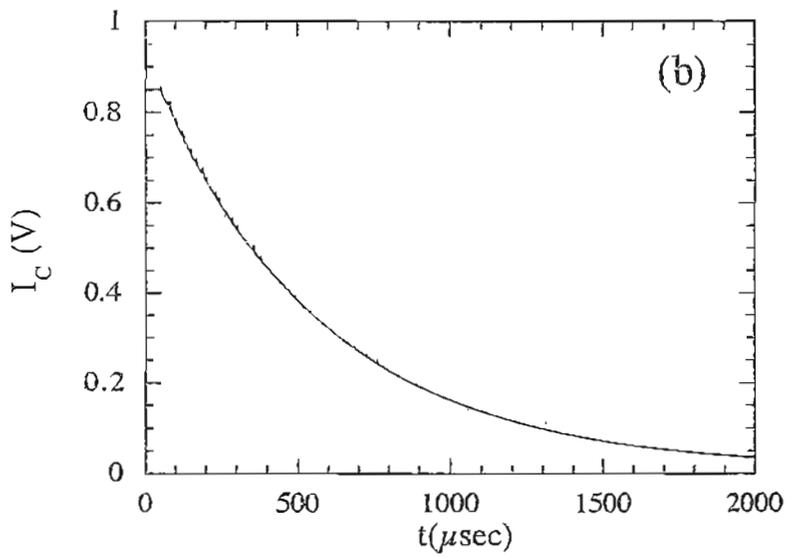
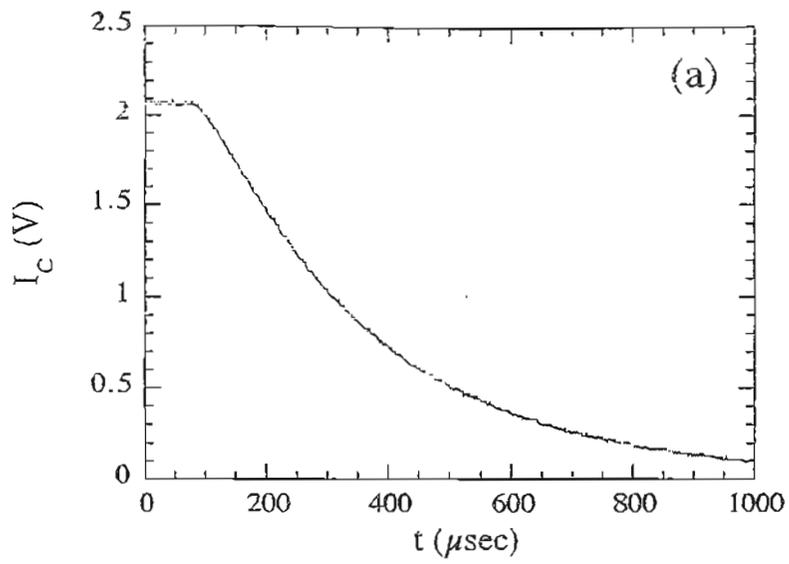


Figura 2.7: Decadimento esponenziale della luce conseguente allo spegnimento del laser. I valori registrati sono riportati nella Tabella (2.5).

Fig.	d(m)	Pos.	$\tau(\mu\text{sec})$	\bar{F}	$\Delta\nu_c$ (Hz)	$Q(10^{11})$	$T(10^{-6})$	%
(a)	1.75	oriz	291	157 000	550	5.1	6	9
(b)	3.2	vert	553	162 000	290	9.7	6	9
(c)	2.14	vert	303	133 000	525	5.4	13	30

Tabella 2.5: Caratteristiche delle migliori cavità realizzate. Nei primi due casi sono stati utilizzati specchi con $R > 0.999994$ ed $R_c = 5$ m.

dell'intensità come registrati all'oscilloscopio, dai quali attraverso un fit si è calcolata la costante τ .

In generale le cavità realizzate hanno tipicamente una percentuale di luce trasmessa del 10% e $\bar{F} \approx 100\,000$ come previsto dalle specifiche degli specchi. Le fluttuazioni dei valori della finezza per diverse cavità realizzate sono state al massimo del 30% e sono dovute in gran parte alle perdite legate al grado di pulizia degli specchi. La loro pulizia è infatti un'operazione molto delicata e viene effettuata passando gli specchi stessi sopra delle cartine ottiche imbevute di etanolo puro.

2.2.5 Il modulatore di ellitticità

Come accennato nel paragrafo (2.1), il modulatore di ellitticità permette di generare il segnale portante per applicare la tecnica eterodina. A tale scopo sono stati usati due differenti dispositivi.

La cella di Faraday e la lamina a quarto d'onda

La cella di Faraday schematizzata in Fig.2.8 è costituita da un pezzo di vetro BK7 posizionato in una regione dove è presente un campo magnetico \vec{B}_F la cui direzione coincide con la direzione z di propagazione della luce. Attraversando la cella, il campo elettrico della luce \vec{E}_{IN} subisce una rotazione di angolo α . Questo effetto è noto come effetto Faraday [37]. L'angolo α è proporzionale all'ampiezza del campo magnetico B_F e alla lunghezza del vetro D tramite la costante V di Verdet

$$\alpha = VB_F D. \quad (2.21)$$

V è funzione della lunghezza d'onda della luce: per vetro BK7 e $\lambda = 1064$ nm si ha $V = 1.75 \times 10^{-6}$ rad/cmG.

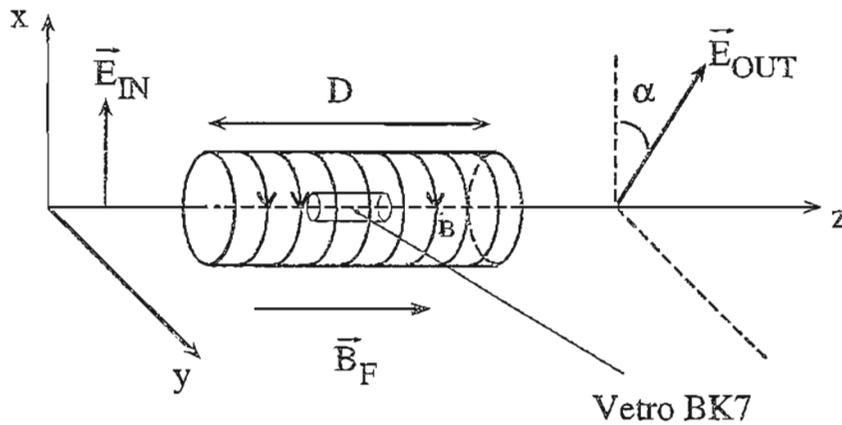


Figura 2.8: Principio di funzionamento di una cella di Faraday.

La cella utilizzata è stata realizzata all'Università di Pisa ed è costituita da un cilindro di teflon del diametro di 4 cm attorno al quale è avvolta una bobina. Le caratteristiche della bobina sono riportate in Tabella (2.6).

Numero di spire	1000
Lunghezza	0.1 m
Diametro del filo	1 mm
Resistenza	3.3 Ω
Induttanza	16 mH

Tabella 2.6: Caratteristiche della bobina per la cella di Faraday.

Facendo circolare una corrente i_B attraverso la bobina si genera il campo magnetico. Il cilindro flangiato alle estremità in modo da poter essere inserito nel sistema da vuoto, è cavo con diametro interno di 3 cm per permettere il posizionamento del cilindro di vetro BK7 di lunghezza $D = 0.8$ cm e di diametro 2.5 cm.

L'efficienza della cella K_F , definita come la rotazione Faraday per unità di

corrente che passa nella bobina, è

$$K_F = 1.5 \times 10^{-4} \text{ rad/A.} \quad (2.22)$$

Tale valore è stato misurato sperimentalmente ed è risultato compatibile con il calcolo teorico effettuato considerando la bobina come un solenoide infinito [38].

La corrente massima che è stata fatta fluire attraverso l'avvolgimento è $i_B = 2$ A corrispondente ad

$$\alpha = 3 \times 10^{-4} \text{ rad.} \quad (2.23)$$

Si è infatti verificato che con correnti maggiori la bobina si scaldava compromettendo il corretto funzionamento della cella. Con una corrente di 2 A la frequenza massima di modulazione della corrente stessa è circa 35 Hz.

Se all'uscita della cavità è posta una lamina a quarto d'onda orientata ad angolo nullo rispetto alla polarizzazione iniziale del fascio laser, l'ellitticità acquistata in presenza dell'effetto cercato viene convertita dalla stessa lamina in una rotazione di pari ampiezza. Quest'ultima interferisce con la rotazione introdotta dalla cella di Faraday dando luogo al battimento che sta alla base della tecnica eterodina.

Il modulatore fotoelastico

Il modulatore fotoelastico (PEM) è un dispositivo ottico che permette di introdurre una ellitticità nota sul fascio che lo attraversa: è composto da una sbarra di quarzo isotropa accoppiata ad un trasduttore piezoelettrico (Fig.2.9).

Il piezoelettrico viene azionato da un sintetizzatore che genera un segnale sinusoidale

$$V_p(t) = V_p \cos(2\pi\nu_p t + \varphi_1) \quad (2.24)$$

in modo da produrre nella sbarra di quarzo delle vibrazioni longitudinali alla frequenza di risonanza fondamentale. Il modulatore fotoelastico usato è un PEM-90 prodotto dalla Hinds Instruments con frequenza di risonanza fondamentale di $\nu_p = 50$ KHz. Per effetto della tensione prodotta dalle vibrazioni longitudinali, la sbarra di quarzo presenta una birifrangenza modulata alla frequenza ν_p . Il ritardo di fase $\varphi_p(t) = \varphi_0 \cos(2\pi\nu_p t + \varphi_1)$ tra asse veloce ed asse lento è proporzionale alla tensione applicata V_p . Un fascio di luce incidente linearmente polarizzata acquista tramite il PEM una ellitticità il

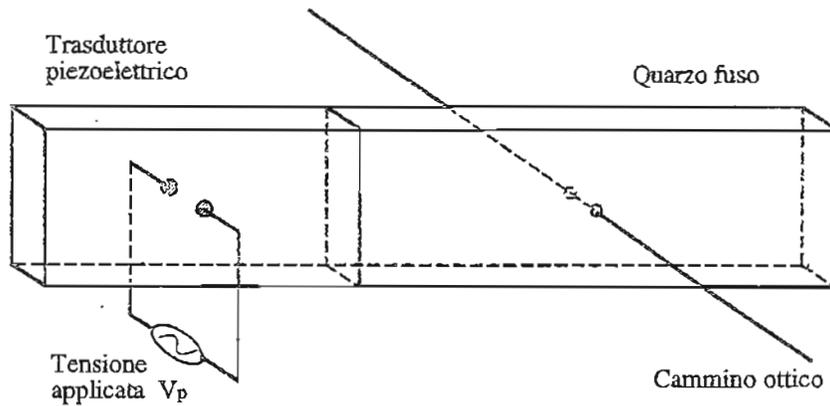


Figura 2.9: Struttura del modulatore fotoelastico.

cui valore ψ_0 è massimo quando la direzione di polarizzazione forma un angolo di 45° con l'asse veloce del PEM. In questo caso, per $\varphi_0 \ll 1$ si ha $\psi_0 = \varphi_0/2$. Dalle specifiche dello strumento risulta che l'efficienza K_P del PEM alla frequenza di risonanza, definita come lo sfasamento φ_p per unità di tensione applicata, è

$$K_P \approx 20 \times 10^{-3} \text{ rad/V.} \quad (2.25)$$

Quindi con tensioni dell'ordine di 2 V si possono ottenere ellitticità modulate di ampiezza 20×10^{-3} , notevolmente superiore a quanto consentito dalla cella di Faraday. I vantaggi di avere modulazioni elevate saranno descritti nel capitolo successivo. Inoltre utilizzando il PEM si ha una frequenza di modulazione molto elevata e quindi il segnale da rivelare viene portato fuori dal rumore a bassa frequenza nella regione dove, in condizioni ottimali, il rumore è quello dello shot noise.

2.3 Calcolo dei segnali attesi

Vengono qui di seguito ricavate le espressioni dei segnali attesi nell'ipotesi di utilizzo del modulatore fotoelastico.

2.3.1 Misura della birifrangenza magnetica del vuoto

L'apparato sperimentale si può schematizzare come in Fig.2.10.

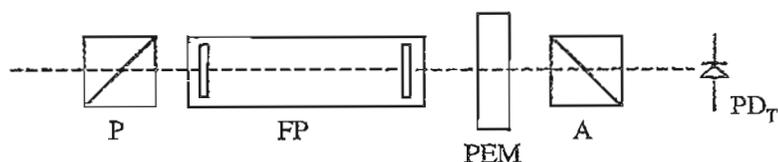


Figura 2.10: Schema per la misura di piccole birifrangenze.

I componenti si considerano ideali e l'estinzione σ^2 si assume per il momento trascurabile. Utilizzando il formalismo delle matrici di Jones [28] il vettore campo elettrico della luce dopo il polarizzatore P si può scrivere

$$\vec{E}_P(t) = E_0 e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

dove si è scelta la direzione di polarizzazione della luce coincidente con l'asse x . La matrice FP associata alla cavità Fabry-Pérot in presenza di un mezzo birifrangente è

$$\mathbf{FP} = \frac{T}{1-R} e^{i\frac{\delta}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\vartheta(t) & i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\vartheta(t) \\ i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\vartheta(t) & \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\vartheta(t) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

dove si sono supposti uguali gli specchi della cavità con riflettività R e trasmittività T ; si è indicato con $\vartheta(t) = \omega_m t + \varphi_m$ l'angolo tra il campo magnetico esterno \vec{B}_{EXT} e la direzione di polarizzazione della luce ($\omega_m/2\pi = 1/\text{Hz}$). Inoltre se δ_s denota il ritardo di fase tra asse veloce ed asse lento prodotto dal mezzo birifrangente per singolo attraversamento del mezzo stesso, per effetto della cavità Fabry-Pérot il ritardo di fase complessivo risulta

$$\delta = \frac{2F}{\pi} \delta_s. \quad (2.28)$$

La matrice di Jones per il modulatore fotoelastico PEM è quella di una lamina birifrangente ortogonale al fascio di luce, con ritardo di fase $\varphi_p(t) = \varphi_0 \cos \omega_p t$ tra asse veloce e lento, ad un angolo di 45° tra il proprio asse veloce e la direzione di polarizzazione della luce

$$\text{PEM} = e^{i\frac{\varphi_p}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi_p}{2} & i \sin \frac{\varphi_p}{2} \\ i \sin \frac{\varphi_p}{2} & \cos \frac{\varphi_p}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

È necessario inoltre considerare l'effetto di una birifrangenza di natura diversa da quella che si intende misurare, presente nel sistema a causa di imperfezioni degli elementi ottici e di errori di allineamento. La si assume statica o al più soggetta a lente variazioni dovute all'assestamento meccanico e termico degli elementi. Denotati con η il ritardo di fase introdotto e con χ l'angolo formato dall'asse veloce con la direzione di polarizzazione iniziale della luce e supponendo $\eta \ll 1$ rad, tale birifrangenza può essere descritta dalla matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= e^{i\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\eta}{2} + i \sin \frac{\eta}{2} \cos 2\chi & i \sin \frac{\eta}{2} \sin 2\chi \\ i \sin \frac{\eta}{2} \sin 2\chi & \cos \frac{\eta}{2} - i \sin \frac{\eta}{2} \cos 2\chi \end{pmatrix} \\ &\approx e^{i\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\frac{\eta}{2} \cos 2\chi & i\frac{\eta}{2} \sin 2\chi \\ i\frac{\eta}{2} \sin 2\chi & 1 - i\frac{\eta}{2} \cos 2\chi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Questa matrice commuta con **FP** a meno di termini di ordine $\eta\delta$ e con la **PEM** rigorosamente. Non ha perciò importanza, purchè η sia piccolo, dove tra i due polarizzatori sia situata la causa di questa eventuale birifrangenza nel sistema.

L'analizzatore **A** è rappresentato semplicemente da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Il campo elettrico della luce incidente sul fotodiode è

$$\vec{E}_F(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \text{PEM} \cdot \text{FP} \cdot \vec{E}_P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (E_F)_y \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

dove

$$\begin{aligned}
 (E_F)_y &= E_0 \frac{T}{1-R} e^{i\frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\eta}{2}} e^{i\frac{\varphi_p}{2}} e^{i\frac{\omega t}{2}} \cdot \\
 &\cdot \left(i\frac{\eta}{2} \cos \frac{\varphi_p}{2} \cos \frac{\delta}{2} \sin 2\chi + i \cos \frac{\varphi_p}{2} \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\vartheta + \right. \\
 &+ \left. i \sin \frac{\varphi_p}{2} \cos \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\varphi_p}{2} \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\vartheta + \frac{\eta}{2} \sin \frac{\varphi_p}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cos 2\chi \right) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Trascurando i termini di ordine $\eta\delta$ e δ^2 , l'intensità luminosa incidente sul fotodiode risulta

$$\begin{aligned}
 I_T(t) &\approx I_C \left(\sin^2 \frac{\varphi_p}{2} + \frac{\eta^2}{4} \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\chi - \frac{\eta^2}{4} \cos^2 \frac{\varphi_p}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos 4\chi + \right. \\
 &+ \left. \frac{\eta}{2} \sin \varphi_p \cos^2 \frac{\delta}{2} \sin 2\chi + \frac{1}{2} \sin \varphi_p \sin \delta \sin 2\vartheta \right) \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

dove $I_C = I_0 T^2 / (1-R)^2$ è la luce trasmessa dalla cavità.

Tenendo presente i seguenti sviluppi in serie di Fourier

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \frac{\varphi_p}{2} &\approx \frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2} + J_2(\varphi_0) \cos 2\omega_p t - J_4(\varphi_0) \cos 4\omega_p t + \dots \\
 \sin \varphi_p &\approx 2J_1(\varphi_0) \cos \omega_p t - 2J_3(\varphi_0) \cos 3\omega_p t + \dots \\
 \cos \varphi_p &\approx J_0(\varphi_0) - 2J_2(\varphi_0) \cos 2\omega_p t + 2J_4(\varphi_0) \cos 4\omega_p t + \dots \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

le componenti del segnale nell'intervallo di frequenza da 0 a $2\omega_p$ sono le seguenti:

Componente	Frequenza	Ampiezza (In unità di I_C)	Fase
I_{DC}	DC	$\frac{1-J_0(\varphi_0)}{2}$	-
I_-	$\omega_p - 2\omega_m$	$\frac{1}{2} J_1(\varphi_0) \delta$	$\varphi_1 - 2\varphi_m + \frac{\pi}{2}$
I_p	ω_p	$\eta J_1(\varphi_0) \sin 2\chi$	φ_1
I_+	$\omega_p + 2\omega_m$	$\frac{1}{2} J_1(\varphi_0) \delta$	$\varphi_1 + 2\varphi_m - \frac{\pi}{2}$
I_{2p}	$2\omega_p$	$J_2(\varphi_0)$	$2\varphi_1$

Tabella 2.7: Componenti del segnale atteso.

Nel completare la Tabella si è tenuto conto del fatto che l'inizio della rivelazione del segnale non è sincronizzato con le oscillazioni del modulatore fotoelastico, quindi il ritardo di fase dovuto al PEM si deve esprimere come $\varphi_p(t) = \varphi_0 \cos(\omega_p t + \varphi_1)$. Ciò comporta che le componenti del segnale,

quando si tiene conto della loro fase, hanno la forma $I_{(np)} \cos(n\omega_p t + n\varphi_1)$. Inoltre, essendo δ estremamente piccolo, si è usata ragionevolmente l'approssimazione al prim'ordine delle funzioni trigonometriche di δ e $\delta/2$. Si sono infine trascurati i termini proporzionali a η^2 .

Il picco alla frequenza ω_p è proporzionale alla birifrangenza statica $\Psi_{STA} = (\eta/2) \sin 2\chi$. I picchi laterali, dai quali viene determinato l'effetto cercato, non sono influenzati (a meno di termini di ordine $\eta\delta$) dalla presenza di questo effetto.

Considerando nei calcoli anche l'estinzione σ^2 , la sola novità è nella componente I_{DC} che diventa

$$I_{DC} = I_C \left[\sigma^2 + \frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2} \right]. \quad (2.36)$$

Utilizzando le componenti armoniche si ricava il rapporto

$$\frac{I_+ + I_-}{I_{2p}} = \frac{J_1(\varphi_0)}{J_2(\varphi_0)} \delta \quad (2.37)$$

da cui l'ellitticità cercata è data da

$$\Psi_{QED} = \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{J_2(\varphi_0)}{J_1(\varphi_0)} \frac{I_+ + I_-}{I_{2p}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \frac{I_+ + I_-}{I_{2p}}. \quad (2.38)$$

2.3.2 Misura del dicroismo prodotto dall'assione

Per la rivelazione dell'assione è necessario misurare una rotazione. Lo schema è ancora quello di Fig.10 con la sola introduzione all'uscita della cavità di una lamina a quarto d'onda orientata ad un angolo di 0° rispetto alla polarizzazione iniziale della luce. La matrice di Jones è

$$LQW = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Tale lamina trasforma la rotazione acquistata dal fascio laser nell'attraversare la regione magnetica in una ellitticità che può interferire direttamente con l'ellitticità nota introdotta dal modulatore fotoelastico. Il segnale è simile a quello ottenuto per la misura della birifrangenza. In particolare la matrice di Jones per il Fabry-Pérot in presenza di assorbimento selettivo δ_a della

componente del campo elettrico del fotone parallela al campo magnetico esterno è data da

$$\mathbf{FP} = \frac{T}{1-R} \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) & -\sin \vartheta(t) \\ \sin \vartheta(t) & \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \delta_{TOT} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta(t) & \sin \vartheta(t) \\ -\sin \vartheta(t) & \cos \vartheta(t) \end{pmatrix} = \frac{T}{1-R} \begin{pmatrix} 1 - \delta_{TOT} \cos^2 \vartheta(t) & -\frac{1}{2} \delta_{TOT} \sin 2\vartheta(t) \\ -\frac{1}{2} \delta_{TOT} \sin 2\vartheta(t) & 1 - \delta_{TOT} \sin^2 \vartheta(t) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

dove si è posto $\delta_{TOT} = (2F/\pi)\delta_a$. La luce, polarizzata linearmente in ingresso, all'uscita della cavità è

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{E_0 T}{1-R} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} 1 - \delta_{TOT} \cos^2 \vartheta(t) \\ -\frac{1}{2} \delta_{TOT} \sin 2\vartheta(t) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Si tratta di luce polarizzata linearmente e ruotata rispetto alla direzione iniziale di un angolo

$$\rho_a(t) = -\frac{1}{2} \frac{\delta_{TOT}}{2} \sin 2\vartheta(t). \quad (2.42)$$

Usando le matrici di Jones descritte in precedenza, si ricava la seguente Tabella per le componenti armoniche del segnale al fotodiode:

Componente	Frequenza	Ampiezza (in unità di I_C)	Fase
I_{DC}	DC	$\sigma^2 + \frac{1-J_0(\varphi_0)}{2}$	-
I_-	$\omega_p - 2\omega_m$	$\frac{1}{2} J_1(\varphi_0) \delta_{TOT}$	$\varphi_1 - 2\varphi_m - \frac{\pi}{2}$
I_p	ω_p	$\eta J_1(\varphi_0) \sin 2\chi$	φ_1
I_+	$\omega_p + 2\omega_m$	$\frac{1}{2} J_1(\varphi_0) \delta_{TOT}$	$\varphi_1 + 2\varphi_m + \frac{\pi}{2}$
I_{2p}	ω_{2p}	$J_2(\varphi_0)$	$2\varphi_1$

Tabella 2.8: Componenti del segnale per la rivelazione di rotazioni.

Anche in questo caso la rotazione $\rho_{TOT} = \delta_{TOT}/2$ si ricava dalle bande laterali

$$\rho_{TOT} = \frac{1}{2} \frac{J_2(\varphi_0) I_+ + I_-}{J_1(\varphi_0) I_{2p}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \frac{I_- + I_+}{2I_p}. \quad (2.43)$$

La misura di una rotazione non presenta quindi differenze sostanziali da una misura di ellitticità.

2.4 La sensibilità prevista per l'esperimento

Si valuta qui il rapporto segnale-rumore nell'ipotesi che l'unico rumore presente sia lo shot-noise. L'ampiezza spettrale della corrente associata alla componente continua del segnale è

$$i_{shot} = \sqrt{2ei_{DC}\Delta\nu} \quad (2.44)$$

dove $\Delta\nu$ è la banda di misura del rivelatore ed i_{DC} è la componente continua prodotta dal fotodiodo e legata alla intensità I_{DC} della luce

$$i_{DC} = \frac{eI_{DC}q}{h\nu} \quad (2.45)$$

q è l'efficienza quantica del fotodiodo cioè la probabilità che un elettrone venga liberato per ogni fotone di frequenza ν ed e è la carica dell'elettrone. Pertanto, utilizzando la Tabella 2.7, si ha

$$i_{shot} = \sqrt{2e^2 \left[\sigma^2 + \frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2} \right] \frac{q}{h\nu} I_C \Delta\nu}. \quad (2.46)$$

Il segnale che si vuole rivelare ha un'ampiezza pari a

$$i = \frac{eq}{h\nu} I_C \frac{1}{2} J_1(\varphi_0) \delta = \frac{eq}{h\nu} I_C J_1(\varphi_0) \Psi_{QED}. \quad (2.47)$$

Se si tiene conto che ci sono due picchi, il segnale i raddoppia mentre il rumore i_{shot} cresce di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto a (2.46). Quindi il rapporto segnale-rumore diventa

$$\frac{i}{i_{shot}} = \Psi_{QED} \frac{J_1(\varphi_0)}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2}}} \sqrt{\frac{q}{2h\nu}} I_C \sqrt{T} \quad (2.48)$$

dove T è il tempo di misura.

Nell'ipotesi che $\frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2} \gg \sigma^2$, la (2.48) assume la forma

$$\frac{i}{i_{shot}} = \Psi_{QED} \frac{J_1(\varphi_0)}{\sqrt{1 - J_0(\varphi_0)}} \sqrt{\frac{q}{2h\nu}} I_C \sqrt{T}. \quad (2.49)$$

La sensibilità Ψ_{shot} , definita come l'ellitticità per cui, con un tempo di misura pari ad 1 s, il rapporto segnale-rumore assume valore unitario, è data da

$$\Psi_{shot} = \sqrt{\frac{1 - J_0(\varphi_0)}{2}} \frac{1}{J_1(\varphi_0)} \sqrt{\frac{2h\nu}{qI_C}}. \quad (2.50)$$

Nell'approssimazione $J_1(\varphi_0) = \frac{\varphi_0}{2}$ e $\frac{1-J_0(\varphi_0)}{2} = \frac{\varphi_0^2}{8}$ la (2.50) diventa

$$\Psi_{shot} = \sqrt{\frac{h\nu}{qI_C}}. \quad (2.51)$$

Introducendo i valori attesi $I_C = 10$ mW e $\eta_F = eq/h\nu = 0.7$ A/W si ottiene il limite teorico

$$\Psi_{PVLAS} = 4.8 \times 10^{-9} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (2.52)$$

Ricordando infine che l'ellitticità dovuta alla birifrangenza del vuoto è $\Psi_{QED} = 5.2 \times 10^{-11}$ con $F = 100\,000$, si ottiene che, in condizioni ideali, il rapporto segnale-rumore è unitario quando la misura ha una durata pari a

$$T = 35 \text{ minuti}. \quad (2.53)$$

Capitolo 3

MISURE DI ELLISSOMETRIA

3.1 Introduzione

Il presente Capitolo è suddiviso in due parti. La prima parte riporta le misure di sensibilità effettuate con i due tipi di modulatori di ellitticità descritti in precedenza. Vengono discussi i risultati e suggerite le necessarie modifiche.

La seconda parte descrive la misura dell'effetto Cotton-Mouton in Ossigeno molecolare. Una massa gassosa soggetta ad un campo magnetico presenta una birifrangenza del tutto analoga a quella del vuoto, denominata birifrangenza di Cotton-Mouton. In particolare l'ampiezza dell'effetto è proporzionale alla pressione del gas ed uno degli effetti maggiori, a parità di pressione, è prodotto proprio dall'Ossigeno. La conoscenza dell'entità di questo effetto permette di sapere a priori la pressione parziale residua di Ossigeno che è necessario raggiungere nella camera da vuoto per evitare che l'effetto Cotton-Mouton oscuri la rivelazione del segnale dovuto alla birifrangenza magnetica del vuoto. Inoltre essendo il segnale atteso del tutto analogo a quello della birifrangenza magnetica del vuoto, tale misura permette di verificare se l'apparato allestito è adeguato per la rivelazione di piccole ellitticità.

LA SENSIBILITÀ MISURATA

3.2 Considerazioni sui rumori presenti nella misura

Il tempo di misura dell'effetto della birifrangenza magnetica del vuoto ricavato nel Capitolo precedente (2.4) è stato calcolato nel caso di solo rumore shot. In una misura reale tale condizione è difficile da realizzare in quanto si manifestano altri rumori che degradano la sensibilità dell'apparato. Tra questi i più rilevanti sono:

- 1) i rumori in frequenza ed in ampiezza del laser,
- 2) il rumore legato all'elettronica,
- 3) il rumore Johnson [34] della resistenza di carico R_T del circuito di rivelazione della luce (Fig.3.2).

Vi sono poi altri fenomeni che possono indurre effetti spuri, come ad esempio

- 1) la birifrangenza degli specchi interferenziali ad alta riflettività [40],
- 2) l'effetto Cotton-Mouton negli elementi ottici indotto dal campo magnetico di fuga [41, 42],
- 3) l'effetto Cotton-Mouton [43] del gas residuo presente in cavità.

Nel lavoro [27] è stato dimostrato che, a seguito dell'aggancio in frequenza del laser alla cavità mediante la tecnica di Pound-Drever, il rumore in frequenza non disturba la misura.

A seguire si analizza il contributo legato al rumore in ampiezza del laser. Le considerazioni svolte forniscono simultaneamente i limiti sulle entità del rumore in ampiezza e della birifrangenza statica presente nel sistema per poter effettuare una misura allo shot noise. Il rumore dell'elettronica non verrà considerato essendo in generale trascurabile rispetto agli altri. Infine, per quanto riguarda il contributo del rumore Johnson, come dimostrato in

[27] è possibile ridurlo al di sotto dello shot noise mediante la scelta di un opportuno valore della resistenza R_T .

Nella seconda parte del Capitolo verrà preso in considerazione l'effetto Cotton-Mouton legato al gas residuo presente nella camera da vuoto. In particolare si analizzerà il contributo dovuto all'Ossigeno.

Sono attualmente in corso di realizzazione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova) misure dell'effetto prodotto dal campo magnetico di fuga sugli specchi interferenziali della cavità. A tale problema è ovviamente connessa la necessità di schermare i componenti ottici dal campo magnetico.

3.3 Limiti richiesti sui rumori

La densità spettrale del rumore prodotto dalle fluttuazioni di ampiezza della luce laser, misurata in $V/\sqrt{\text{Hz}}$ e funzione della frequenza $\nu = \omega/2\pi$, è data da

$$N_A(\nu) = R_T \eta_F I_N(\nu) \quad (3.1)$$

dove η_F è la sensitività del fotodiodo che rivela la luce trasmessa dalla cavità. La densità spettrale d'intensità $I_N(\nu)$ di quest'ultima, misurata in $W/\sqrt{\text{Hz}}$, è ricavabile dalla valutazione della $RIN(\nu)$ (Relative Intensity Noise) definita come il rapporto tra $I_N(\nu)$ e la componente continua I_{DC} del segnale sul fotodiodo

$$RIN(\nu) = \frac{I_N(\nu)}{I_{DC}} \quad (3.2)$$

A causa del rumore in ampiezza presente nel fascio laser uscente dalla cavità, ognuna delle componenti del segnale riportate nella Tabella (2.7) deve essere moltiplicata per $RIN(\nu)$. In particolare il rumore N_A alla frequenza $\nu_p + 2\nu_m$ (e similmente quello a frequenza $\nu_p - 2\nu_m$) è la somma dei seguenti tre contributi:

$$\begin{aligned} N_A^{DC} &= R_T \eta_F I_{DC} RIN(\nu_p + 2\nu_m) \\ &\approx R_T \eta_F I_C \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 + \sigma^2 \right] RIN(\nu_p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} N_A^p &= R_T \eta_F I_p RIN(2\nu_m) \\ &\approx 2R_T \eta_F I_C \psi_{STA} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) RIN(2\nu_m) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 N_A^{2p} &= R_T \eta_F I_{2p} \text{RIN}(\nu_p - 2\nu_m) \\
 &\approx \frac{1}{2} R_T \eta_F I_C \left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 \text{RIN}(\nu_p)
 \end{aligned}
 \quad (3.5)$$

Le approssimazioni fatte valgono in quanto si ha $\nu_p \gg \nu_m$. Supponendo realizzabile la condizione $\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^2 \gg \sigma^2$, la somma dei tre termini diventa

$$N_A(\nu_p + 2\nu_m) = R_T \eta_F I_C \left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \left[\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \text{RIN}(\nu_p) + 2\Psi_{STA} \text{RIN}(2\nu_m) \right]. \quad (3.6)$$

Per effettuare una rivelazione al limite shot deve essere soddisfatta la condizione

$$N_A(\nu_p + 2\nu_m) < N_{shot} = R_T \left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \sqrt{\frac{\eta_F \epsilon I_C}{2}}. \quad (3.7)$$

Utilizzando l'espressione (2.51) della sensibilità a livello shot si ottiene

$$\frac{\varphi_0}{2} \text{RIN}(\nu_p) + 2\Psi_{STA} \text{RIN}(2\nu_m) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{shot}. \quad (3.8)$$

Considerando separatamente i due addendi, si ottengono le seguenti limitazioni

$$\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \text{RIN}(\nu_p) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{shot} \quad (3.9)$$

$$2\Psi_{STA} \text{RIN}(2\nu_m) < \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{shot}. \quad (3.10)$$

Il significato delle relazioni trovate diventa più chiaro se si quantificano le grandezze coinvolte. Supponendo $I_C = 1$ mW e $\eta_F = 0.7$ A/W si ha $\Psi_{shot} = 1.5 \times 10^{-8} 1/\sqrt{\text{Hz}}$. Con la cella di Faraday è possibile ottenere ampiezze di modulazione dell'ordine di $\frac{\varphi_0}{2} \approx 3 \times 10^{-4}$. Quindi le relazioni (3.9) e (3.10) diventano

$$\text{RIN}(\nu_p) < 3.5 \times 10^{-5} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.11)$$

$$\Psi_{STA} \text{RIN}(2\nu_m) < 5.3 \times 10^{-9} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.12)$$

Nel grafico di Fig.3.1 è riportato lo spettro della RIN in funzione della frequenza ν ottenuto inviando direttamente l'uscita in tensione del fotodiode PD_T dall'analizzatore di spettro (Modello HP 3566A). Osservando l'andamento della RIN si vede che la condizione (3.11) è soddisfatta alla frequenza

di utilizzo della cella di Faraday ($\nu_p = 33/\text{Hz}$). Inoltre dallo stesso grafico si ricava

$$\text{RIN}(2\nu_m) \approx 2 \times 10^{-4} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad \text{con } 2\nu_m = 2 \text{ Hz.} \quad (3.13)$$

In definitiva da (3.12) si ottiene il seguente limite sull'effetto complessivo delle birifrangenze statiche presenti nell'apparato

$$\Psi_{STA} < 2.7 \times 10^{-5}. \quad (3.14)$$

Questa condizione rimane inalterata nel caso di utilizzo del modulatore

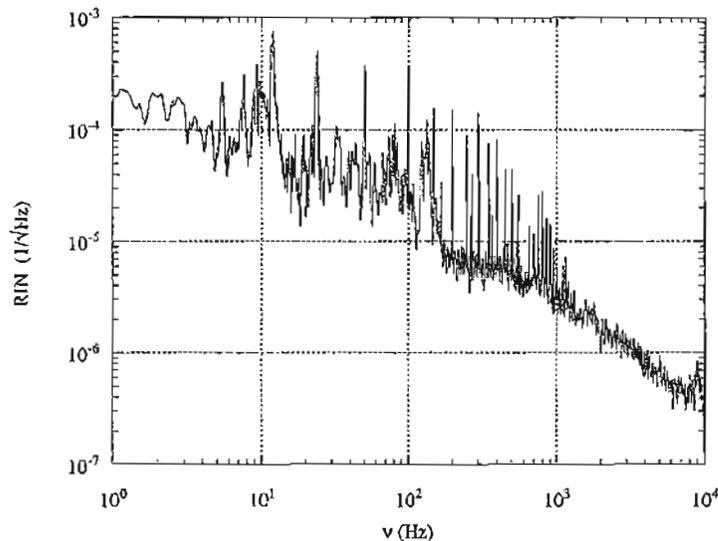


Figura 3.1: RIN del fascio trasmesso dalla cavità Fabry-Pérot di lunghezza 2.14 m e $F=65\,000$.

fotoelastico. In questo caso, essendo $\frac{\omega_0}{2} \approx 3 \times 10^{-2}$, l'unica modifica riguarda la condizione (3.9) che diventa

$$\text{RIN}(\nu_p) < 2 \times 10^{-7} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.15)$$

comunque soddisfatta per $\nu_p \approx 50 \text{ KHz}$ (Fig.3.1).

3.4 Misure di sensibilità con la cella di Faraday

Per le prime prove di sensibilità è stato montato il modulatore di ellitticità formato dalla lamina a quarto d'onda e dalla cella di Faraday le cui caratteristiche sono state descritte nel Capitolo precedente. Lo schema dell'apparato realizzato è riportato in Fig.3.2.

Il segnale proveniente da un generatore di funzioni d'onda (Modello HP 3325B) e amplificato da un amplificatore di potenza pilota la corrente i_B nella bobina della cella di Faraday. Il fotodiodo PD_T è un Hamamatsu S1223 con sensibilità $\eta_F = 0.3 \text{ A/W}$ ed è montato su un circuito che permette di cambiare la resistenza di carico: vengono usate $R_T = 3.3 \text{ K}\Omega$ per le misure con i polarimetri paralleli ed $R_T = 700 \text{ M}\Omega$ per le misure con i polarimetri incrociati. A causa dell'elevato valore della resistenza usata per le misure in estinzione il circuito del fotodiodo si comporta come un filtro passa-basso il cui coefficiente di attenuazione in funzione della frequenza $A(\nu)$ è stato misurato sperimentalmente [38]. A polarimetri paralleli e bobina non alimentata

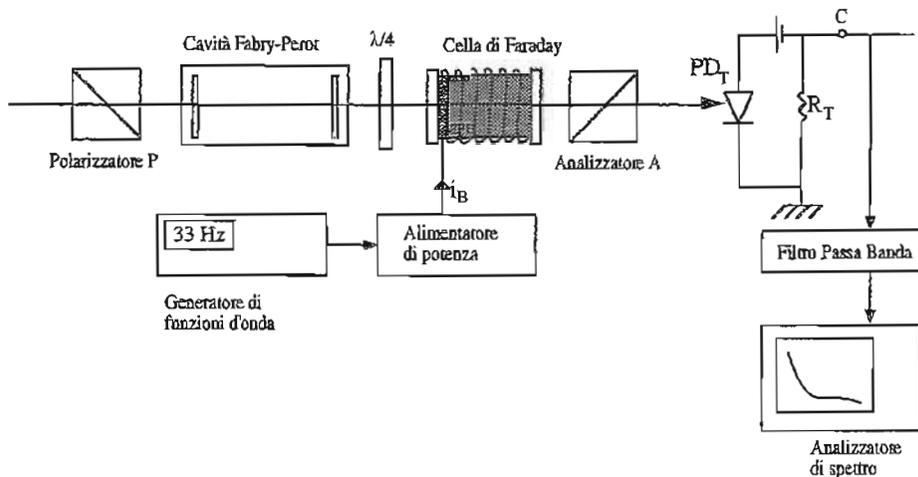


Figura 3.2: Schema dell'apparato per le misure di sensibilità con la cella di Faraday.

si misura l'intensità I_C della luce trasmessa dalla cavità Fabry-Pérot

$$I_C = 0.23 \text{ mW} \quad (3.16)$$

corrispondente ad un segnale di circa 230 mV (con $R_T = 3.3 \text{ K}\Omega$) nel punto C in Fig.3.2. Incrociando i polarimetri si ottiene l'estinzione complessiva

$$\sigma_T^2 = 8.4 \times 10^{-4}. \quad (3.17)$$

L'estinzione misurata è stata qui denotata con σ_T^2 in quanto è la somma dell'estinzione caratteristica della coppia di polarimetri usata ($\sigma^2 \approx 10^{-7}$) e del quadrato dell'ellitticità statica presente nel sistema. Nel completare la Tabella (2.7) si sono volutamente trascurati i termini proporzionali a Ψ_{STA}^2 ipotizzando soddisfatta la condizione $\Psi_{STA}^2 \ll \sigma^2$. Tale assunzione come si vedrà in dettaglio non è in generale soddisfatta. L'uscita del fotodiodo entra

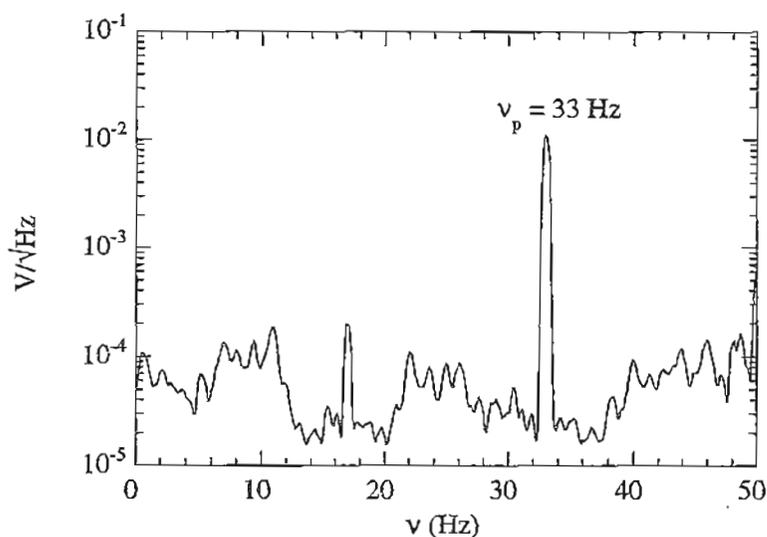


Figura 3.3: Densità spettrale di rumore registrata dall'analizzatore di spettro per la misura di sensibilità con la cella di Faraday. La cavità Fabry-Pérot ha una finezza di 93 000. Il picco a 50 Hz è dovuto all'alimentazione di rete.

nel filtro passa-banda che elimina la componente continua e la componente a $2\nu_p$. Questo permette all'analizzatore di spettro di rivelare segnali di livello

più basso altrimenti oscurati a causa del limitato range dinamico dello strumento. In Fig.3.3 è riportata la densità spettrale di rumore $N(\nu)$ registrata dall'analizzatore ed ottenuta a polarimetri incrociati ed a cella di Faraday attivata.

Poichè $\Psi_{QED} = 0$ ($B_{EXT} = 0$), valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} I_{DC} = I_C \left[\sigma_T^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 \right] \\ I_p = \frac{1}{2} \Psi_{STA} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) I_C \\ I_{2p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 I_C \end{cases} \quad (3.18)$$

La sensibilità dell'apparato è data da

$$\Psi_s = \frac{N(\nu_p \pm 2\nu_m) A(2\nu_p)}{A(\nu_p \pm 2\nu_m) \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) I_C} \quad (3.19)$$

dove si è tenuto conto dell'attenuazione del circuito di rivelazione: $A(\nu_p \pm 2\nu_m) \approx 0.9$ ed $A(2\nu_p) \approx 0.8$.

Come indicato nella Tabella (2.7) il valore dell'ampiezza della ellitticità introdotta dalla cella di Faraday $\frac{\varphi_0}{2}$ può essere ricavato dall'ampiezza del picco a $2\nu_p$:

$$\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\frac{2I_{2p}}{A(2\nu_p) I_C}} \quad (3.20)$$

Sperimentalmente si ha $I_{2p} = 2.1$ mV (con $R_T = 700$ M Ω) e quindi

$$\frac{\varphi_0}{2} = 3.2 \times 10^{-4}. \quad (3.21)$$

Questo valore può essere confrontato con quello previsto a partire dalla corrente i_B che fluisce nella bobina ed utilizzando la stima dell'efficienza della cella di Faraday $K_F = 1.5 \times 10^{-4}$ rad/A [38]. La frequenza di modulazione e la corrente utilizzate sono rispettivamente $\nu_p = 33$ Hz ed $i_B = 2$ A in corrispondenza dei quali si ottiene il valore teorico $\frac{\varphi_0}{2} = 3 \times 10^{-4}$. Il valore (3.21) risulta ampiamente compatibile con quest'ultimo.

La densità spettrale di rumore alla frequenza $\nu_p \pm 2\nu_m = (33 \pm 2)$ Hz si ricava dalla Fig.3.3, è

$$N(\nu_p \pm 2\nu_m) = 25 \frac{\mu V}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (3.22)$$

In definitiva si ottiene

$$\Psi_s = 1.3 \times 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (3.23)$$

Questo valore deve essere confrontato con la sensibilità Ψ_{shot} prevista nel caso di solo rumore shot. Non essendo soddisfatta la condizione $\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 \gg \sigma_T^2$, per il calcolo di quest'ultima si deve usare la relazione (2.50). Si ha

$$\Psi_{shot} = 6 \times 10^{-7} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (3.24)$$

Il fattore ≈ 2 mancante deve essere ottenuto attraverso un miglioramento dell'apparato. In particolare si osservi il picco alla frequenza ν_p nella Fig.3.3. Dalla sua ampiezza si ricava il valore della birifrangenza statica

$$\Psi_{STA} = \frac{I_p}{2I_C \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) A(\nu_p)} \approx 3 \times 10^{-3}. \quad (3.25)$$

Tale valore è nettamente superiore ai limiti posti attraverso le considerazioni sul rumore svolte nel paragrafo precedente (3.3).

Le cause di questa birifrangenza sono in parte imputabili alla birifrangenza intrinseca degli specchi interferenziali ad alta riflettività. Pertanto, come descritto in Appendice B, è stato necessario definire un metodo sperimentale per allineare questa birifrangenza con la polarizzazione della luce.

Il limite shot (3.24) è 120 volte superiore al valore (2.52) previsto per l'esperimento. Questa differenza è del tutto giustificabile. Il valore (2.52) è stato calcolato nell'ipotesi che $\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 \gg \sigma_T^2$. Nel caso esaminato si ha

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 + \sigma_T^2 \approx 1 \times 10^{-5} \quad (3.26)$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 + \sigma_T^2}{\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2}} \approx 13. \quad (3.27)$$

Questo comporta un fattore circa 13 in più sul valore di sensibilità limite ottenibile rispetto al valore data da (2.52). Inoltre l'intensità di luce I_C emessa dalla cavità è 0.23 mW a fronte dei 10 mW previsti per l'esperimento PVLAS. Questa differenza comporta un fattore $\sqrt{43}$ in più sulla sensibilità

limite ottenibile con l'apparato allestito. Infine bisogna considerare che non sono stati disponibili durante queste prime prove i fotodiodi con sensitività 0.7 A/W. Il fotodiode usato in questa fase di test ha una sensitività di 0.3 A/W e questo comporta un fattore $\sqrt{0.7/0.3} \approx 1.5$ in più sul valore della sensitività. Si nota quindi che le correzioni da apportare alla sensitività ($13 \times \sqrt{43} \times 1.5 \approx 120$) danno proprio il fattore che manca per avere la sensitività limite dell'apparato prevista in (2.52).

A conclusione delle misure effettuate si evidenziano alcune modifiche da apportare all'apparato illustrato in Fig.3.2. Innanzitutto è necessario cambiare il modulatore di ellitticità in modo da realizzare la condizione $\frac{1}{2}\Psi_{MOD}^2 \gg \sigma_T^2$. Contemporaneamente si deve effettuare l'allineamento degli specchi della cavità rispetto alla polarizzazione del fascio laser per minimizzare il contributo a σ_T^2 dovuto alla birifrangenza statica introdotta dagli specchi interferenziali. Il metodo usato per effettuare l'allineamento è descritto nell'Appendice (B). Infine per raggiungere i 10 mW di luce trasmessa dalla cavità Fabry-Pérot previsti per l'esperimento è necessario l'impiego di un laser più potente.

3.5 Misure di sensitività con il modulatore fotoelastico

Per ottenere ampiezze di modulazione maggiori si è utilizzato il modulatore fotoelastico PEM descritto in (2.2.5). Il PEM è stato posizionato su una flangia della Cinel ed è stato montato nell'apparato di Fig.3.2 al posto della lamina a quarto d'onda e della cella di Faraday. Il PEM è orientato in maniera tale che la direzione della polarizzazione della luce trasmessa dal polarimetro P formi un angolo di 45° con i suoi assi di birifrangenza.

Il laser è stato sostituito con un laser dello stesso tipo con una potenza di 100 mW. La RIN ottenuta con questo nuovo laser rimane, fortunatamente, attorno ai valori riportati in Fig.3.1.

Il circuito di rivelazione della luce è costituito in questo caso da un fotodiode Hamamatsu G3476-10 di sensitività $\eta_F = 0.7$ A/W e da un preamplificatore di corrente (Modello SR570, Stanford Research Systems, Sunnyvale, California) che permette di selezionare la resistenza di carico R_T . Essenzialmente si sono usate le resistenze $R_T = 1$ K Ω per le misure a polarimetri paralleli e $R_T = 500$ K Ω per le misure di sensitività a polarimetri incrocia-

ti. I valori dei coefficienti di attenuazione del circuito di rivelazione sono rispettivamente $A(\nu_p) \approx 0.72$ e $A(2\nu_p) \approx 0.46$.

L'intensità della luce trasmessa dalla cavità a polarimetri paralleli e modulatore disattivato è ora

$$I_C = 2 \text{ mW} \quad (3.28)$$

corrispondente ad un segnale di 1.45 V (con $R_T = 1 \text{ K}\Omega$) nel punto C di Fig.3.2.

Fornendo un segnale in tensione di 3 V di ampiezza al PEM ed ottimizzando la frequenza di eccitazione ($\nu_p = 50\,012.96 \text{ Hz}$) in modo da massimizzare la componente del segnale a $2\nu_p$, si ottengono le stime (con $R_T = 500 \text{ K}\Omega$)

$$\begin{aligned} I_p &= 9 \text{ mV} \\ I_{2p} &= 296 \text{ mV.} \end{aligned}$$

Usando la formula (3.20) si ricava l'ampiezza della modulazione introdotta dal PEM

$$\frac{\varphi_0}{2} = 2.8 \times 10^{-2}. \quad (3.29)$$

Questo valore risulta compatibile con il valore previsto teoricamente usando $K_p = 20 \times 10^{-3} \text{ rad/V}$ (si veda il paragrafo (2.2.5)).

In Fig.3.4 è riportato lo spettro di rumore registrato dall'analizzatore di spettro ed ottenuto a polarimetri incrociati ed a modulatore fotoelastico attivato. Da tale spettro si ricava la densità spettrale di rumore alla frequenza $\nu_p \pm 2\nu_m$

$$N(\nu_p \pm 2\nu_m) = 4 \frac{\mu\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.30)$$

e quindi la sensibilità dell'apparato diventa

$$\bar{\Psi}_s = 2.7 \times 10^{-7} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.31)$$

da confrontarsi con il limite shot

$$\Psi_{shot} = 1 \times 10^{-8} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (3.32)$$

La differenza tra quest'ultimo ed il valore previsto Ψ_{PVLAS} nell'esperimento PVLAS è ancora dovuta alla bassa intensità di luce trasmessa dalla cavità (2 mW rispetto ai 10 mW attesi).

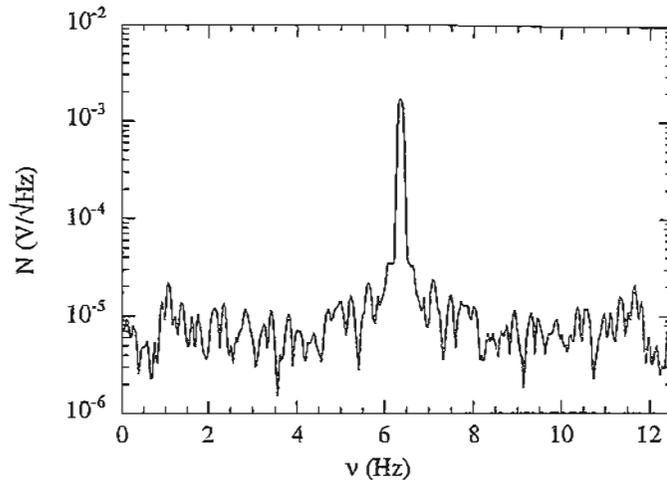


Figura 3.4: Spettro della densità di rumore per la misura di sensibilità con il modulatore fotoelastico. La banda di acquisizione del segnale è 12.5 Hz centrata attorno alla frequenza di risonanza dal PEM ($\nu_p = 50\,012.96$ Hz).

Il disaccordo tra il limite shot Ψ_{shot} ed il valore misurato Ψ_s è ancora imputabile alla presenza di un'ellitticità statica residua: si ricava infatti

$$\Psi_{STA} \approx 3 \times 10^{-4}. \quad (3.33)$$

Tale valore, leggermente migliore rispetto a quello ottenuto con le misure descritte nell'Appendice (B), è ancora troppo elevato rispetto ai limiti stabiliti nel paragrafo (3.3) per la realizzazione di una misura allo shot noise. La Ψ_{STA} rivelata non è però imputabile alla birifrangenza degli specchi della cavità in quanto si è avuta l'accortezza di procedere all'allineamento degli assi di birifrangenza degli specchi lungo la polarizzazione della luce incidente. È piuttosto imputabile alle caratteristiche meccaniche dell'apparato di misura: si tratta di birifrangenze spurie dovute a vibrazioni dell'apparato causate da rumori ambientali. In particolare lo spettro seguente mostra la RIN ottenuta a polarimetri incrociati: essa è superiore a tutte le frequenze rispetto alla RIN misurata in massima trasmissione (riportata sullo stesso grafico per confronto).

È evidente quindi la presenza di rumore nella polarizzazione del fascio laser legato alle birifrangenze non solo statiche, di natura meccanica presenti

nell'apparato. Un netto miglioramento è atteso quando si potrà accedere al sito finale dell'esperimento: come descritto in precedenza tale sito è dotato di alcuni accorgimenti per l'isolamento dal rumore sismico.

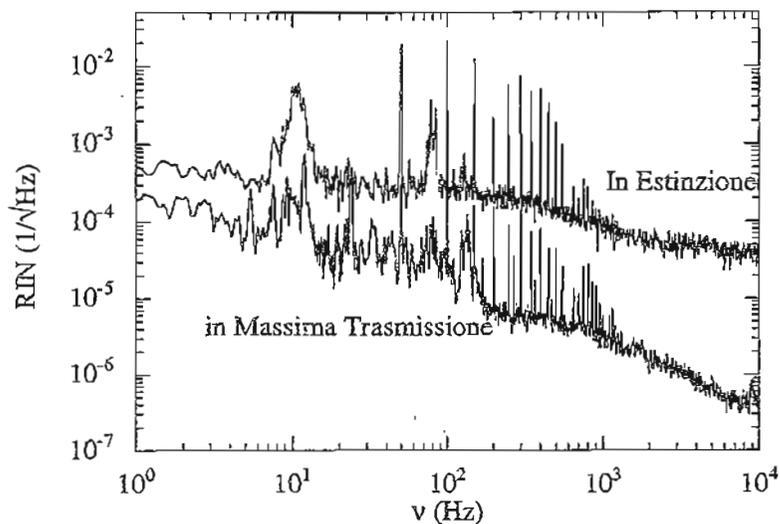


Figura 3.5: Confronto tra la RIN in estinzione e la RIN in massima trasmissione.

L'EFFETTO COTTON-MOUTON IN O₂

3.6 Note introduttive

All'inizio del secolo fu dimostrato sperimentalmente che i gas posseggono una debole birifrangenza quando luce polarizzata li attraversa in presenza di un forte campo magnetico normale alla direzione di propagazione della luce. Questo effetto indotto dal campo magnetico è chiamato effetto Cotton-Mouton, poichè fu investigato nel dettaglio da A.Cotton e H.Mouton [43] nel 1905. Essi riconobbero l'analogia con l'effetto Kerr [44] (birifrangenza indotta dal campo elettrico) e furono in grado di separare il segnale di birifrangenza magnetica dal segnale più intenso prodotto dall'effetto Faraday [45]. Come dimostrato nei dettagli in [46], l'anisotropia dell'indice di rifrazione Δn_{CM} è legata alle proprietà microscopiche del mezzo, in particolare alla polarizzabilità molecolare. Dal 1967 furono pubblicati molti lavori riguardanti gli effetti nei gas e gli esperimenti su tale effetto sono a tutt'oggi usati come sonde delle proprietà elettromagnetiche delle molecole (ad esempio per lo studio delle anisotropie della polarizzabilità magnetica ed elettrica). Per una revisione completa dell'argomento si veda [47].

Poichè lo stesso effetto, su scala estremamente più debole, avviene quando luce polarizzata si propaga in vuoto in presenza di un forte campo magnetico trasverso a causa delle fluttuazioni del vuoto, le misure dell'effetto Cotton-Mouton sono un ottimo test della sensibilità dell'apparato allestito per l'esperimento PVLAS.

L'effetto Cotton-Mouton prodotto dal gas residuo nella camera da vuoto dà origine ad effetti sistematici indesiderati la cui ampiezza è proporzionale alla pressione del gas. La conoscenza a priori dell'entità di questo effetto permette di stabilire il vuoto necessario all'interno della camera da vuoto per non oscurare la rivelazione del segnale dovuto alla birifrangenza magnetica del vuoto.

3.7 La tecnica sperimentale

L'effetto Cotton-Mouton dell'Ossigeno molecolare è stato misurato da S. Carusotto et al. nel 1982 [48] per $\lambda = 514.5$ nm, da H.Kling et al. [49] nel

1983 e da P.B.Lukins et al. [50] nel 1991 per $\lambda = 632.8$ nm. Le dipendenze dalla temperatura e dalla frequenza sono state studiate teoricamente in [49, 50, 51].

Poichè il valore per $\lambda = 1064$ nm non era noto, è stata effettuata una misura utilizzando l'apparato schematizzato in Fig.3.6. Il campo magnetico

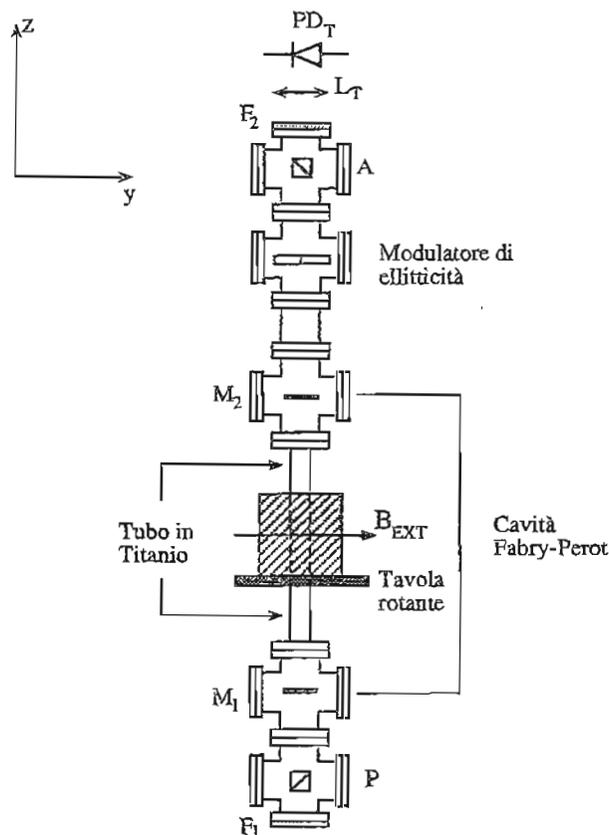


Figura 3.6: Schema dell'apparato realizzato per la misura dell'effetto Cotton-Mouton in Ossigeno.

\vec{B}_{EXT} è prodotto da un dipolo permanente fornito dalla Magnetic Solutions ltd, Dublino, Irlanda. Si tratta di un magnete realizzato in Nd-Fe-B, di forma cilindrica (lunghezza $L = 0.16$ m, diametro esterno 17 cm) con un foro centrale del diametro di 45 mm per ospitare la cavità ottica. Il campo

magnetico, più intenso nella posizione centrale, ha, lungo la direzione di propagazione della luce, il profilo mostrato in Fig.3.7. Per applicare la tecnica

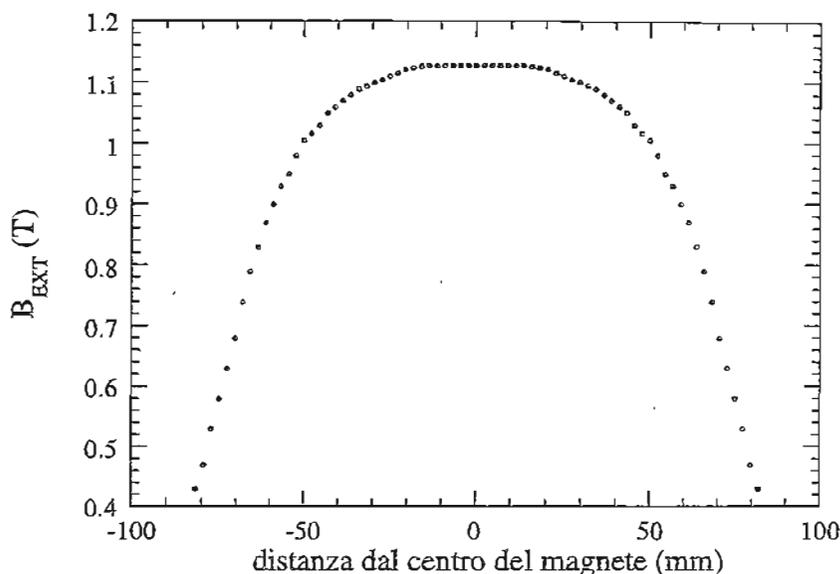


Figura 3.7: Andamento dell'intensità del campo magnetico lungo l'asse z coincidente con la direzione di propagazione della luce.

eterodina per la rivelazione del segnale il magnete M ruota attorno al proprio asse z coincidente con l'asse ottico della cavità Fabry-Pérot. Ciò è ottenuto collocando il dipolo su una piccola tavola rotante (mod.ROTARY ART312, Aerotech) dotata di un sistema proprio di controllo della rotazione. La parte della camera che attraversa la regione magnetica è realizzata con un tubo in Titanio del diametro di circa 30 mm.

Come nel caso delle misure di sensibilità effettuate con il modulatore fotoelastico, la corrente prodotta dal fotodiode PD_T viene amplificata e convertita in un segnale di tensione dal preamplificatore. Quindi il filtro passa-banda elimina la componente continua e la componente a $2\nu_p \approx 100\text{KHz}$ del segnale. Lo spettro in frequenza del segnale centrato alla frequenza di risonanza del modulatore fotoelastico ν_p è ottenuto dall'analizzatore di spettro. Per la determinazione della fase del segnale (si veda la Tabella (2.7)) si

utilizza lo schema mostrato in Fig.3.8. L'uscita del filtro passa-banda viene rivelata in fase mediante un lock-in alla frequenza di lavoro del modulatore fotoelastico. Restano così definite univocamente le relazioni di fase ¹; in particolare si può assumere la fase della modulazione del PEM come riferimento, risultando costante in ogni successiva misura. Il segnale in uscita dal lock-in viene campionato dall'analizzatore di spettro. Uno switch ottico posizionato sulla piastra di acciaio che sostiene la tavola rotante rivela la posizione della stessa tavola rotante durante la rotazione. Il segnale TTL prodotto, alla frequenza di rotazione, fornisce il trigger per l'analizzatore di spettro. I dati, visualizzati sull'analizzatore, vengono trasferiti attraverso l'interfaccia GPIB ad un Personal Computer della Macintosh che li immagazzina per l'analisi successiva. Per effetto del campo magnetico la luce, immagazzinata

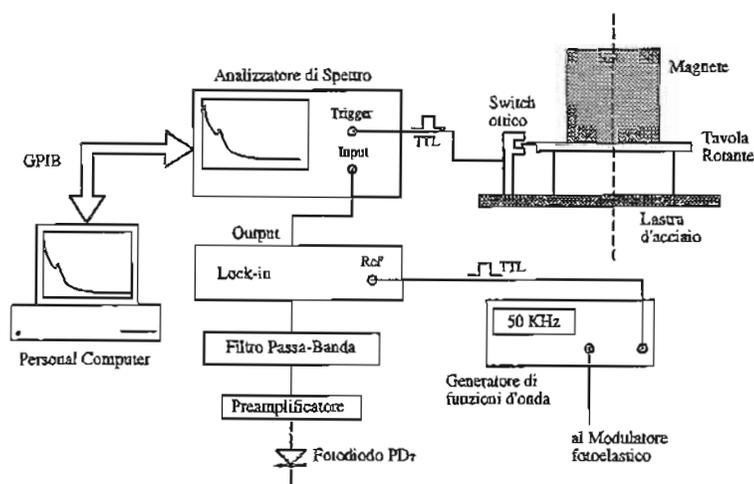


Figura 3.8: Schema dell'elettronica di rivelazione dell'effetto.

all'interno della cavità Fabry-Pérot acquista l'ellitticità cercata. Il segnale è identico a quello atteso nel caso della birifrangenza magnetica del vuoto e

¹L'utilizzo nell'apparato di segnali in cui le relazioni di fase sono fisse permette di effettuare medie vettoriali. In tal modo il rumore decresce come \sqrt{t} per la casualità della fase dove t è il tempo effettivo di acquisizione del segnale; l'effetto che si cerca rimane invece inalterato, avendo fase fissa, con il conseguente miglioramento della sensibilità della misura.

quindi si rimanda alle formule derivate nel Capitolo 3 dove Ψ_{QED} deve essere sostituito da Ψ_{O_2} . In Fig.3.9 è mostrato lo spettro di Fourier del segnale V_F

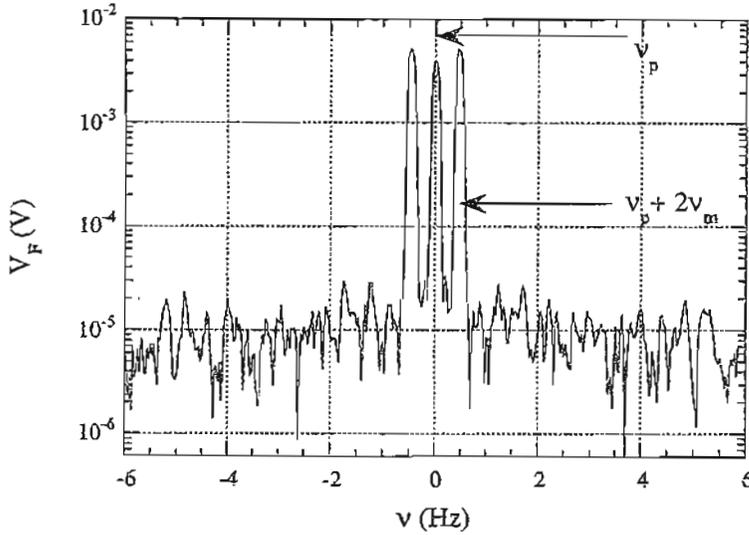


Figura 3.9: Spettro di Fourier del segnale raccolto al fotodiode per $P = 4.5$ Torr. L'ellitticità misurata è $\Psi_{O_2} = 3.1 \times 10^{-4}$.

proveniente dal fotodiode in condizioni di massima estinzione con una pressione di $P = 4.5$ Torr di Ossigeno in cavità. Per effetto del battimento tra la modulazione dell'effetto e la portante, attorno alla frequenza di risonanza del modulatore fotoelastico (≈ 50 KHz) sono presenti le bande laterali la cui ampiezza è proporzionale all'ellitticità cercata e all'ampiezza di modulazione del PEM

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} \varphi_0 \Psi_{O_2}(P). \quad (3.34)$$

Lo shift in frequenza delle bande laterali rispetto al picco principale a frequenza ν_p corrisponde alla frequenza $2\nu_m = 0.438$ Hz di modulazione dell'effetto dovuto alla rotazione del dipolo magnetico alla frequenza ν_m .

L'ellitticità acquistata dal fascio laser in un campione di Ossigeno molecolare (purezza 99.995 %) è stata misurata nell'intervallo di pressioni assolute 2-20 Torr. La pressione è stata misurata da un gauge assoluto con una precisione pari a ± 0.25 Torr.

Sono stati effettuati quattro set di misure in cui $\varphi_0 \approx 2 \times 10^{-2}$ e l'estinzione $\sigma_T^2 \approx 10^{-6}$. Durante le misure la temperatura è rimasta stabile intorno ai 20° C. Talvolta è stato necessario evacuare l'Ossigeno introdotto e riottimizzare la cavità Fabry-Pérot.

3.8 Risultati sperimentali e analisi

L'ellitticità misurata Ψ_{O_2} è legata all'effetto Cotton-Mouton, cioè all'anisotropia dell'indice di rifrazione $\Delta n_{CM} = n_{\parallel} - n_{\perp}$, dove, al solito, i simboli \parallel e \perp si riferiscono alla direzione della polarizzazione della luce rispetto alla direzione del campo magnetico \vec{B}_{EXT} . Seguendo la notazione usata in [47], si scrive

$$\Delta n_{CM} = \Delta n_u \left(\frac{B_{EXT}}{1 \text{ T}} \right)^2 \left(\frac{P}{760 \text{ Torr}} \right) \quad (3.35)$$

dove Δn_u è l'anisotropia dell'indice di rifrazione per $B_{EXT} = 1 \text{ T}$ e $P = 760 \text{ Torr}$. L'entità dell'effetto è, come predetto, lineare con la pressione del gas soggetto al campo magnetico.

L'ellitticità è data da

$$\Psi_{O_2}(P) = 2 \frac{F}{\lambda} \int_z (\vec{B}_{EXT} \times \vec{k})^2 dz \Delta n_u \frac{P}{760} = 2 \frac{F}{\lambda} \int_0^L B_{EXT}^2(z) dz \Delta n_u \frac{P}{760} \quad (3.36)$$

dove l'integrale è lungo la direzione di propagazione \vec{k} del fascio laser all'interno della regione magnetica ed F è la finezza della cavità Fabry-Pérot.

Nelle seguenti Figure sono riportati i risultati dei quattro set di misure. I punti sperimentali rappresentano l'ellitticità misurata in funzione della pressione. La curva sovrainposta è l'interpolazione lineare dei dati sperimentali secondo il metodo dei minimi quadrati. Il valore di Δn_u può essere calcolato dalle pendenze delle curve, noti F e $\int_0^L B_{EXT}^2(z) dz$. F si ottiene misurando il tempo di decadimento della cavità come descritto nel Capitolo precedente. L'integrale, il cui calcolo è basato sul grafico riportato in Fig.3.7, è pari a 0.161 Tm². Nella Tabella (3.1) sono riportate le quattro determinazioni sperimentali di Δn_u . Gli errori sulle pendenze sono calcolati con il metodo dei minimi quadrati attribuendo alle singole determinazioni sperimentali di ellitticità Ψ_{O_2} l'errore derivante dalla propagazione degli errori delle grandezze

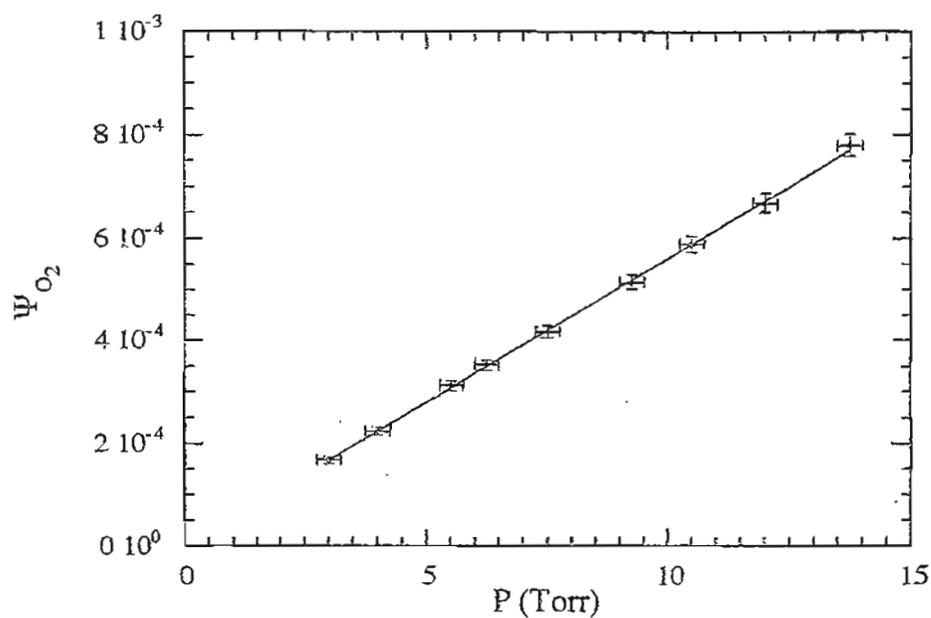


Figura 3.10: Ellitticità misurata in funzione della pressione (Primo set di dati sperimentali).

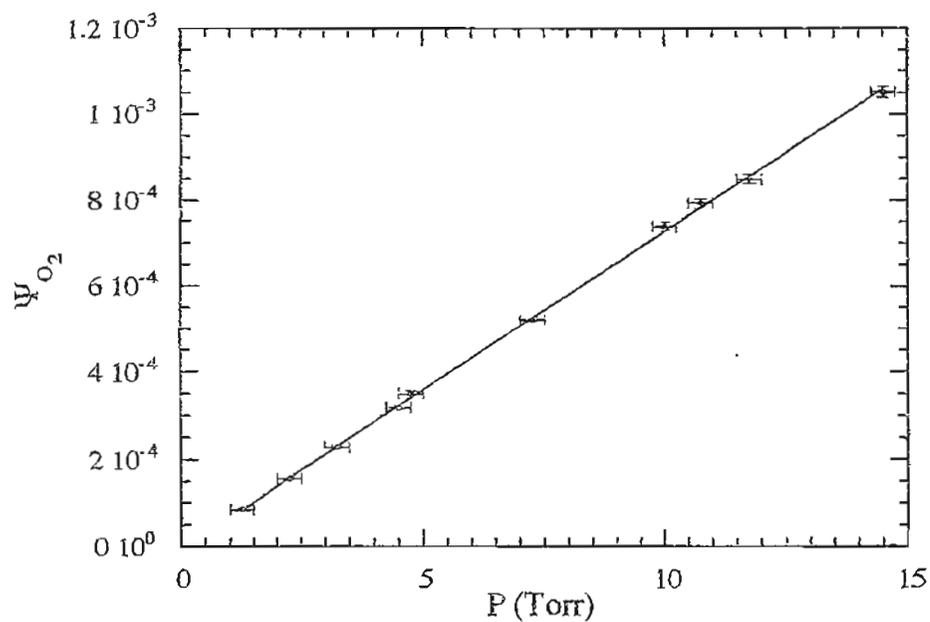


Figura 3.11: Ellitticità misurata in funzione della pressione (Secondo set di dati sperimentali).

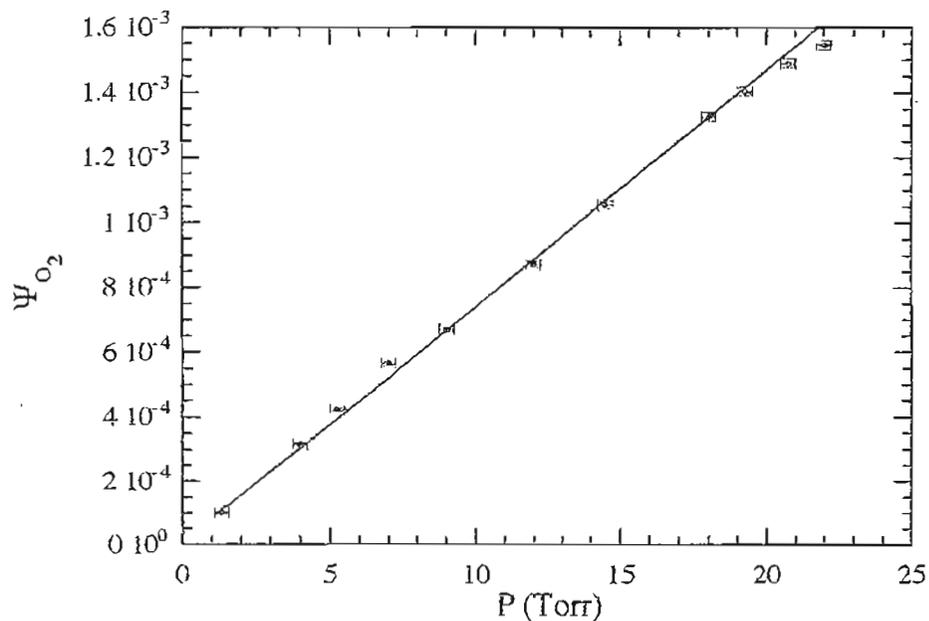


Figura 3.12: Ellitticità misurata in funzione della pressione (Terzo set di dati sperimentali).

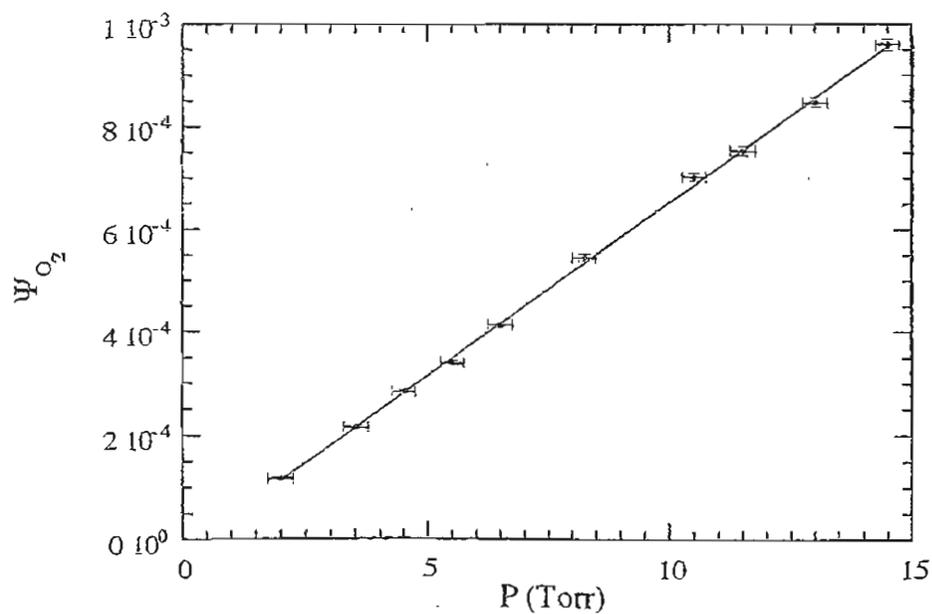


Figura 3.13: Ellitticità misurata in funzione della pressione (Quarto set di dati sperimentali).

Set	Pendenza	$\Delta n_u \pm \sigma_{\Delta n_u} (\times 10^{12})$	F	$\tau (\mu\text{sec})$
1	$(5.61 \pm 0.18) \times 10^{-5}$	-2.48 ± 0.09	56500 ± 500	128 ± 2
2	$(7.37 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	-2.24 ± 0.05	82900 ± 900	186 ± 2
3	$(7.05 \pm 0.13) \times 10^{-5}$	-2.33 ± 0.05	75400 ± 900	171 ± 2
4	$(6.75 \pm 0.15) \times 10^{-5}$	-2.23 ± 0.06	75400 ± 900	171 ± 2

Tabella 3.1: Riepilogo dei risultati sperimentali

interessate:

$$\Psi_{O_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \frac{I_+ + I_-}{I_{2p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{2} \right) \frac{I_+}{I_{2p}} \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{\Delta \Psi_{O_2}}{\Psi_{O_2}} \right)^2 = \left(\frac{\Delta \varphi_0}{\varphi_0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta I_+}{I_+} \right)^2 + \left(\frac{\Delta I_{2p}}{I_{2p}} \right)^2 \quad (3.38)$$

L'ampiezza di modulazione $\frac{\varphi_0}{2}$ è determinata attraverso l'ampiezza del picco alla frequenza $2\nu_p$

$$I_{2p} = J_2(\varphi_0) I_C \quad (3.39)$$

secondo la simbologia usata nel Capitolo 2. Alle ampiezze dei picchi è attribuito un errore trascurabile pari alla sensibilità di lettura sull'analizzatore di spettro. Gli errori sulle determinazioni di Δn_u derivano dalla propagazione degli errori delle grandezze coinvolte in cui il contributo predominante deriva dall'errore sulla pendenza. Il segno negativo dell'effetto viene determinato analizzando la fase delle bande laterali. La valutazione finale dell'effetto Cotton Mouton è ottenuta come media pesata delle quattro stime secondo le seguenti formule

$$\Delta n_u(O_2) = \frac{\sum_{i=1}^4 [(\Delta n_u)_i / (\sigma_{\Delta n_u})_i^2]}{\sum_{i=1}^4 [1 / (\sigma_{\Delta n_u})_i^2]} \quad (3.40)$$

$$\sigma_{\Delta n_u}(O_2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 \{ [(\Delta n_u)_i - \Delta n_u(O_2)]^2 / (\sigma_{\Delta n_u})_i^2 \}}{\sum_{i=1}^4 [1 / (\sigma_{\Delta n_u})_i^2]}} \quad (3.41)$$

Il risultato finale per l'Ossigeno molecolare a $T = 20^\circ$ è

$$\Delta n_u(O_2) = (-2.29 \pm 0.08) \times 10^{-12}. \quad (3.42)$$

A temperature simili, ma a differenti lunghezze d'onda, altre misure [48, 49, 50] hanno fornito valori intorno a -2.5×10^{-12} per $\Delta n_u(O_2)$. In [47] (in particolare nella Tabella VII) gli autori hanno calcolato gli effetti dispersivi per l'effetto Cotton-Mouton in O_2 . Una diminuzione nel valore assoluto tra il 3% ed il 5% dovrebbe verificarsi passando da 514.5 nm e 632.8 nm alla lunghezza d'onda da noi usata. Il risultato ottenuto è in pieno accordo con questa previsione. Grazie alla possibilità di disporre di campioni di gas di elevata purezza e alla grandezza dell'effetto, le misure dell'effetto Cotton-Mouton dell' O_2 sono state considerate come un conveniente riferimento per testare l'apparato di PVLAS. In futuro sono previste misure degli effetti più piccoli prodotti dal Ne e dall'He [47].

Il risultato ottenuto permette di concludere che, affinché l'effetto prodotto dall'Ossigeno residuo presente in cavità sia circa il 10% inferiore all'effetto della QED, è necessario raggiungere all'interno della camera da vuoto una pressione parziale residua di Ossigeno inferiore a 10^{-9} Torr. Sono attualmente in corso presso il Laboratori di Legnaro (Padova) delle prove di pompaggio all'interno di un tubo di quarzo della lunghezza di 4 m che dovrà costituire la cavità Fabry-Pérot dell'ellisometro finale. Attraverso un processo di riscaldamento si è riusciti a raggiungere una pressione totale di 10^{-9} Torr utilizzando delle pompe ioniche. Uno spettrometro di massa ha permesso poi l'analisi del gas residuo presente nella camera da vuoto confermando i valori attesi.

Conclusioni

Il lavoro descritto in questa tesi è stato svolto nell'ambito dell'esperimento PVLAS, in corso di realizzazione presso i Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova). È possibile apportare delle correzioni alle equazioni di Maxwell nel vuoto per includere gli effetti dell'interazione tra fotoni. Tali correzioni mostrano che il vuoto, in presenza di un campo magnetico, è un mezzo birifrangente. L'esperimento PVLAS si propone di misurare l'ellitticità acquistata da un fascio laser che si propaga in vuoto in direzione ortogonale al campo magnetico. Si intende utilizzare per tale misura un ellissometro basato essenzialmente su una cavità Fabry-Pérot, ossia su un sistema ottico costituito da due specchi separati da un numero semintero di lunghezze d'onda della luce utilizzata. Tale cavità, lunga 5 metri e disposta verticalmente, è utilizzata per creare un'onda stazionaria nella regione di campo magnetico ed aumentare l'effetto da misurare. L'aumento atteso è direttamente proporzionale alla Finezza della cavità.

Si è voluto verificare la fattibilità dell'ellissometro realizzando, su scala leggermente ridotta, l'apparato previsto per l'esperimento. Durante il primo anno di dottorato si sono realizzate cavità di elevata finezza: i fattori di qualità ottenuti sono stati i più alti mai raggiunti con un risonatore ottico. In particolare è stato testato con successo il raggiungimento di finezze di oltre 100 000 anche con cavità molto lunghe (3.2 m) disposte verticalmente e con gli specchi collocati su banchi ottici separati, come previsto per il set-up finale dell'esperimento.

Sono state eseguite delle misure di ellissometria per provare lo schema completo di misura. Nel corso delle prove effettuate con la cella di Faraday si è evidenziata l'impossibilità di poter trascurare la birifrangenza intrinseca degli specchi interferenziali che costituiscono la cavità Fabry-Pérot. L'anisotropia dello strato riflettente induce sul fascio di luce trasmessa dalla cavità una ellitticità che potrebbe impedire il raggiungimento dello shot noise e la

realizzazione della stessa misura. È stato quindi presentato lo studio condotto per caratterizzare l'anisotropia degli specchi: è stato dimostrato che l'effetto complessivo prodotto dalle birifrangenze intrinseche dei singoli specchi è equivalente a quello di un'unica lamina birifrangente per la quale si sono determinate le espressioni ed i valori del ritardo di fase e dell'orientazione dell'asse ottico. Quindi è stato definito un metodo sperimentale per l'allineamento della polarizzazione della luce incidente con l'asse ottico della lamina per minimizzare l'ellitticità indesiderata. Orientando opportunamente gli specchi stessi si è ottenuto nelle condizioni migliori un'estinzione di 7×10^{-7} corrispondente ad una ellitticità statica residua di circa 8×10^{-4} .

Le misure di sensibilità effettuate con il modulatore fotoelastico non hanno raggiunto il limite fissato dallo shot noise, ponendosi nel migliore dei casi circa un fattore 30 da esso. La sensibilità è limitata dalla birifrangenza residua presente nell'apparato ed imputabile alla sua struttura meccanica. La riduzione a valori tipici $\Psi_{STA} < 10^{-4}$ di eventuali misallineamenti già realizzata in altre occasioni [25] rende confidenti nella possibilità di perseguire l'obiettivo di una misura a livello shot con l'ausilio di un compensatore e soprattutto potendo operare nel sito finale realizzato con l'accortezza di limitare l'accoppiamento con le sorgenti di rumore ambientale.

Si vuole comunque notare che la sensibilità ottenuta a 2 Hz con l'utilizzo del modulatore fotoelastico

$$\Psi_s = 2.7 \times 10^{-7} \frac{1}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (3.43)$$

si traduce in una sensibilità per la misura di eventuali birifrangenze in cavità pari a

$$\Delta n = \frac{\Psi_s \lambda}{2Fd} = 9.52 \times 10^{-19} \quad (3.44)$$

a mia conoscenza il miglior valore finora ottenuto.

Va sottolineato un ulteriore risultato molto importante che deriva dalle misure degli sfasamenti introdotti dagli specchi della cavità Fabry-Pérot. Lo sfasamento complessivo introdotto dalla cavità è risultato nel peggiore dei casi 10^{-6} rad. Questo implica che la differenza tra le frequenze di risonanza delle due polarizzazioni principali della luce è molto minore della larghezza di risonanza della cavità: la luce pertanto risuona con la cavità e quindi viene trasmessa da essa, indipendentemente dalla polarizzazione. Questo risultato garantisce che con questo tipo di specchi è possibile effettuare l'esperimento

PVLAS nel quale si vuole evidenziare la polarizzazione del vuoto misurando l'ellitticità della luce trasmessa dalla cavità.

Infine con l'apparato realizzato è stato possibile fornire il valore dell'effetto Cotton-Mouton prodotto dall'Ossigeno in corrispondenza della lunghezza d'onda della luce usata ($1.064 \mu\text{m}$). Tale valore

$$\Delta n_u(\text{O}_2) = (-2.29 \pm 0.08) \times 10^{-12} \quad (3.45)$$

è in perfetto accordo con le previsioni teoriche.

Sono attualmente in corso presso i Laboratori Nazionali di Legnaro misure dell'effetto del campo magnetico di fuga sui componenti ottici presenti nell'ellissometro, in particolare sugli specchi interferenziali che risultano essere i componenti più vicini al campo magnetico. È necessario infatti sapere al di sotto di quale valore deve essere ridotto il campo magnetico sugli specchi affinché non venga oscurata la rivelazione del segnale della birifrangenza magnetica del vuoto. Simulazioni per il calcolo del campo magnetico di fuga in vari punti dell'apparato sembrano indicare come indispensabile l'utilizzo di schermi di attenuazione intorno ai componenti ottici: si tratta essenzialmente di un sistema di cilindri coassiali realizzati in μ -metal la cui efficienza di schermaggio è già stata testata.

Parallelamente è in allestimento la parte dell'apparato che riguarda il magnete ed il criostato. È previsto l'assemblaggio completo dell'apparato per la prossima primavera.

Appendice A

IL CIRCUITO DI AGGANCIO

A.1 Introduzione

Per effettuare misure di ellissometria sfruttando la moltiplicazione dell'effetto di birifrangenza in una cavità Fabry-Pérot occorre fare in modo che la frequenza ν_L della luce che entra in cavità coincida con una delle frequenze ν_C per le quali la cavità trasmette e che tale valore rimanga costante per il tempo necessario per effettuare la misura. In altre parole occorre che sia mantenuta stabile la condizione di risonanza, in un equilibrio dinamico che contrasti le derive termiche della frequenza del laser, della posizione degli specchi oltrechè le vibrazioni meccaniche degli stessi. Si tratta quindi di eseguire un *aggancio in frequenza* tra la sorgente luminosa e la cavità. Questo può essere realizzato in due modi:

- 1) spostando in tempo reale gli specchi della cavità facendo uso di attuatori piezoelettrici;
- 2) oppure modificando la frequenza del laser.

Come si è visto nel paragrafo (2.2.1), il laser utilizzato dispone di due attuatori che permettono di modificare la frequenza di emissione. Pertanto, nel caso in esame, stabilizzare la frequenza del laser equivale a pensare la frequenza di risonanza della cavità come un riferimento al quale asservire la frequenza del laser.

Per spiegare il principio di funzionamento del circuito di aggancio è utile avvalersi dello schema riportato in Fig.A.1.

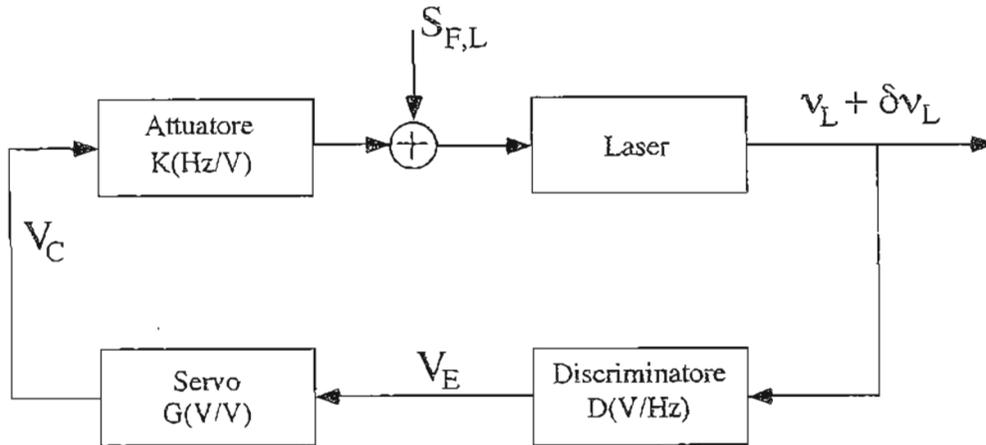


Figura A.1: Schema semplificato del sistema di stabilizzazione della frequenza del laser. Il simbolo + indica un sommatore; V_E è il segnale d'errore che esce dal discriminatore; V_C è il segnale di correzione che esce dal servo e va all'attuatore.

In questo schema si suppone che il laser emetta alla frequenza ν_L costante e che l'emissione sia disturbata da alcuni processi di rumore in frequenza descritti dalla densità spettrale $S_{F,L}$ (misurata in $\text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$). La frequenza di emissione del laser $\nu_L + \delta\nu_L$ è confrontata con la frequenza di riferimento ν_C dal discriminatore. Quest'ultimo fornisce un segnale funzione della deviazione della frequenza del laser da ν_C

$$V_E = V_E(\nu_L + \delta\nu_L - \nu_C). \quad (\text{A.1})$$

Supponendo $\nu_L = \nu_C$ si ha $V_E = V_E(\delta\nu_L)$: il discriminatore converte le fluttuazioni di frequenza in fluttuazioni di tensione. Definendo $D(\delta\nu_L)$ in modo che

$$D(\delta\nu_L) = \frac{V_E(\delta\nu_L)}{\delta\nu_L} \quad (\text{A.2})$$

si ha che, per $\delta\nu_L \rightarrow 0$, il segnale di errore V_E può essere espresso come

$$V_E = D * \delta\nu_L \quad (\text{A.3})$$

dove D è il fattore di conversione frequenza-tensione. Il segnale di errore viene amplificato dal servo con un fattore di guadagno G . Il segnale V_C in uscita dal servo ha la funzione di correzione ed è inviato al laser tramite

l'attuatore caratterizzato dal fattore di conversione $K(\text{Hz/V})$. L'attuatore K agisce sulla frequenza di risonanza della cavità monolitica del laser variando la frequenza del fascio luminoso.

Con riferimento alla Fig.A.1 la densità spettrale di rumore ad anello chiuso $S_{F,CL}$ presente nella luce laser è [55]

$$S_{F,CL} = \frac{S_{F,L}}{|1 + KGD|}. \quad (\text{A.4})$$

Questa relazione indica che nel limite in cui si ha alto guadagno ad anello aperto ($KGD \gg 1$), l'anello di retroazione valuta e si oppone al rumore in frequenza del laser. Le funzioni K , G e D sono in generale dipendenti dalla frequenza ed il loro comportamento determinerà la banda di funzionamento e le caratteristiche di stabilità del sistema di controllo.

La densità spettrale (A.4) è, naturalmente, il risultato di una schematizzazione: bisogna tener presente infatti che ogni elemento introduce nel sistema del rumore. Si consideri la Fig.A.2 in cui $S_{F,L}$, $S_{V,S}$ e $S_{V,D}$ sono rispettivamente la densità spettrale del laser più attuatore, la densità spettrale del servo e quella del discriminatore.

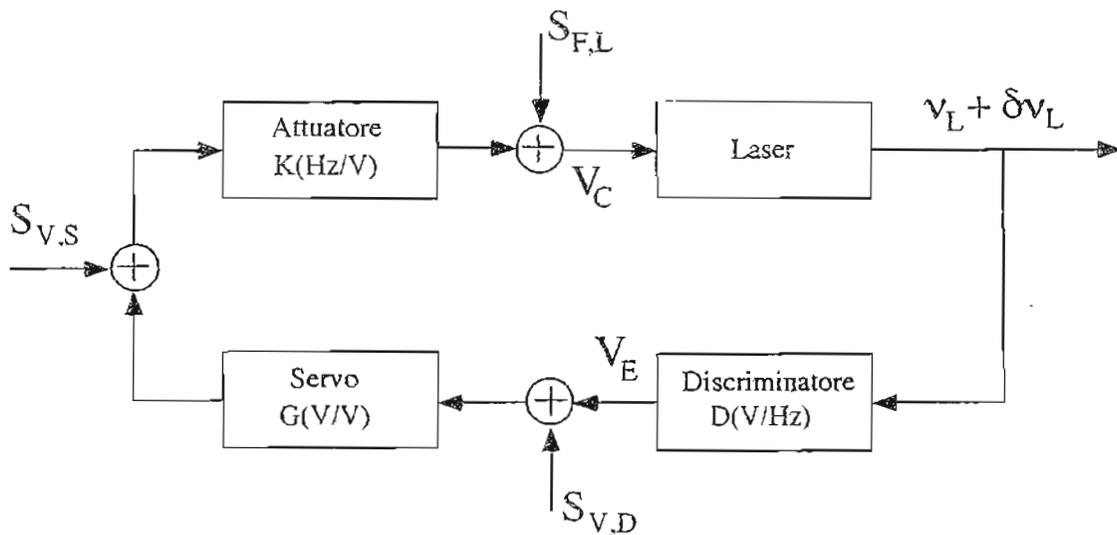


Figura A.2: Schema del sistema di stabilizzazione con i contributi dei rumori dei suoi elementi.

La densità spettrale di rumore ad anello chiuso diventa

$$S_{F,CL} = \frac{\sqrt{S_{F,L}^2 + |K S_{V,S}|^2 + |G K S_{V,D}|^2}}{|1 + KGD|}. \quad (\text{A.5})$$

A basse frequenze dove, come si vedrà in seguito, G è molto grande, il rumore del discriminatore $S_{V,D}$ prevale su tutti gli altri termini. Il minimo valore assunto dalla densità spettrale lineare è allora dato da

$$S_{F,CL} = \frac{S_{V,D}}{D}. \quad (\text{A.6})$$

Tale valore dipende solo dalle proprietà del discriminatore che risulta quindi l'elemento chiave del loop di controllo. Nei paragrafi successivi vengono descritti la tecnica di discriminazione usata (tecnica di Pound-Drever) ed il servo e derivata l'espressione di D .

A.2 La tecnica di Pound-Drever

Nella tecnica di Pound-Drever [56, 57] la luce laser viene modulata in fase e l'aggancio avviene utilizzando il segnale riflesso dalla cavità Fabry-Pérot. Per ottenere il segnale di errore si utilizza una rivelazione di fase. In Fig.A.3 è presentato un possibile schema di realizzazione.

La luce del laser viene modulata in fase ad una radiofrequenza $\Omega_m/2\pi$ grande rispetto alla larghezza di riga della cavità Fabry-Pérot e piccola rispetto al Free Spectral Range (2.11). Se la portante è accordata alla frequenza del Fabry-Pérot, le bande laterali sono completamente riflesse dalla cavità con un ritardo di fase nullo. La componente portante viene anch'essa in parte riflessa ed in corrispondenza della risonanza essa presenta una variazione di fase molto accentuata [29, 35]. La portante riflessa, ritardata in fase, si mescola con le bande laterali e viene rivelata da un fotodiodo veloce. Nel segnale si ha la presenza di un termine (AM) alla frequenza Ω_m avente ampiezza proporzionale al seno del ritardo di fase δ su un giro di attraversamento del Fabry-Pérot. Nei pressi della risonanza tale fase dipende linearmente dallo scarto in frequenza $\delta\nu_L$ tra la radiazione incidente e la frequenza risonante della cavità

$$\sin \delta \approx \delta = \frac{4\pi d}{c} \delta\nu_L \quad (\text{A.7})$$

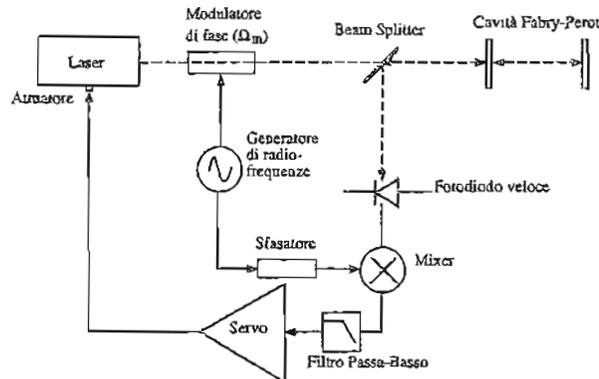


Figura A.3: Schema dell'aggancio secondo la tecnica di Pound-Drever.

ove d è la lunghezza della cavità e c è la velocità della luce. Il segnale di errore si ottiene mescolando una parte del segnale a radiofrequenza usato per modulare il laser con l'uscita del fotodiodo. Un filtro passa basso viene poi usato per rivelare l'andamento del termine AM che contiene l'informazione sulla grandezza $\delta\nu_L$. Tale segnale, una volta amplificato, può essere inviato all'attuatore del laser per il controllo.

Questo sistema è limitato dal rumore in ampiezza della luce laser. La presenza di rumore in ampiezza alla frequenza di modulazione Ω_m non si distingue dal segnale e viene quindi tradotto come correzione di frequenza. Per questa ragione la modulazione della fase deve avvenire ad una frequenza ove il fascio luminoso presenta il minimo rumore in intensità.

Sebbene i laser utilizzati raggiungano il limite di rumore shot ad una frequenza intorno ai 10 MHz, la modulazione viene effettuata, nel caso in esame, ad una frequenza molto inferiore (≈ 900 KHz) in corrispondenza della quale l'effetto del rumore in ampiezza (RAM Residual amplitude modulation) è ancora tollerabile¹ e diventa molto più semplice la realizzazione del circuito di controllo.

¹È stato osservato che la potenza utilizzata per la discriminazione è dell'ordine di qualche mW. A tali potenze il rumore in ampiezza è dell'ordine del livello shot già a frequenze di qualche MHz.

A.3 La modulazione di fase

La relazione fra la fase $\varphi(t)$ e la frequenza angolare $\omega(t)$ di un'onda è

$$\varphi(t) - \varphi_0(t) = \int_{t_0}^t \omega(t_1) dt_1. \quad (\text{A.8})$$

Se si modula la frequenza del laser alla frequenza Ω_m

$$\omega(t) = \omega_0 + A_m \cos(\Omega_m t + \phi) \quad (\text{A.9})$$

corrispondentemente si ha

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \beta \sin(\Omega_m t + \phi) - \beta \sin \phi \quad (\text{A.10})$$

dove $\beta = A_m/\Omega_m$ è l'indice di modulazione ($\beta \approx 1.1$). Quindi la modulazione in frequenza è equivalente alla modulazione di fase. Questo fornisce la possibilità di modulare in fase la luce laser agendo direttamente sull'attuatore piezoelettrico². Quindi utilizzando un sommatore è possibile inviare contemporaneamente al laser il segnale a radiofrequenza ed il segnale di correzione del circuito di controllo (si veda la Fig.A.4).

Tale schema, realizzato per la prima volta in [59], offre una valida alternativa all'utilizzo di un modulatore di fase (tipicamente una cella di Pockels) esterno al laser (Fig.A.3). Una modulazione di ampiezza spuria può essere infatti introdotta direttamente dal modulatore di fase in caso di un non perfetto allineamento rispetto al fascio laser che lo attraversa [27].

A.4 Il segnale di discriminazione

Viene qui derivato il segnale di discriminazione facendo riferimento allo schema di aggancio effettivamente realizzato e mostrato in Fig.A.4.

Sia $\nu_L = \nu_C + \delta\nu_L$ la frequenza del laser. Per luce linearmente polarizzata, l'ampiezza del campo elettrico è

$$E_L(t) = E_0 e^{2\pi i(\nu_C + \delta\nu_L)t} = E_0 e^{i(\omega_C + \delta\omega_L)t}. \quad (\text{A.11})$$

²Per frequenze di modulazioni maggiori di 100 KHz la risposta del cristallo laser non è più lineare ma può essere comunque usato come modulatore di fase a frequenza fissa.

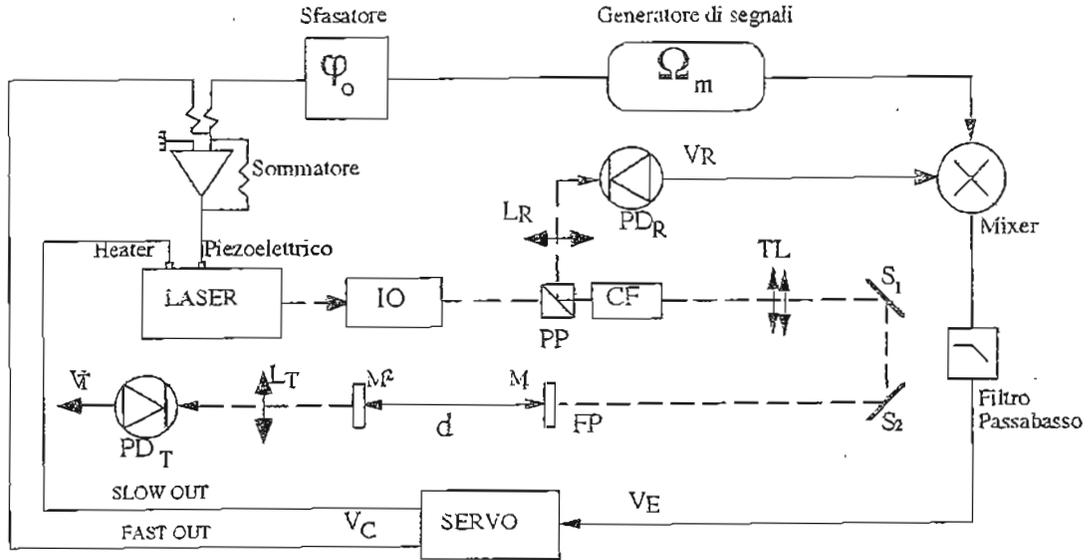


Figura A.4: Schema del circuito di aggancio realizzato.

In seguito alla modulazione di fase alla pulsazione Ω_m , il campo elettrico diventa

$$E_L(t) = E_0 e^{i(\omega_C t + \delta\omega_L t + \beta \sin \Omega_m t)} \approx E_0 e^{i(\omega_C + \delta\omega_L)t} [J_0(\beta) + iJ_1(\beta) e^{i\Omega_m t} + iJ_1(\beta) e^{-i\Omega_m t} + \dots] \quad (\text{A.12})$$

dove J_0 e J_1 sono le funzioni di Bessel di ordine zero. Il campo elettrico risulta costituito da tre componenti: la portante e le bande laterali a pulsazione $\omega_C + \delta\omega_L \pm \Omega_m$.

Il fascio attraversa l'isolatore ottico IO, il beam splitter polarizzatore PP orientato alla massima trasmissione e la cella di Faraday CF. Quest'ultima ruota la polarizzazione del fascio di 45° . Quindi il laser incide sulla cavità Fabry-Pérot (FP). La luce riflessa, passando ancora attraverso la cella di Faraday, subisce una ulteriore rotazione della polarizzazione di 45° così da essere deviata dal beam splitter. Il fascio viene focalizzato dalla lente L_R sul fotodiodo PD_R che genera un segnale in tensione $V_R(t)$

$$V_R(t) = \eta_F R_R \gamma |E_F(t)|^2 \quad (\text{A.13})$$

dove η_F è la sensibilità del fotodiodo (A/W), R_R è la resistenza di carico del fotodiodo, γ è l'attenuazione dell'intensità del fascio dovuta all'attraversamento del beam splitter e della cella di Faraday ed

$$E_F(t) = E_0 e^{i(\omega_C + \delta\omega_L)t} [J_0(\beta) H_R(\delta\omega_L) + iJ_1(\beta) e^{i\Omega_m t} H_R(\delta\omega_L + \Omega_m) + iJ_1(\beta) e^{-i\Omega_m t} H_R(\delta\omega_L - \Omega_m)]. \quad (\text{A.14})$$

$H_R(\omega)$ è la funzione di trasferimento in riflessione della cavità Fabry-Pérot [27, 29, 35]

$$H_R(\omega) = \frac{\sqrt{R} [1 - (T + R) e^{i\delta}]}{1 - R e^{i\delta}} \quad (\text{A.15})$$

dove, al solito, R e T sono rispettivamente la riflettività e la trasmittività degli specchi della cavità Fabry-Pérot.

Il segnale $V_R(t)$ contiene termini alle frequenze 0, Ω_m e $2\Omega_m$. L'utilizzo del mixer di efficienza χ permette di isolare il solo termine in Ω_m : si effettua infatti il battimento tra $V_R(t)$ ed un segnale del tipo $\cos(\Omega_m t + \varphi_0)$ fornito da un generatore di segnale. La fase φ_0 è introdotta attraverso lo sfasatore mostrato in Fig.A.4.

Nel segnale proveniente dal mixer

$$\chi V_R(t) \cos(\Omega_m t + \varphi_0) \quad (\text{A.16})$$

la componente continua rappresenta proprio la tensione di errore cercata V_E ricavabile usando un filtro passa-basso. Si ottiene, all'uscita di quest'ultimo, un segnale [27] avente una componente in fase (proporzionale a $\cos \varphi_0$) ed una in quadratura (proporzionale a $\sin \varphi_0$) i cui andamenti sono mostrati in Fig.A.5 al variare di $\Delta\nu_L$.

La scelta $\varphi_0 = 0$ rappresenta quella che fornisce il segnale di errore corretto. Questo segnale assume una pendenza massima nel punto $\delta\nu_L = 0$

$$D_0 = \left. \frac{\partial V_E}{\partial (\delta\nu_L)} \right|_{\delta\nu_L=0} = -16\chi\eta_F\gamma R_R \frac{TF^2}{\pi\sqrt{R}} J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{d}{c} |E_0|^2. \quad (\text{A.17})$$

Se si denota con $V_0 = \eta_F\gamma R_R |E_0|^2$ il valore massimo di tensione sul fotodiode in riflessione (cioè non in risonanza) e si assume $R \approx 1$, si ottiene

$$D_0 \approx -16\chi V_0 \frac{TF^2}{\pi} J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{d}{c}. \quad (\text{A.18})$$

Quindi le cavità con finezza elevata forniscono una grande pendenza del segnale di errore e quindi, ricordando la (A.6), una elevata efficienza nella soppressione delle fluttuazioni di frequenza della luce laser.

Osservando l'andamento del segnale di errore (Fig.A.5), si vede come la pendenza del segnale di discriminazione sia massima solo in una banda ristretta di frequenze, corrispondente al tratto lineare intorno a $\delta\nu_L = 0$. Tale banda coincide esattamente con la larghezza di riga della cavità. Al di

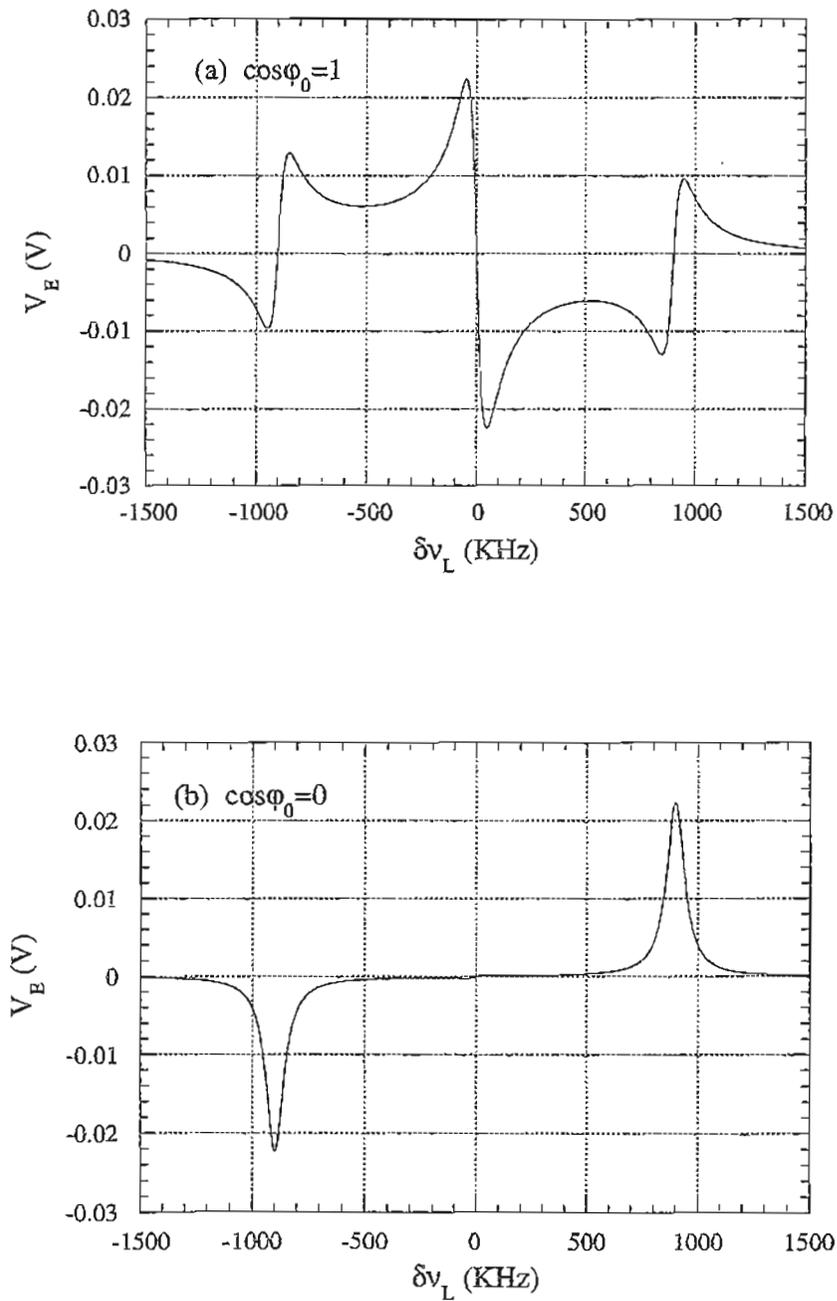


Figura A.5: Segnale di errore V_E calcolato con $d = 1$ m, $\Delta\nu_C = 50$ KHz ($F = 3000$), $\Omega_m = 900$ KHz. (a) componente in fase, (b) componente in quadratura.

fuori di questa banda la pendenza di discriminazione diminuisce in modulo sino a cambiare di segno quando raggiunge la frequenza di modulazione Ω_m . Nella realizzazione del sistema completo di aggancio è buona norma [58] avere una banda di retroazione circa una decade minore della banda massima Ω_m .

A.5 Il Servo

Il segnale di errore V_E costituisce l'input del servo (Fig.A.2): essenzialmente si tratta di un circuito di amplificazione che fornisce l'alto guadagno G necessario per il controllo (A.5). Per la stabilità è necessario che la pendenza del guadagno ad anello aperto sia minore di 12 dB/ottava alla frequenza ove il guadagno è unitario. Al di sotto di tale frequenza la pendenza della curva di guadagno può essere più elevata, compatibilmente con le prestazioni dell'elettronica. È stato quindi realizzato [27] un circuito di aggancio avente una funzione di trasferimento con un andamento di tipo $1/f$ nella zona oltre i 30 KHz, ed avente la possibilità, per frequenze inferiori, di aumentare la pendenza sino ad andamenti del tipo $1/f^4$ corrispondenti a 24 dB/ottava. Lo schema semplificato del servo è mostrato in Fig.A.6.

L'ingresso IN, che preleva direttamente il segnale V_E all'uscita del filtro passa-basso viene innanzitutto amplificato tramite uno stadio di pura amplificazione G_0 . Successivamente vi sono tre integratori I1, I2 e I3 che possono essere disabilitati mediante l'utilizzo di interruttori. Quindi il segnale viene prelevato da altri due integratori: IF ed IS. Il controllo della frequenza del laser avviene essenzialmente utilizzando l'uscita FAST OUT ed inviandola al piezoelettrico. Tuttavia per compensare le derive a bassa frequenza si rende necessaria anche una regolazione automatica della temperatura di lavoro inviando al termostato il segnale proveniente dall'uscita SLOW OUT. La frequenza ove i due sistemi di controllo forniscono correzioni uguali è 0.16 Hz. Per frequenze inferiori a tale valore l'elevato range dinamico del controllo di temperatura del laser permette di compensare derive termiche molto ampie rendendo praticabile la realizzazione di cavità risonanti stabili per lunghi periodi di tempo.

L'aggancio si ottiene inizialmente mediante IF (con gli stadi I1, I2 ed I3 disabilitati). IF è un integratore con polo alla frequenza $f_1 = 0.16$ Hz ed uno zero alla frequenza $f_2 = \Delta\nu_C/2$ dove $\Delta\nu_C$ è la larghezza di riga della cavità Fabry-Pérot. Lo zero nel tratto ad alta frequenza serve per avere un comportamento ad anello aperto di tipo f^{-1} . Per frequenze maggiori a $\Delta\nu_C/2$

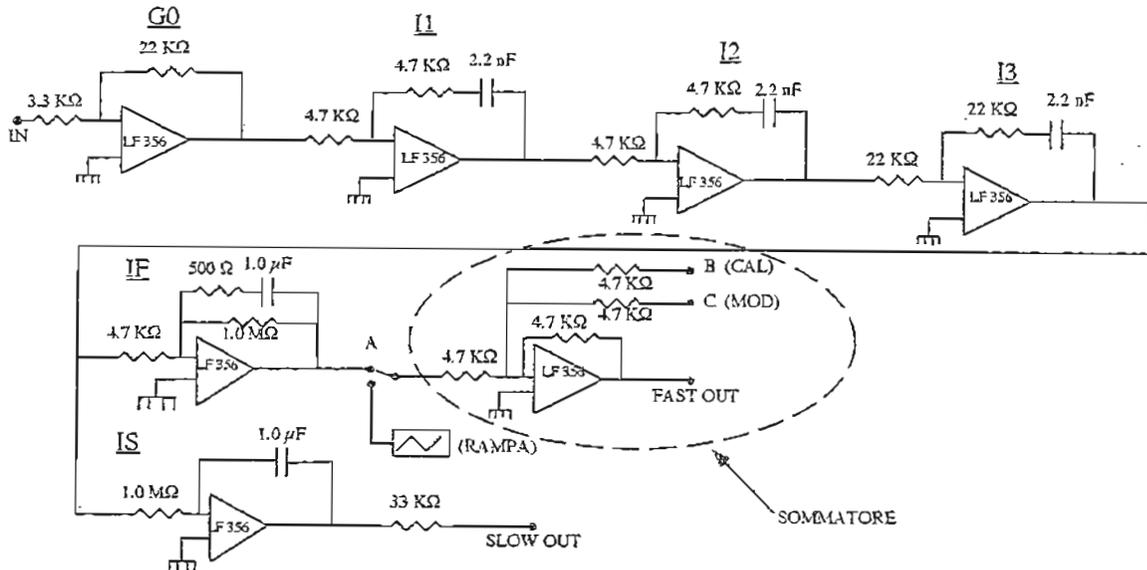


Figura A.6: Schema del circuito di amplificazione (Servo). In particolare A è un interruttore che permette di inviare un segnale ad onda trinagolare al piezoelettrico del laser per generare la scansione delle frequenze del laser in fase di allineamento degli specchi; B è l'ingresso per un eventuale segnale di calibrazione; C è l'ingresso del segnale per la modulazione di fase.

il comportamento corretto è già fornito dal discriminatore. Osservando il grafico di $D = V_E/\delta\nu_L$ in funzione di $\delta\nu_L$ (Fig.A.7) si può rilevare il tipico andamento di un filtro passa-basso con frequenza di taglio $\Delta\nu_C/2$. Tale comportamento è stato dimostrato anche in maniera analitica (tesi tonini).

Aprendo gli interruttori è possibile aumentare la pendenza della curva di guadagno globale G per frequenze inferiori agli zeri aggiustabili degli integratori f_{zi} . Qualora tutti gli stadi siano abilitati si ottiene un andamento f^{-4} per frequenze inferiori al KHz. A basse frequenze il guadagno G deve essere molto elevato per sopprimere la componente di rumore del laser di tipo $1/f$: in particolare a 1 Hz si ha $G \approx 10^{14}$. Questo non crea problemi in quanto i segnali d'errore V_E che si utilizzano sono prossimi allo zero essendo un loop di controllo. In fase di avvio si possono avere dei fenomeni di saturazione a cui si ovvia chiudendo temporaneamente gli interruttori. L'andamento tipico del guadagno del servo schematizzato in Fig.A.6 è riportato in Fig.A.8.

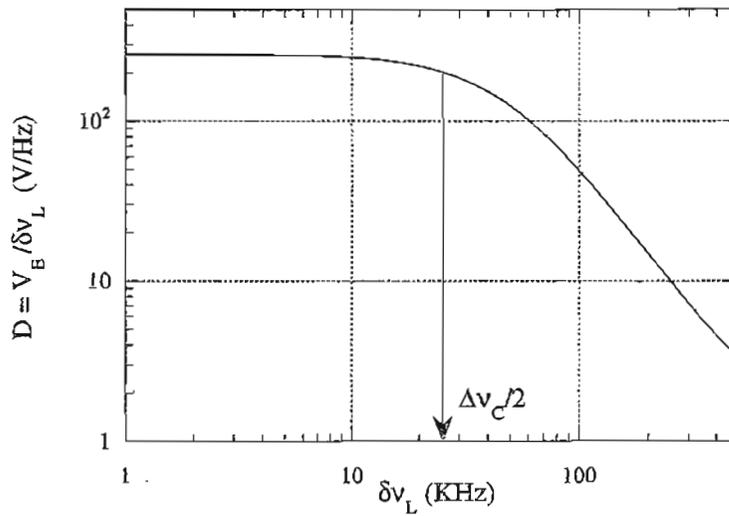


Figura A.7: Grafico di $D = V_E / \delta \nu_C$ in funzione di $\delta \nu_C$ per una cavità con $\Delta \nu_C = 50$ KHz e $d = 1$ m ($F = 3000$).

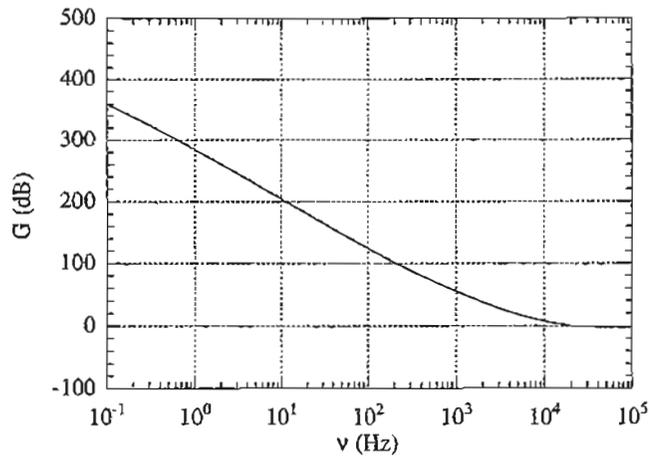


Figura A.8: Guadagno del Servo realizzato in funzione della frequenza.

Appendice B

ELLITTICITÀ INTRODotta DAGLI SPECCHI INTERFERENZIALI

B.1 Introduzione

L'influenza delle anisotropie ottiche residue degli specchi interferenziali come fonte di rumore e di errori sistematici è un problema cruciale negli esperimenti interferometrici ad alta risoluzione come la rivelazione di onde gravitazionali [60, 61], la misura della violazione della parità [62] e lo stesso PVLAS. In quest'ultimo caso, se gli assi di birifrangenza degli specchi della cavità Fabry-Pérot non sono allineati lungo la direzione della polarizzazione incidente, il campo elettrico del fascio laser viene proiettato sui due autostati mutuamente ortogonali della cavità che hanno frequenze di risonanza debolmente differenti. Questa non degenerazione della frequenza dà origine ad un fascio trasmesso polarizzato ellitticamente. L'esperimento PVLAS può essere effettuato con questo tipo di specchi solo se la differenza tra le frequenze di risonanza è inferiore alla larghezza di riga del risuonatore definita in (2.2.3). Inoltre l'ampiezza del picco (si veda la Tabella (2.7)) alla frequenza della portante aumenta all'aumentare della birifrangenza statica del sistema, causata in parte dagli specchi, compromettendo il raggiungimento dello shot-noise e quindi la rivelazione del segnale cercato con il tempo di integrazione atteso.

L'ellitticità indotta sul fascio laser che incide su uno specchio è in generale la somma di due contributi: l'ellitticità (off-0°) legata all'angolo di inciden-

za [12], nulla nel caso di incidenza normale e quella prodotta dal deposito dielettrico che costituisce la superficie riflettente e non dipende dall'angolo di incidenza ma esclusivamente dalla direzione della polarizzazione incidente. La natura di quest'ultimo contributo, testimone di una struttura non isotropa della superficie dello specchio, non è a tutt'oggi interamente chiara: presumibilmente è imputabile allo stress agente sul deposito dielettrico causato dalla differenza tra i coefficienti di espansione termica dello stesso deposito e del substrato.

Sono stati condotti molti studi sperimentali delle proprietà birifrangenti degli specchi interferenziali [63, 64, 40, 66] utilizzando tecniche di ellissometria e sfruttando l'amplificazione dell'effetto entro una cavità ottica multipass. È stato dimostrato [63] che il valore della birifrangenza e la direzione degli assi cambiano sensibilmente da punto a punto sulla superficie riflettente.

Viene di seguito descritto un metodo per caratterizzare la birifrangenza degli specchi simile a quello usato in [65]: viene utilizzato l'interferometro Fabry-Pérot descritto nel Capitolo 2 in risonanza in cui le variazioni della polarizzazione della luce derivanti dalle riflessioni sugli specchi si sommano coerentemente. Poichè si può amplificare la birifrangenza in cavità di un fattore proporzionale alla finezza, il metodo risulta particolarmente adeguato per caratterizzare specchi di alta qualità. Da ormai parecchi anni sono infatti disponibili depositi ottici con perdite dell'ordine di 10^{-6} ed anche meno. Questi altamente omogenei depositi danno origine a birifrangenze residue molto piccole corrispondenti a ritardi di fase di $10^{-7} - 10^{-6}$ rad.

La tecnica impiegata presenta ulteriori vantaggi. In una cavità Fabry-Pérot l'incidenza sugli specchi è strettamente normale e quindi le birifrangenze off- 0° sono nulle. Essendo poi gli specchi alloggiati all'interno delle apposite scatole di montaggio, la birifrangenza che si misura non deriva da azioni di stress o di gravità agenti sugli specchi. Infine l'impiego di tale cavità permette di determinare un effetto puntuale sulla superficie dello specchio o al più mediato sulle dimensioni dello spot luminoso (dell'ordine del mm).

B.2 La lamina equivalente

Nel modello teorico alla base del metodo sperimentale usato per la misura della birifrangenza degli specchi, ciascuno specchio della cavità Fabry-Pérot è composto (Fig.B.1) da uno specchio isotropico S_i ($i=1,2$) e da una lamina birifrangente associata al deposito dielettrico SP_i ($i=1,2$) e responsabile della

birifrangenza in esame. Gli assi lento e veloce di SP_1 e SP_2 sono orientati come in Fig.B.1.

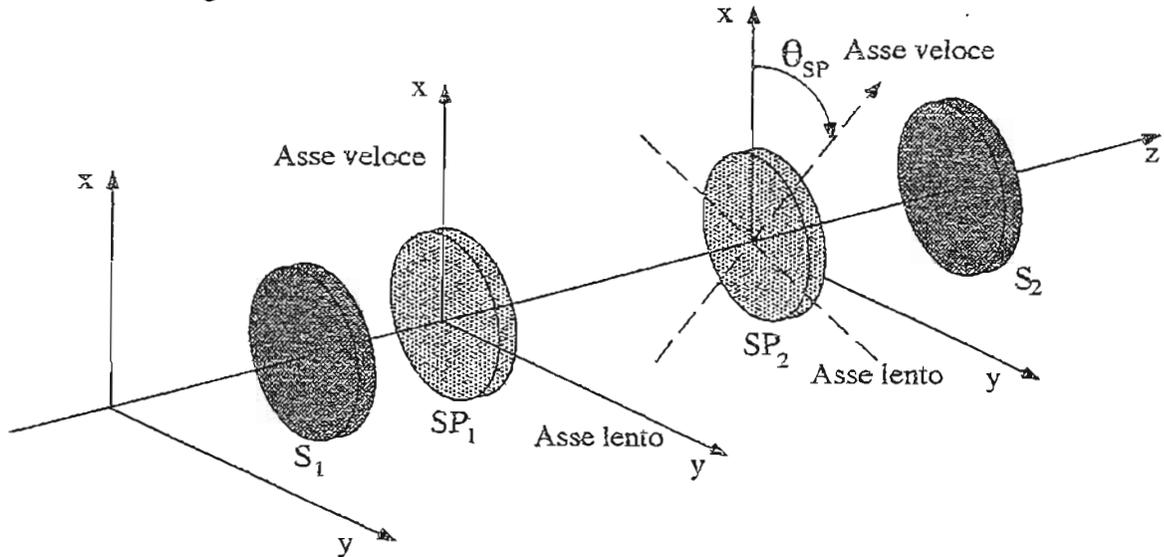


Figura B.1: Modello teorico per lo studio della birifrangenza degli specchi interferenziali.

Nell'approssimazione di piccoli ritardi di fase introdotti dagli specchi, viene qui dimostrato che l'azione delle due lamine è identica a quella di un'unica lamina equivalente: per quest'ultima vengono derivate le espressioni del ritardo di fase δ_{EQ} e dell'orientazione ϑ_{EQ} rispetto all'asse x in funzione dell'angolo ϑ_{SP} tra gli assi veloci delle lamine SP_1 e SP_2 .

Le matrici di Jones [34] per le lamine birifrangenti SP_1 e SP_2 sono date da:

$$SP_1(\delta_1) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta_1}{2}} \end{pmatrix} \quad (B.1)$$

$$SP_2(\delta_2, \vartheta_{SP}) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta_2}{2}} \cos^2 \vartheta_{SP} + e^{-i\frac{\delta_2}{2}} \sin^2 \vartheta_{SP} & i \sin \frac{\delta_2}{2} \sin 2\vartheta_{SP} \\ i \sin \frac{\delta_2}{2} \sin 2\vartheta_{SP} & e^{-i\frac{\delta_2}{2}} \cos^2 \vartheta_{SP} + e^{i\frac{\delta_2}{2}} \sin^2 \vartheta_{SP} \end{pmatrix} \quad (B.2)$$

dove δ_1 e δ_2 rappresentano i ritardi di fase relativi tra le componenti x e y del campo elettrico per singolo attraversamento delle lamine. La matrice prodotto $SP(\delta_1, \delta_2, \vartheta_{SP}) = SP_2(\delta_2, \vartheta_{SP}) \cdot SP_1(\delta_1)$

$$SP = \begin{pmatrix} e^{i(\frac{\delta_1+\delta_2}{2})} \cos^2 \vartheta_{SP} + e^{i(\frac{\delta_1-\delta_2}{2})} \sin^2 \vartheta_{SP} & ie^{-i\frac{\delta_1}{2}} \sin \frac{\delta_2}{2} \sin 2\vartheta_{SP} \\ ie^{i\frac{\delta_1}{2}} \sin \frac{\delta_2}{2} \sin 2\vartheta_{SP} & e^{-i(\frac{\delta_1+\delta_2}{2})} \cos^2 \vartheta_{SP} + e^{-i(\frac{\delta_1-\delta_2}{2})} \sin^2 \vartheta_{SP} \end{pmatrix} \quad (B.3)$$

appartiene al gruppo unitario SU_2 e pertanto può essere espressa nella forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{L}(\delta) \cdot \mathbf{R}(\beta) \quad (\text{B.4})$$

dove α , β e δ sono reali; \mathbf{R} è la matrice di una generica rotazione di angolo α o β ed \mathbf{L} è una matrice analoga a \mathbf{SP}_1 rappresentante una lamina birifrangente con ritardo di fase δ riferito ai propri assi ottici. Vale pertanto il teorema di equivalenza ottica di Hurwitz e Jones [67]: un sistema ottico contenente un numero qualsiasi di lamine birifrangenti e rotatori (cioè elementi la cui matrice è una rotazione) è equivalente ad un sistema formato da una lamina (di sfasamento δ ed assi che formano un angolo $-\beta$ con gli assi di riferimento) e da un rotatore (di rotazione $\beta + \alpha$).

Esplicitando le matrici si ottiene

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} \cos \alpha \cos \beta - e^{-i\frac{\delta}{2}} \sin \alpha \sin \beta & -e^{i\frac{\delta}{2}} \cos \alpha \sin \beta - e^{-i\frac{\delta}{2}} \sin \alpha \cos \beta \\ e^{i\frac{\delta}{2}} \sin \alpha \cos \beta + e^{-i\frac{\delta}{2}} \cos \alpha \sin \beta & e^{-i\frac{\delta}{2}} \cos \alpha \cos \beta - e^{i\frac{\delta}{2}} \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Eguagliando gli elementi della prima riga delle matrici (B.3) e (B.5) e separando la parte reale da quella immaginaria, al prim'ordine in δ_1 , δ_2 e δ_{EQ} , si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\cos \frac{\delta}{2} \cos(\alpha + \beta) = 1 \quad (\text{B.6})$$

$$\sin \frac{\delta}{2} \cos(\alpha - \beta) = \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} \cos 2\vartheta_{SP} \quad (\text{B.7})$$

$$\cos \frac{\delta}{2} \sin(\alpha + \beta) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\sin \frac{\delta}{2} \sin(\alpha - \beta) = \frac{\delta_2}{2} \sin 2\vartheta_{SP} \quad (\text{B.9})$$

Dalle relazioni (B.6) e (B.8) risulta che $\tan(\alpha + \beta) = 0$ e quindi $\alpha = -\beta$ modulo π ; dalla (B.6) segue quindi che $\cos \frac{\delta}{2} = 1$ e cioè che, nell'approssimazione adottata, le espressioni in δ sono valide solo al prim'ordine. Riscrivendo la (B.7) e (B.9) alla luce di quanto osservato, si ricava il seguente sistema di equazioni in α e δ :

$$\begin{cases} \delta \cos 2\alpha = \delta_1 + \delta_2 \cos 2\vartheta_{SP} \\ \delta \sin 2\alpha = \delta_2 \sin 2\vartheta_{SP} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Risolviendo il sistema e definendo $\delta_{EQ} = \delta$ e $\vartheta_{EQ} = \alpha$ si ottengono le relazioni cercate

$$\delta_{EQ} = \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + 4\delta_1\delta_2 \cos^2 \vartheta_{SP}} \quad (\text{B.11})$$

$$\vartheta_{EQ} = \pm \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{\frac{\delta_1}{\delta_2} + \cos 2\vartheta_{SP}}{\sqrt{\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2 + 1 + 2\frac{\delta_1}{\delta_2} \cos 2\vartheta_{SP}}} \right]. \quad (B.12)$$

La relazione (B.11) mostra che lo sfasamento relativo introdotto dalla lamina risultante oscilla con periodicità di 180° tra il valore massimo $\delta_1 + \delta_2$ quando le lamine sono allineate ($\vartheta_{SP} = 0$) ed il valore minimo $|\delta_1 - \delta_2|$ quando le lamine sono ortogonali ($\vartheta_{SP} = \pi/2$). In particolare se $\frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow \infty$, allora $\delta_{EQ} \rightarrow \delta_1$; se $\frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow 0$ allora $\delta_{EQ} = \delta_2$.

Dalla (B.12) si vede che anche ϑ_{EQ} è periodico in ϑ_{SP} con periodo di 180° ; per ϑ_{SP} compreso nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il segno positivo vale per $\vartheta_{SP} > 0$ ed il segno negativo per $\vartheta_{SP} < 0$. Inoltre ϑ_{EQ} dipende solamente dal rapporto $\frac{\delta_1}{\delta_2}$. Se $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1$ allora $\vartheta_{EQ} = \frac{\vartheta_{SP}}{2}$; se $\frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow \infty$ allora $\vartheta_{EQ} \rightarrow 0$ e se $\frac{\delta_1}{\delta_2} \rightarrow 0$ allora $\vartheta_{EQ} \rightarrow \vartheta_{SP}$.

In Fig.B.2 sono riportate le curve teoriche di ϑ_{EQ} in funzione di ϑ_{SP} calcolate per differenti valori del rapporto δ_1/δ_2 .

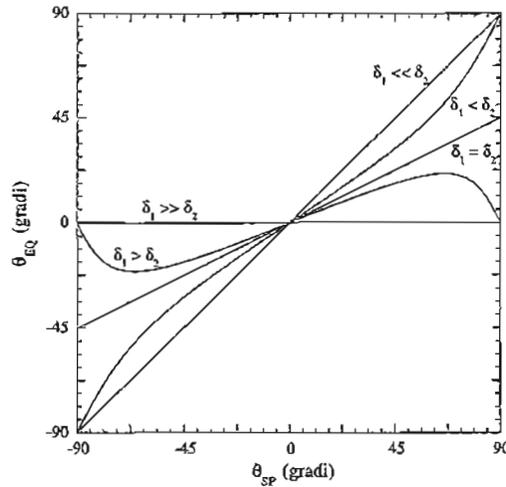


Figura B.2: Curve teoriche di ϑ_{EQ} al variare di ϑ_{SP} calcolate attraverso (B.12) per alcuni valori del rapporto $\frac{\delta_1}{\delta_2}$

B.3 Derivazione dell'estinzione misurata

Per la descrizione dell'evoluzione della polarizzazione del fascio laser che attraversa la cavità si utilizza il formalismo delle matrici di Jones e si fa riferimento alla Fig.B.3. Gli specchi della cavità sono ora supposti ideali ed una lamina birifrangente L_{EQ} , posta tra di essi, tiene conto delle loro birifrangenze.

Il polarimetro P con asse di massima trasmissione ad un angolo ϑ_L rispetto all'asse x definisce la polarizzazione del fascio entrante:

$$\vec{E}_I = E_0 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_L \\ \sin \vartheta_L \end{pmatrix}. \quad (B.13)$$

Con riferimento agli assi di birifrangenza della lamina equivalente L_{EQ} , la matrice $FP(\delta_{EQ})$ associata alla cavità Fabry-Pérot formata dagli specchi isotropici S_i e contenente L_{EQ} può essere scritta nel seguente modo

$$FP(\delta_{EQ}) = \left(\frac{T}{1-R} \right) L_{EQ}^N = \left(\frac{T}{1-R} \right) \begin{pmatrix} e^{i\frac{N}{2}\delta_{EQ}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{N}{2}\delta_{EQ}} \end{pmatrix}. \quad (B.14)$$

dove $N = \frac{2F}{\pi}$ è il numero medio di passaggi che la luce effettua in cavità prima di essere trasmessa; T ed R sono, rispettivamente la trasmittività e la riflettività degli specchi isotropici S_i .

Un secondo polarimetro A è incrociato con il polarimetro di ingresso; quindi l'intensità di luce rivelata dal fotodiode è

$$I_{EXT} = \vec{E}_{EXT} \cdot \vec{E}_{EXT}^* \quad (B.15)$$

con

$$\vec{E}_{EXT} = E_0 A \cdot R(\vartheta_{EQ} - \vartheta_L) \cdot FP(\delta_{EQ}) \cdot R(\vartheta_L - \vartheta_{EQ}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (B.16)$$

Nell'approssimazione $\delta_{EQ} \ll 1$ si ottiene la seguente espressione

$$I_{EXT} = I_C \sigma_T^2 = I_C \left\{ \sigma^2 + \left(N \frac{\delta_{EQ}}{2} \right)^2 \sin^2 [2(\vartheta_{EQ} - \vartheta_L)] \right\} \quad (B.17)$$

dove $I_C = \frac{T}{1-R} E_0^2$ è l'intensità di luce trasmessa dalla cavità in risonanza.

L'estinzione complessiva σ_T^2 è quindi la somma di due contributi: uno dovuto al fattore di estinzione dell'analizzatore σ^2 e l'altro dipendente dall'angolo $(\vartheta_{EQ} - \vartheta_L)$ tra la direzione originale del campo elettrico e l'asse veloce della lamina birifrangente L_{EQ} .

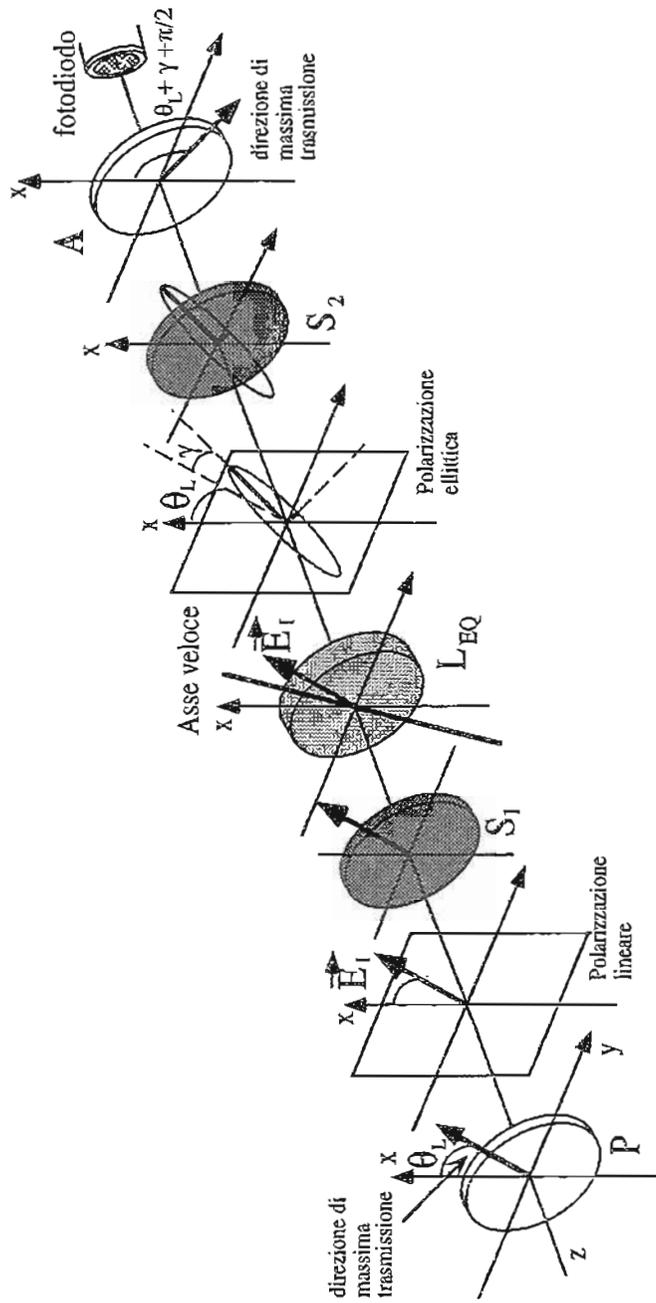


Figura B.3: Schema dell'evoluzione della polarizzazione della luce nell'attraversare la cavità Fabry-Pérot. L'angolo γ rappresenta la rotazione, di second'ordine in δ_{EQ} , introdotta dalla lamina equivalente.

B.4 Risultati sperimentali ed analisi

Dopo aver allineato opportunamente gli specchi della cavità per eccitare il modo fondamentale di risonanza, la cavità viene agganciata in frequenza alla luce laser. Quindi vengono studiate le sue proprietà di birifrangenza per differenti orientazioni della polarizzazione ϑ_L della luce incidente. Quest'ultima viene variata ruotando una lamina a mezz'onda posta sul banco ottico inferiore prima del polarimetro P. Anche quest'ultimo viene ruotato in modo da recuperare l'intensità del fascio. Effettuato un set di misure di estinzione, l'orientazione relativa degli assi di birifrangenza degli specchi viene variata ruotando il secondo specchio della cavità mediante la predisposta movimentazione. Ad ogni rotazione dello specchio la cavità viene riallineata agendo su entrambi gli specchi e viene ripetuta la misura della finezza. Per limitare gli effetti dovuti alla disomogeneità del deposito dielettrico [63] e quindi per cercare di testare puntualmente l'anisotropia degli specchi, con un visore ad infrarosso si controlla attraverso delle apposite finestre in quarzo montate sulla camera da vuoto, che il fascio incida sempre nello stesso punto degli specchi.

Viene quindi ripetuto il set di misure di estinzione al variare della direzione di polarizzazione. Tali misure vengono effettuate per varie posizioni relative degli specchi. Nelle pagine successive sono riportati alcuni risultati sperimentali (Fig.B.4- Fig.B.7). Si fa notare che la posizione relativa tra gli assi di birifrangenza degli specchi definita dall'angolo ϑ_{SP} è nota a meno di un certo angolo ϑ_{SP0} corrispondente al posizionamento iniziale degli specchi. Similmente l'angolo ϑ_L è noto a meno di un valore iniziale ϑ_{L0} . L'errore sui punti sperimentali è la somma di tre contributi: l'errore sulla valutazione della stessa estinzione per effetto delle fluttuazioni di intensità del laser e gli errori sulle valutazioni delle intensità massima I_C e minima I_{EXT} dovuti alla sensibilità del voltmetro digitale utilizzato.

Dall'interpolazione dei dati sperimentali con la curva teorica di equazione (B.17) si sono ottenute le valutazioni con i relativi errori, per fissata posizione ($\vartheta_{SP} - \vartheta_{SP0}$) degli specchi, del ritardo di fase δ_{EQ} introdotto dalla lamina equivalente e dell'angolo $\phi = \vartheta_{EQ} - \vartheta_{L0}$. I risultati sono riportati nella seguente tabella.

Vengono quindi effettuati due fit indipendenti sui valori ottenuti per δ_{EQ} e ϑ_{EQ} in funzione di ϑ_{SP} usando rispettivamente le relazioni teoriche (B.11) e (B.12). Le curve ottenute con i fit sono mostrate nelle Fig.B.8 e B.9.

È interessante notare in Fig.B.9 l'andamento monotono decrescente di

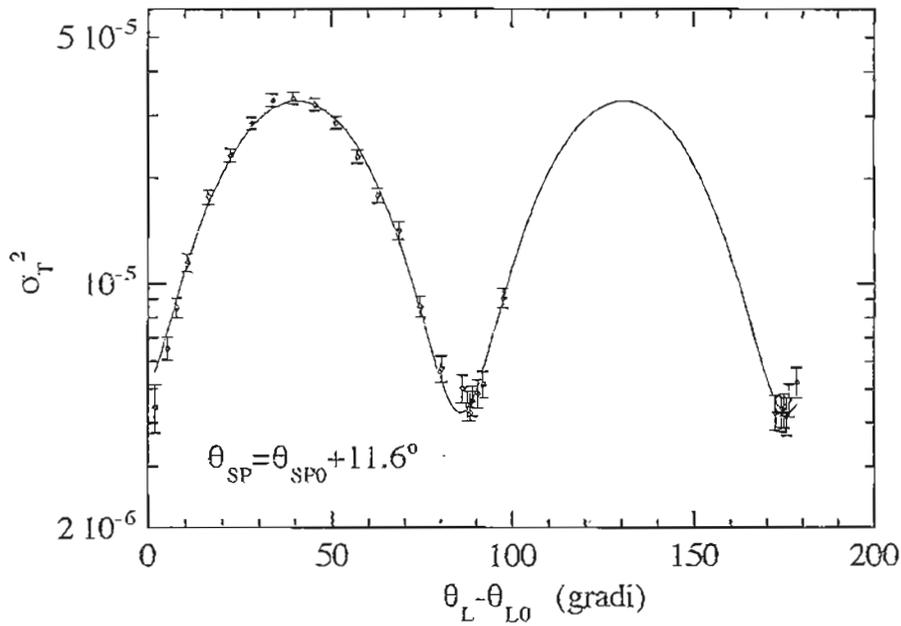


Figura B.4: Estinzione misurata in funzione della direzione della polarizzazione della luce. La curva continua rappresenta l'interpolazione dei dati effettuata usando la (B.17).

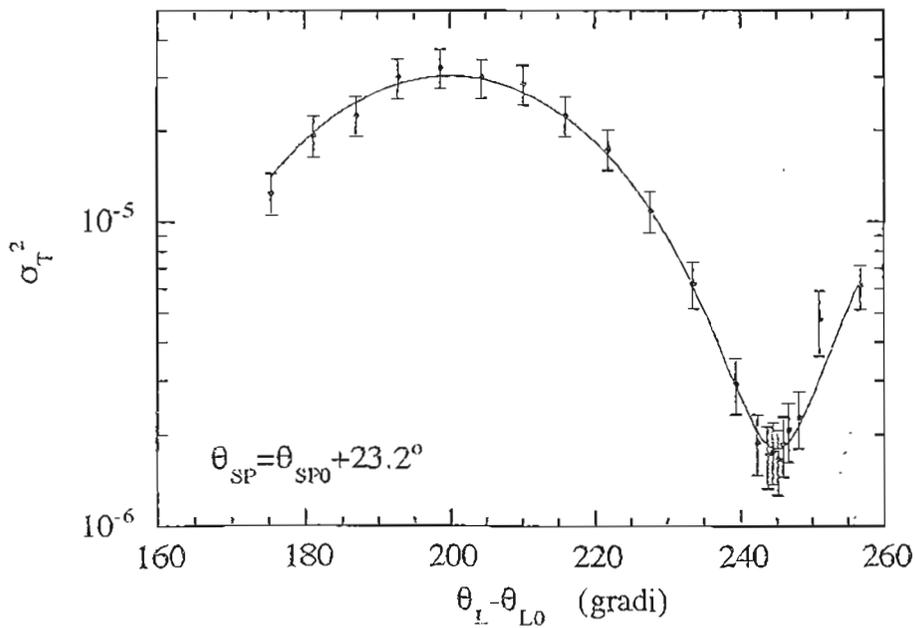


Figura B.5: Estinzione misurata in funzione della direzione della polarizzazione della luce. La curva continua rappresenta l'interpolazione dei dati effettuata usando la (B.17).

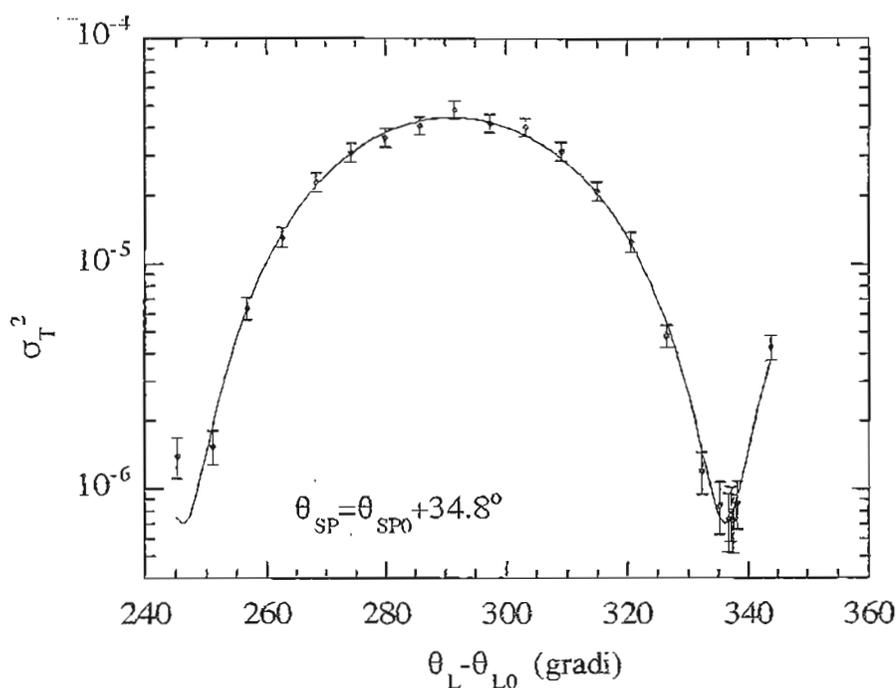


Figura B.6: Estinzione misurata in funzione della direzione della polarizzazione della luce. La curva continua rappresenta l'interpolazione dei dati effettuata usando la (B.17).

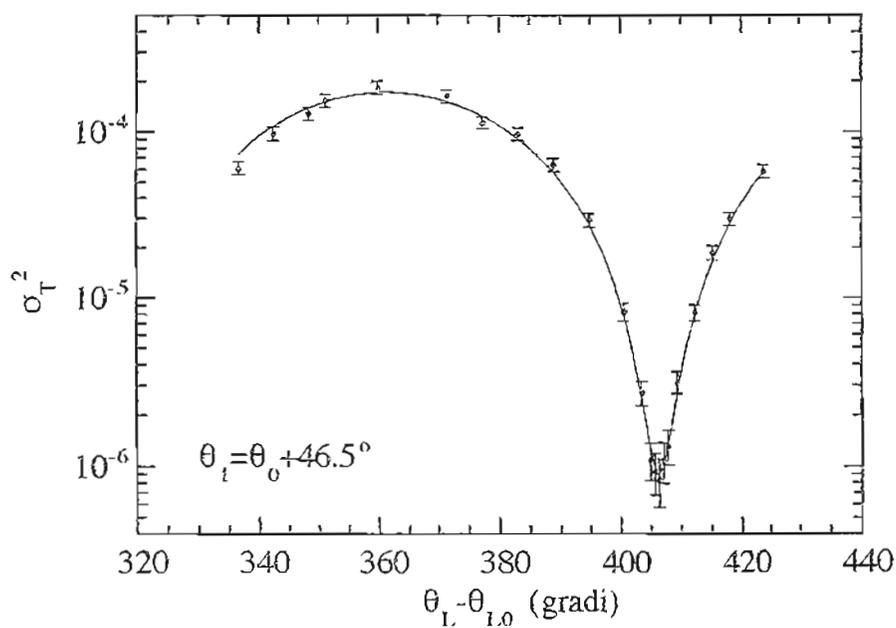


Figura B.7: Estinzione misurata in funzione della direzione della polarizzazione della luce. La curva continua rappresenta l'interpolazione dei dati effettuata usando la (B.17).

$\vartheta_{SP} - \vartheta_{SP0}$	$\delta_{EQ} \times 10^{-7}$	$\Delta\delta_{EQ} \times 10^{-8}$	ϕ	$\Delta\phi$	F
0°	8.26 rad	19.7 rad	1.18°	0.35°	71 500
11.6°	3.41 rad	5.13 rad	-4.35°	0.31°	49 400
23.2°	2.81 rad	3.19 rad	-25.05°	0.36°	59 700
34.8°	2.89 rad	3.11 rad	-23.93°	0.26°	71 800
46.5°	5.24 rad	5.47 rad	-42.87°	0.30°	78 500
58.1°	6.07 rad	5.36 rad	-30.63°	0.25°	67 300

Tabella B.1: Risultati dell'interpolazione dei dati sperimentali secondo la formula (B.17).

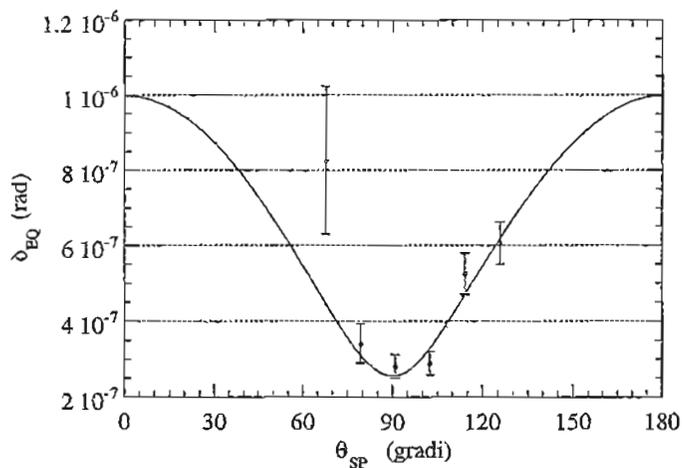


Figura B.8: Risultati sperimentali per lo sfasamento equivalente. I valori di ϑ_{SP} riportati tengono conto della costante iniziale ϑ_{SP0} il cui valore è ottenuto dal fit sulla base di alcune considerazioni sugli andamenti teorici.

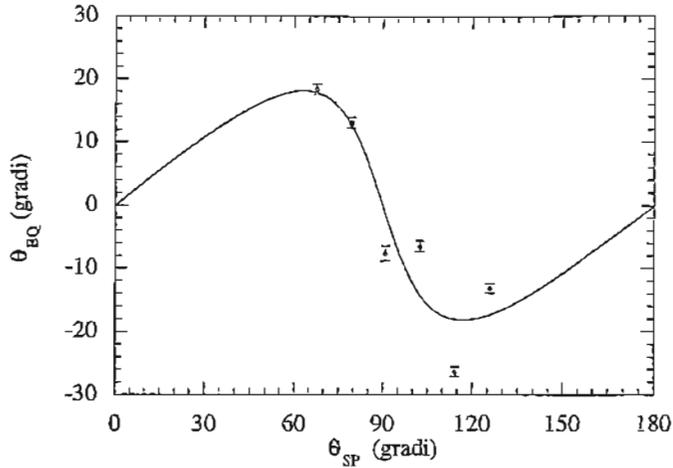


Figura B.9: Risultati sperimentali per lo l'angolo equivalente. I valori di ϑ_{SP} riportati tengono conto della costante iniziale ϑ_{SP0} il cui valore è ottenuto dal fit sulla base di alcune considerazioni sugli andamenti teorici.

ϑ_{EQ} nell'intorno di $\vartheta_{SP} \approx 90^\circ$: questo comportamento indica che sicuramente il rapporto tra i ritardi di fase introdotti dalle lamine è maggiore di 1. Inoltre poichè per lamine ortogonali ($\vartheta_{SP} = 90^\circ$) l'angolo ϑ_{EQ} deve essere nullo e lo sfasamento totale deve essere minimo, è stato possibile eliminare l'indeterminazione sugli angoli ϑ_L e ϑ_{SP} . Dai fit sui dati sono stati ricavati i valori degli angoli iniziali, $\vartheta_{L0} = (-17.8 \pm 0.5)^\circ$ e $\vartheta_{SP0} = (66.2 \pm 0.9)^\circ$, con i quali si sono determinati gli assi di birifrangenza delle lamine.

Dall'interpolazione di Fig.B.8 si è ottenuto $\delta_2 = (3.9 \pm 0.2) \times 10^{-7}$ rad e $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1.62 \pm 0.07$. Dall'interpolazione di Fig.B.9 si è ricavato $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1.69 \pm 0.02$. I due valori ottenuti per $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ sono uguali entro l'errore. La media pesata è $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1.68 \pm 0.02$ da cui, usando la stima di δ_2 , si ricava $\delta_1 = (6.6 \pm 0.4) \times 10^{-7}$. Ricordando infine che lo sfasamento indotto per riflessione su uno specchio è il doppio di quello indotto dalla lamina associata allo specchio stesso si ricava che lo sfasamento per riflessione per gli specchi studiati risulta essere circa 10^{-6} rad in accordo con quanto riportato in [65, 66].

È stato dimostrato [38] che l'anisotropia del substrato degli specchi non ha influenzato la misura della birifrangenza dello strato dielettrico. È quindi giustificato il fatto di averla trascurata.

È stata studiata anche una seconda coppia di specchi e sono state evi-

denziate caratteristiche di birifrangenza simili a quelle descritte. I risultati ottenuti sono riportati in [68].

B.5 Conclusioni

Dall'analisi svolta emergono due risultati importanti. Innanzitutto, come accennato nell'Introduzione, per effetto della lamina birifrangente, le condizioni di risonanza della luce per i due stati di polarizzazione parallela e perpendicolare all'asse veloce della lamina sono

$$k_{\parallel}d = q\pi - \frac{\delta_{EQ}}{2} \quad k_{\perp}d = q\pi + \frac{\delta_{EQ}}{2} \quad (\text{B.18})$$

dove d è la lunghezza della cavità; q è un numero intero rappresentante l'ordine di interferenza, k_{\parallel} e k_{\perp} sono i vettori d'onda della luce corrispondenti ai due autostati della polarizzazione.

La differenza tra le frequenze di risonanza è

$$\Delta\nu = \nu_{\perp} - \nu_{\parallel} = \delta_{EQ} \frac{c}{2\pi dnF} \quad (\text{B.19})$$

con n indice di rifrazione del mezzo presente in cavità.

La ricerca della polarizzazione del vuoto mediante la misura dell'ellitticità della luce trasmessa dalla cavità ha senso solo se è soddisfatta la seguente condizione

$$\Delta\nu < \Delta\nu_c \quad (\text{B.20})$$

dove

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{2Fnd} \quad (\text{B.21})$$

è la larghezza di risonanza di una cavità Fabry-Pérot ideale di finezza F . Pertanto per $F \approx 10^5$ si ottiene la condizione

$$\delta_{EQ} < \frac{\pi}{F} \approx 3 \times 10^{-5} \text{ rad.} \quad (\text{B.22})$$

Le misure effettuate indicano che questa condizione è ampiamente soddisfatta anche nel caso in cui gli assi delle due lamine rappresentative degli specchi risultino paralleli e quindi δ_{EQ} risulti pari alla somma dei ritardi di fase introdotti dai singoli specchi.

In secondo luogo, orientando gli specchi è stato possibile ottenere, nel caso migliore, un'estinzione di $\sigma_T^2 \approx 7 \times 10^{-7}$ (Fig.B.7). Essendo per la

coppia di polarimetri utilizzata $\sigma^2 \approx 10^{-7}$, si ottiene un'ellitticità residua di circa 8×10^{-4} . Pertanto per soddisfare la condizione (3.14) sarà necessario determinare le cause di tale birifrangenza residua e, se non eliminabile, si dovrà ricorrere all'uso di un compensatore.

Bibliografia

- [1] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics* Wiley, New York (1975) 2nd ed.
- [2] M.Born e L.Infeld, *Foundations of the new theory*, Proc. R. Soc. London, A 144, 425 (1934)
- [3] S.Carusotto et al. Proposal D 2 1980 et addendum 1983 to Cern, 1983
- [4] E.Iacopini, B.Smith, G.Stefanini e E.Zavattini, *Il Nuovo Cimento* 61, 21 (1981)
- [5] E.Iacopini e E.Zavattini, *Phys. Lett. B* 85, 151 (1979)
- [6] M.Morpurgo, *Cern-Bulletin* 28/82 (1982)
- [7] L.Maiani, R.Petronzio e E. Zavattini, *Phys. Lett. B* 175, 359 (1986)
- [8] W.Heisemberg e H.Euler, *Z. Phys.* 38, 314 (1936)
- [9] V.S.Weisskopf, *Mat.-Fys. Medd. Dan. Vidensk. Selsk.* 14, 6 (1936)
- [10] J.Schwinger, *Phys. Rev.* 82, 664 (1951)
- [11] L.Guerriero, *Lezioni di Elettromagnetismo*, Adriatica Editrice (Bari, 1987)
- [12] M.Born e E.Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press (New York 1980)
- [13] S.L.Adler, *Ann. Phys. (N.Y.)* 67, 599 (1971); S.L.Adler, J.N.Bahcall, C.G.Callan e M.N.Rosenbluth, *Phys. Rev. Lett.* 25, 1061 (1970)
- [14] V.I.Ritus, *Sov. Phys. JEPT* 42, 774 (1976)

- [15] D.Bakalov, *An overview of nonlinear QED effects for PVLAS INFN/AE-94/27*, 29 Novembre 1994
- [16] R.D.Peccei e H.R.Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. **D 16**, 1791 (1977)
- [17] H.Y.Chen, Phys. Rep. **158**, 1 (1988)
- [18] L.Antoniadis e T.N.Troung, Phys. Lett. **B 109**, 67 (1981)
- [19] M.Dine, W.Fischler e M.Srednicki, Phys. Lett. **B 104**, 199 (1981)
- [20] G.Raffelt, Phys. Rev. **D 34**, 3927 (1986); D.S.Dearborn, D.N.Schramm e G.Steigman, Phys. Rev. Lett. **56**, 26 (1986); M.S.Turner, Phys. Rev. Lett. **60**, 1797 (1988)
- [21] M.S.Turner, Phys. Rev. Lett. **59**, 2489 (1987)
- [22] M.S.Turner, Phys. Rep. **197**, 67 (1990)
- [23] G.Raffelt e L.Stodolsky, Phys. Rev. **D 37**, 1237 (1987)
- [24] Y.Semertzidis, Phys. Rev. Lett. **64**, 2988 (1990)
- [25] R.Cameron, G.Cantatore, A.C.Melissinos, G.Ruoso, Y.Semertzidis, H.J.Halama, D.M.Lazarus, A.G.Prodell, F.Nezrick, C.Rizzo e E.Zavattini, Phys. Rev. **D 47**, 3707 (1993)
- [26] D.Herriot, H.Kogelnick e R.Kompfner, Appl. Opt. **3**, 523 (1964)
- [27] G.Ruoso, *Realizzazione di una cavità risonante ad alta finezza per la misura della birifrangenza magnetica del vuoto con tecniche ellissometriche*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Padova, A.A.1993-94, non pubblicata.
- [28] E.Heicht e A.Zajac, *Optics*, Addison-Wesley (Reading, Mass. 1987)
- [29] P.Pace, *Studio e realizzazione di un ellissometro basato su una cavità Fabry-Pérot in aria nell'ambito dell'esperimento PVLAS*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Trieste, A.A. 1993-94, non pubblicata.
- [30] A.C.Nilson, E.K.Gustatson e R.L. Byer IEEE J.Quantum Elec. **25**, 767 (1989)

- [31] G.S.Landsberg, *Ottica*, Mir (Mosca, 1979), 2nd ed.
- [32] O.Svelto, *Principles of lasers*, Plenum (New York, 1989), 2nd ed.
- [33] A.E.Siegman, *Laser*, University Science Books (1986)
- [34] A.Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley & sons (1975) 2nd ed.
- [35] M.Papa, *Realizzazione di cavità ottiche ad alto fattore di merito per una misura della polarizzazione del vuoto*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Pisa, A.A.1993-94, non pubblicata.
- [36] H.Kogelnik e T.Li, *Appl. Opt.* **23**, 2944 (1984)
- [37] A.Sommerfeld, *Optics*, Accademic Press (1964)
- [38] F.Brandi, *Realizzazione del prototipo di un apparato sperimentale per la misura della polarizzazione del vuoto*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Pisa, A.A.1996-97, non pubblicata.
- [39] A.M.De Riva, G.Zavattini, S.Marigo, C.Rizzo, G.Ruoso, G.Carugno, R.Onofrio, S.Carusotto, M.Papa, F.Perrone, E.Polacco, G.Cantatore, F.Della Valle, P.Micossi, E.Milotti, P.Pace e E.Zavattini, *Rev. Sci. Instr.* **67**, 2680 (1996)
- [40] S.Carusotto, E. Polacco, E.Iacopini, G.Stefanini, E.Zavattini e F.Scuri, *Appl. Phys. B* **48**, 231 (1989)
- [41] F.Abeles, *Ann. Phys. (Francia)* **5**, 596 (1950); F.Abeles, *Ann. Phys. (Francia)* **5**, 706 (1950)
- [42] E.Iacopini, G.Stefanini e E.Zavattini, CERN-EP/83-55, 27 Aprile 1983.
- [43] A.Cotton e H.Mouton, *Ct. r. hebd. Séanc Acad. Sci., Paris*, **141**, 317 (1905)
- [44] J.Kerr, *Phil. Mag.* **50**, 337 (1875)
- [45] M.Faraday, *Phil. Mag.* **28**, 294 (1846)
- [46] A.D.Buckingham, W.H.Prichard e D.H.Whiffen, *Trans. Faraday Soc.* **63**, 1057 (1967)

- [47] C.Rizzo, A.Rizzo e D.M.Bishop, *Int. Rev. in Phys. Chem.* **16**, 81 (1997)
- [48] S.Carusotto, E.Iacopini, E.Polacco, G.Stefanini e E.Zavattini, *Optics Commun.* **42**, 104 (1982)
- [49] H.Kling, E.Dreier e W.Huttner, *J. Chem. Phys.* **78**, 4309 (1983)
- [50] P.B.Lukins e G.L.D.Ritchie, *Chem. Phys. Lett.* **180**, 551 (1991)
- [51] D.Jonsson, P.Norman, O.Vahtras, H.Agren e A.Rizzo, *J. Chem. Phys.* **106**, 8552 (1997)
- [52] E.Cargnello, *Sviluppo di un sistema di allineamento automatico per una cavità Fabry-Pérot*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Trieste, A.A. 1995-96, non pubblicata.
- [53] D.Shoemaker, A.Brillet, C.Nary Man, O.Cregut e G.Kerr, *Opt. Lett.* **14**, 609 (1989)
- [54] D.S.Elliot, R.Roy e S.J.Smith, *Phys. Rev. A* **26**, 12 (1982)
- [55] J.Millman e C.C.Halkias, *Microelettronica*, Boringhieri (1978)
- [56] R.V.Pound, *Rev. Sci. Instr.* **17**, 460 (1946)
- [57] R.W.P.Drever, J.L.Hall, F.V.Kowalski, J.Hough, G.M.Ford, A.J.Munley e H.Ward, *Appl. Phys. B* **31**, 97 (1983)
- [58] G.Marro, *Controlli automatici*, IV ed. Zanichelli (1992)
- [59] G.Cantatore, F.Della Valle, E.Milotti, P.Pace, E.Zavattini, E.Polacco, F.Perrone, C.Rizzo, G.Zavattini e G.Ruoso, *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 2795 (1995)
- [60] D.I.Robertson, E.Morrison, J.Hough, S.Killbourn, B.J.Meers, G.P.Newton, N.A.Robertson, K.A.Strain e H.Ward, *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 4447 (1995)
- [61] A.Abramovici, W.E.Althouse, J.Camp, D.Durance, J.A.Giaime, A.Gillespie, R.Kuhnert, T.Lyons, F.J.Raab, R.L.Savage jr., D.Shoemaker, L.Sievers, R.E.Spero, R.E.Vogt, R.Weiss, S.E.Whitcomb e M.E.Zucker, *Phys. Lett. A* **218**, 157 (1996)

- [62] M.A.Bouchiat e C.C.Bouchiat, *Phys. Lett. B* **48**, 111 (1974)
- [63] P.Micossi, F.Della Valle, E.Milotti, E.Zavattini, C.Rizzo e G.Ruoso, *Appl.Phys. B* **57**, 95 (1993)
- [64] M.A.Bouchiat e L.Pottier, *Appl. Phys. B* **29**, 43 (1982)
- [65] D.Jacob, M.Vallet, F.Bretenaker e A.Le Floch, *Opt. Lett.* **20**, 671 (1995)
- [66] C.Wood, S.C.Bennett, J.L.Roberts, D. Chao e C.E.Wieman, *Optics & Photonics News*, 54 (Ottobre 1996)
- [67] H.Hurwitz e R.C.Jones, *J. Opt. Soc. Amer.* **31**, 494 (1941)
- [68] F.Brandi, F.Della Valle, A.M.De Riva, P.Micossi, C.Rizzo, G.Ruoso, G.Zavattini e F.Perrone in stampa in *Appl. Phys. B*