Università degli Studi di Ferrara

Percorso Didattico di Matematica

Applicazioni del Calcolo Differenziale:

Studio di funzione reale di variabile reale e problemi di massimo e di minimo (anche per via elementare)

SSIS VIII Ciclo-Tirocinio

Dott. Mirco Andreotti

A.A. 2007/2008

Indice

0.1 Introduzione

Con questa unitá didattica viene proposto un percorso da svolgere nella scuola secondaria superiore per affrontare le applicazioni del calcolo differenziale per lo studio di funzione e per problemi di massimo e minimo.
Le modalitá di introduzione di tali applicazioni possono essere di diverso tipo. In questa nota preferiamo proporre agli studenti una introduzione intuitiva a livello grafico dei diversi comportamenti delle funzioni con conseguente ricerca degli strumenti che permettono l'identificazione e la classificazione di particolari comportamenti, quali per esempio massimi e minimi, per via analitica.
Schematicamente quindi il percorso che si vuole seguire é quello di partire da rappresentazioni grafiche di particolari funzioni per determinarne gli strumenti che permettono di indentificare i vari comportamenti. Formalizzare quindi a livello analitico questi strumenti, come ricerca di massimi e minimi, per poter affrontare un'analisi analitica di una funzione ed essere in grado di rappresentare graficamente i comportamenti particolari della funzione in esame.

0.2 Indicazioni generali

0.2.1 Destinatari

L'argomento trattato in questo percorso puó essere sviluppato nel quarto e/o quinto anno a seconda del tipo di liceo al quale ci si riferisce. Per una piú precisa disposizione temporale si vedano le indicazioni ministeriali riproposte al paragrafo 0.2.2. Ritengo comunque opportuno sottolineare il fatto che gli argomenti qui presentati per lo studio di funzione, in particolare massimi e minimi, possono anche essere introdutti in modo intuitivo e leggero in alcuni contesti del quarto anno, per poi poter essere trattati con rigore al quinto anno. Diciamo che si puó tentare di seguire l'approccio suggerito dall'UMI.

0.2.2 Indicazioni dei programmi ministeriali

In questa sezione forniamo alcune indicazioni e commenti riguardo le indicazioni dei programmi ministeriali in merito all'argomento studio di funzione e massimi e minimi. Vengono valutati programmi per i licei di ordinamento, PNI, Brocca, proposte dell'UMI e riforma Moratti.

Licei di ordinamento: classico e scientifico

Indicazioni liceo classico. Il programma ministeriale di matematica per il liceo classico non prevede l'argomento studio di funzione, quindi nemmeno lo studio dei massimi e minimi.

Indicazioni liceo scientifico. Per la V é previsto lo sviluppo dei massimi e minimi con il metodo delle derivate. L'orario prevede 3 ore alla settimana di matematica.

Piano Nazionale per l'Informatica

Gli argomenti correlati allo studio di funzione, in particolare **limiti e continuitá**, **derivata e teoremi connessi** e **studio e rappresentazione grafica di una funzione** sono previsti per la IV classe, per un totale di 5 ore alla settimana.

Commissione Brocca

Indicazioni per gli indirizzi classico, linguistico e socio-psico-pedagogico. É previsto l'argomento studio e rappresentazione grafica di una funzione razionale nella classe V.

Indicazioni per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico. Sono previsti per la classe IV gli argomenti *zeri di una funzione. Limite e continuitá di una funzione in una variabile reale* e *derivata di una funzione. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, De L'Hopital*. Viene poi specificato nei commenti quanto segue: *L'alunno sará abituato all'esame di grafici di funzioni algebriche e trascendenti ed alla deduzione di informazione dallo studio di un andamento grafico; appare anche importante fare acquisire una mobilitá di passaggio dal grafico di una funzione a quello della sua derivata e di una sua primitiva*.

Indicazioni per gli indirizzi chimico, elettrotecnica e automazione, elettronica e telecomunicazioni, informatico e telematico, meccanico, tessile, costruzioni, territorio, agroindustriale, e biologico. É previsto l'argomento *studio e rappresentazione grafica di una funzione* per la classe IV. Nei commenti agli argomenti viene riportato quanto riportato per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.

Indicazioni per gli indirizzi economico aziendale, linguistico aziendale. É previsto l'argomento *studio e rappresentazione grafica di una funzione* per la classe IV. Nei commenti agli argomenti viene riportato quanto riportato per gli indirizzi scientifico e scientifico-tecnologico.

Proposta UMI

Indicazioni.L'UMI suggerisce di abituare gli studenti ad una analisi qualitativa degli andamenti, per esempio crescenza e decrescenza di una funzione, in diverse occasioni durante gli studi secondari. La proposta dell'UMI non fornisce precise indicazioni di come inserire questi argomenti, suggerisce piuttosto una introduzione graduale e richiami ricorsivi ogni qual volta si presenta l'occasione di poter fare una valutazione qualitativa degli andamenti ed in generali dei comportamenti particolari, e non, delle funzioni. Seguendo questo approccio, anzitutto si rendono gli studenti famigliari con i termini e i concetti che caratterizzano gli andamenti delle funzioni e in secondo luogo si abituano ad una naturale analisi e comprensione di grafici, funzioni, andamenti e tutto ció che ne é correlato.
Allo studio di funzioni si affianca in modo naturale lo studio dei massimi e minimi che non viene proposto come argomento a sé, ma vengono suggeriti diversi momenti nell'arco del quarto e quinto anno.
Oltre queste indicazioni vengono forniti un discreto numero di problemi direttamente collegati alla realtá per la trattazione degli argomenti citati.

Riforma Moratti

Indicazioni. Il programma prevede per il secondo biennio l'introduzione della derivata di una funzione e studio del segno della derivata e corrispondente andamento della funzione nell'ambito dell'introduzione all'analisi matematica. Il programma prevede poi la formalizzazione dello studio di funzione con le derivate successive e la ricerca dei punti estremanti per il quinto anno nell'ambito dell'analisi matematica.

0.2.3 Prerequisiti

Al fine di poter affrontare con fluiditá il percorso qui sviluppato gli studenti dovrebbero avere buona conoscenza e dimestichezza dei seguenti argomenti:

1. concetto di intorno, intorno destro e intorno sinistro di un punto;
2. concetto di limite di funzione e continuitá;
3. funzioni elementari e loro rappresentazioni grafiche;
4. derivata di una funzione e suo significato geometrico;
5. derivate successive delle funzioni;
6. comportamenti asintotici di una funzione;

7. ricerca di eventuali asintoti orizzontale, verticale e obliquo;
8. studio del segno di una funzione.

0.2.4 Obiettivi generali

1. acquisire gli obiettivi specifici previsti per questo percorso didattico;
2. comprendere l'utilitá della matematica nelle diverse discipline, scientifiche e non;
3. comprendere l'utilitá nella vita di tutti i giorni di avere una preparazione matematica elastica;
4. riconoscere la matematica negli ambiti piú impensabili e non pensarla solo sui libri di scuola;

0.2.5 Obiettivi trasversali

1. sviluppare l'attitudine alla comunicazione e alla cooperazione con gli altri studenti e con il docente;
2. aumentare le proprie conoscenze e la propria preparazione nell'ambito della matematica;
3. abituare e approfondire all'osservazione e all'uso dell'intuito e del ragionamento per la schematizzazione di certe situazioni;
4. sviluppare e ampliare la capacitá di distinzione fra causa ed effetto, o meglio fra se e allora;

0.2.6 Obiettivi specifici

1. Conoscenze
   (a) Conoscere il significato (definizione) di massimo e minimo locali e assoluti;
   (b) conoscere il significato di flesso, concavitá e convessitá;
2. Competenze
   (a) saper interpretare una rappresentazione grafica di una funzione;
   (b) saper riconoscere graficamente i massimi e i minimi assoluti e locali di una funzione;

(c) saper distinguere e utilizzare le informazioni sufficienti alla determinazione dei massimi e minimi;

(d) saper riconoscere graficamente concavitá, convessitá e flessi di una funzione;

(e) saper determinare analiticamente concavitá, convessitá e flessi di una funzione;

(f) saper affrontare uno studio di funzione mettendo insieme tutti i singoli studi precedentemente sviluppati con l'aggiunta di quelli trattati in questo percorso.

3. Capacitá

   (a) saper interpretare un qualsiasi grafico di una variabile in funzione di un'altra variabile;

   (b) saper applicare lo studio qui sviluppato in ambiti concreti come la fisica o altre discipline sperimentali.

0.2.7 Contenuti

1. Importanza del saper comprendere e studiare le funzioni: si mostrano semplici esempi di grafici relativi a diversi campi, per esempio andamento temporale della temperatura della terra, andamento delle visite di un sito, trasformazioni termodinamiche nel piano pV etc etc, tutto quello che vi viene in mente per mostrare come sia importante comprendere i grafici.

2. Introduzione al massimo e punto di massimo: introduzione per via grafica del massimo e punto di massimo (minimo) con un semplice esempio tipo rappresentazione grafica della parabola.

3. Distinzione intuitiva per via grafica dei massimi (minimi) assoluti e relativi: sempre con l'aiuto di esempi grafici semplici e chiari mostriamo la distinzione fra massimi (minimi) relativi e assoluti.

4. Definizione di punto di massimo (minimo) assoluto e relativo: dopo l'introduzione grafica si procede ricavando la definizione solita.

5. Tipologie di massimo (minimo):Anziché formalizzare lo studio dei massimi e minimi per le sole funzioni derivabili per poi ampliare l'analisi a funzioni piú complesse come quelle con punti spigolosi o non continue ci proponiamo di presentare degli esempi grafici dai quali si possano dedurre le caratteristiche principali sulle quali ci si deve concentrare per la ricerca dei massimi

e minimi. Proponiamo quindi di evidenziare come il massimo e il minimo siano correlati alle seguenti situazioni:

(a) Dipendenza del massimo (minimo) dal dominio + esercitazione con gli studenti
(b) Classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo ed esempi
(c) Studio della derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi locali con esercitazioni
(d) Derivata prima in prossimitá dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili: qui proponiam anche il teorema di Fermat.
(e) Derivata seconda in prossimitá dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili

6. Flessi e concavitá: dopo lo studio precedente si nota che esistono casi in cui la derivata si anulla, ma il punto non é né un massimo né un minimo, quindi si introduce il flesso orizzontale.
   (a) Introduzione a concavitá e convessitá di una funzione
   (b) Definizione di concavitá, convessitá e punto di flesso
   (c) Determinazione di concavitá, convessitá e dei punti di flesso
   (d) Formalizzazione dello studio della derivata seconda per la concavitá
   (e) Osservazione su massimi, minimi e concavitá ed esercitazioni
7. Osservazione su massimi e minimi per funzioni discontinue o non definite
   (a) Funzione definita in un intervallo aperto limitato
   (b) Funzione definita in un intervallo aperto illimitato
   (c) Funzione con un punto di discontinuitá
8. Studio del grafico di una funzione:
   (a) studio del campo di esistenza e degli eventuali punti singolari;
   (b) studio del segno della funzione;
   (c) comportamento della funzione agli estremi del dominio e negli eventuali punti singolari, quindi studio dei limiti in questi punti;
   (d) ricerca e studio degli eventuali asintoti verticali, orizzontali e obliqui;

(e) studio della derivata prima:

  i. studio del segno di $f' \Longrightarrow$ determinazione di crescenza e decrescenza di f;
  ii. individuazione degli eventuali punti di massimo e minimo locali;
  iii. individuazione degli eventuali punti a tangenza nulla per la caratterizzazione dei massimi e minimi o dei flessi orizzontali;

(f) studio della derivata seconda:

  i. studio del segno di $f'' \Longrightarrow$ determinazione di concavitá e convessitá di f e dei punti di flesso;

9. Svolgimento di problemi di massimo e minimo

0.2.8 Accertamento dei prerequisiti

L'accertamento dei prerequisiti sará in parte valutato dagli esiti delle precedenti verifiche e in parte verrá valutato in via informale, nel senso non di verifica o interrogazione ufficiale, colloquiando e riepilogando con gli studenti gli argomenti contenuti nei prerequisiti.

0.2.9 Tempi dell'intervento didattico

Riportiamo nella Tab.1 uno schema delle ore impiegate per lo sviluppo di ognuno degli argomenti che compongono questo percorso. Indichiamo inoltre i tempi che si intendono impiegare per le verifiche e per un eventuale laboratorio di matematica.

0.3 Verifica formativa

L'esperienza di tirocinio attivo svolto nella scuola mi fa preferire l'idea di svolgere gli argomenti trattati in questo percorso passo passo con gli studenti, nel senso che ad ogni nuovo concetto e/o metodo vorrei far seguire una esercizio di applicazione da far svolgere agli e con gli studenti. Ritengo questo metodo un equivalente della verifica formativa. Per quanto riguarda gli esercizi e le immediate applicazioni da svolgere dopo ogni argomenti si puó far riferimento al libro di testo, sempre che questo contenga buone esercitazioni. Per quanto riguarda questo percorso didattico abbiamo fatto riferimento al testo [1], il quale é ricco di applicazioni svolte e non per ogni argomento trattato.

Attivitá	Tempo (Ore)
Accertamento dei prerequisiti	2
Importanza del saper comprendere e studiare le funzioni	2
Introduzione al massimo e punto di massimo	1
Distinzione intuitiva per via grafica dei massimi (minimi) assoluti e relativi	2
Definizione di punto di massimo (minimo) assoluto e relativo	1
-Dipendenza del massimo (minimo) dal dominio + esercitazione con gli studenti	1
Classificazione degli estremi del dominio come massimo o minimo ed esempi	1
Studio della derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali con esercitazioni	3
Derivata prima in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili	1
Derivata seconda in prossimita dei massimi e minimi locali per funzioni derivabili	1
Flessi e concavitá	
-Introduzione a concavitá e convessitá di una funzione	1
-Definizione di concavitá, convessitá e punto di flesso	2
-Determinazione di concavitá, convessitá e dei punti di flesso	2
-Formalizzazione dello studio della derivata seconda per la concavitá	2
-Osservazione su massimi, minimi e concavitá ed esercitazioni	2
Osservazione su massimi e minimi per funzioni discontinue o non definite	
-Funzione definita in un intervallo aperto limitato	1
-Funzione definita in un intervallo aperto illimitato	0.5
-Funzione con un punto di discontinuita	0.5
Studio del grafico di una funzione	2
Svolgimento di problemi di massimo e minimo	2
Esercitazioni	2
Laboratorio di matematica	4
Verifica sommativa	2
Verifiche orali	6
Totale	44

Tabella 1: Tempi previsti per lo svolgimento del percorso didattico.

0.4 Verifica sommativa

Per la verifica sommativa, da svolgere in una lezione da 2 ore, propongo alcune domande riferite a particolari esempi che richiedono risposte inerenti alla teoria svolta. Per la valutazione delle capacitá acquisite invece si proporranno qualche funzione da studiare e un problema.

0.4.1 Testo della verifica

Esercizio 1

Si consideri la funzione continua rappresentata in Fig.1 e si risponda alle seguenti domande:

1. Indicare graficamente con x_{max} il punto di massimo assoluto e con f_{max} il massimo assoluto della funzione.
2. É la funzione rappresentata derivabile in ogni punto del dominio? Giustificare la risposta.
3. In corrispondenza dei punti in cui la derivata prima si annulla (come indicato in figura) quale caratteristica cambia nella funzione? Giustificare la risposta.
4. Considerando gli estremi, quanti minimi presenta la funzione? Indicare graficamente con x_{min} il punto di minimo assoluto, se esiste, e con x_{min}^{loc} il punto o i punti di minimo locale, se esistono.

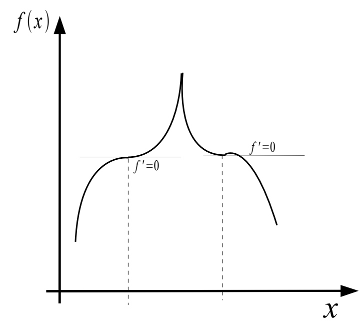

Figura 1: Funzione 1.

Esercizio 2

Si consideri la funzione rappresentata in Fig.2 e si risponda alle seguenti domande senza considerare gli estremi:

1. Indicare il numero di massimi e di minimi locali presenti nella funzione.
2. Indicare graficamente i punti di massimo e di minimo assoluto, se esistono.
3. Considerando solo l'intervallo fra il 950 e il 1200 si indichi approssimativamente se si si verifica un flesso.

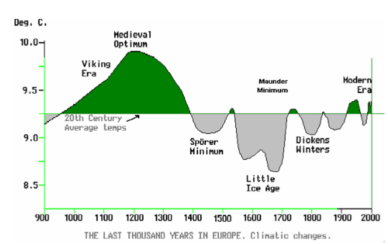

Figura 2: Funzione 2.

Esercizio 3

Si esegua lo studio della funzione $f(x) = xe^{-x}$ definita in $[0, +\infty[$

Esercizio 4

Si determinino le proporzioni fra le dimensioni di una lattina cilindrica, in modo che risulti minimo il consumo di metallo, a paritá di volume V di contenuto.

0.4.2 Griglia di valutazione

Riportiamo in Tab.2 I corrispondenti voti vengono distribuiti seguendo la griglia

Griglia punti

Esercizio	Punti
Esercizio 1	
-Domanda 1	1
-Domanda 2	2
-Domanda 3	2
-Domanda 4	3
Esercizio 2	
-Domanda 1	2
-Domanda 2	1
-Domanda 3	3
Esercizio 3	
-Comportamento agli estremi	2
-Ricerca dei max e min	2
-Concavitá, convessitá e punti di flesso	3
Esercizio 4	
-Impostazione del problema	5
-Risoluzione con ricerca del max o min	2
Totale punti	28

Griglia corrispondenza

Punti	Voto
0-2	3
3-6	4
7-10	5
11-14	6
15-18	7
19-22	8
23-26	9
27-28	10

Tabella 2: Punteggio verifica sommativa.

di corrispondenza in Tab.2. Per l'attribuzione dei voti consideriam come intervallo da 3 a 10, per poter dare 10 si richiede l'eccellenza, quindi lasciamo un piccolo margine di un solo punto, cioé con 27 o 28 punti si raggiunge voto 10. Per tutti gli altri voti corrisponde un intervallo di 4 punti.

0.5 Conclusioni

Il percorso didattico inerente lo studio di funzioni é ovviamente molto vasto e puó essere reso molto ricco e variegato delle piú svariate attivatá nel senso di

applicazioni con software, approccio formalizzato ai teoremi, un approccio piú pratico applicato a problemi reali. Nel percorso didattico qui presentato ci siamo principalmente soffermati sullo studio dei massimi e minimi e concavitá, convessitá e punti di flesso. Abbiamo preferito concentrare lo sviluppo dell'argomento massimi e minimi piuttosto che disperderci in tutti gli altri argomenti dello studio di funzione quali asintoti, zeri dela funzione... non perché si ritengano meno importanti, ma perché li riteniamo concettualmente meno complessi.
In sé il concetto di massimo e minimo non sono difficili, ma credo per come me lo ricordo dalle superiori, che spesso l'argomento venga proposto con metodi rigidi, legati fortemente ai teoremi e spesso limitati ai casi particolare, per esempio solo riferendosi alle funzioni derivabili. Qui abbiamo voluto prima introdurre sempre a livello qualitativo e intuitivo ogni concetto come massimi e minimi locali e assoluti, flessi... Per esempio spesso nei libri di testo si fa una forte distinzione fra flessi obliqui e flessi orizzontali, quindo in realtá un flesso é sempre un flesso, ossia un punto in corrispondenza del quale si verifica un cambio di concavitá. Abbiamo cercato quindi di evitare tutte quelle schematizzazioni che in realtá possono essere ragruppate in una piú semplice.
Dall'approccio qualitativo e intuitivo siamo poi passati ad enunciare i teoremi generali piú importanti, omettendone volutamente la dimostrazione in quanto si puó sempre far riferimento alle dimostrazioni che si trovano sui libri di testo.
In questa unitá didattica non abbiamo proposto esercizi svolti con i software didttici di matematica, in quanto verranno trattati in altra sede, ma sarebbe comunque opportuno l'utilizzo di questi software in particolare nelle parti introdutive di questa unitá didattica, dove l'intuito e la rappresentazione grafica sono alla base del nostro approccio.

Bibliografia

[1] Lamberto Lamberti, Laura Mereu, Augusta Nanni, 'Il Manuale di Matematica - Secondo', Etas Libri 1992.

[2] Dott. Mirco Andreotti, 'Introduzione alle macchine termiche', Appunti per la classe 4K del Liceo Scientifico di Bondeno nell'ambito del tirocinio attivo 2007.
'http://df.unife.it/u/mandreot/SSIS/Tirocinio/MacchineTermiche.pdf'

[3] Sito web della Advancing Science, Serving Society,
'www.aaas.org/news/releases/2004/0615Crowley.pdf'

[4] Sito web NASA Earth Observatory,
'http://earthobservatory.nasa.gov/Study/GISSTemperature/giss_temperature2.html'

[5] Sito web Friends of Science,
'http://members.shaw.ca/sch25/FOS/Thousand%20year%20climate.gif'