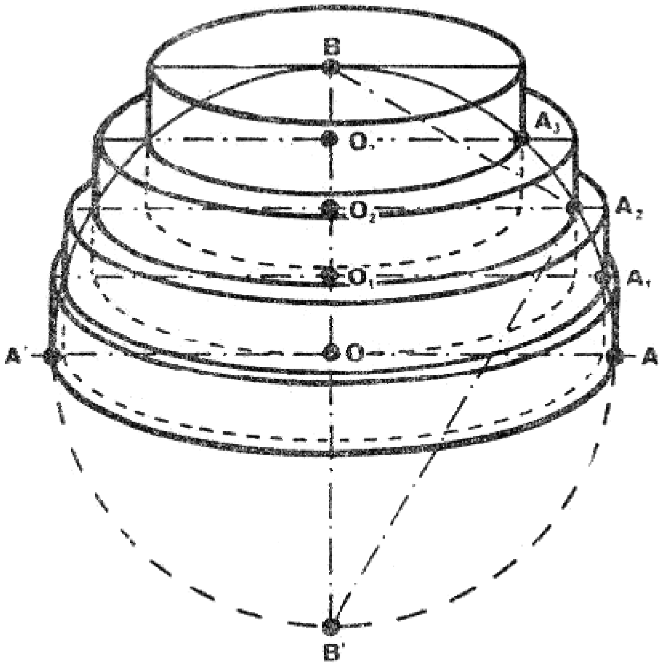
UNIVERSITÀ degli STUDI di FERRARA

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

IL PROBLEMA DELLA MISURA, INTEGRALE DEFINITO, PRIMITIVE E METODI DI INTEGRAZIONE

ELABORATO DI MATEMATICA

ANNO 2007/2008



RIEZZO VITTORIO

Prof. Fabiano Minni, L.C. "Ariosto", Ferrara

Prof. Davide Neri, L.S. "Sabin", Bologna

Prof. Luigi Tomasi, L.S. "Galilei", Adria

DESTINATARI

Secondo le vigenti direttive del Ministero della Pubblica Istruzione questo argomento può essere introdotto nel corso del quinto anno dei licei scientifici di ordinamento.

PROGRAMMA DI MATEMATICA liceo scientifico di ordinamento:

Si leggano gli avvertimenti e suggerimenti generali premessi al programma di matematica del ginnasio. Si tenga conto del particolare valore che deve avere l'insegnamento della matematica nel Liceo Scientifico.

V anno:

Calcolare il valore dell'integrale di funzioni assegnate. Ricordando le primitive di alcune funzioni elementari e ricavare le primitive di funzioni più complesse.

Orario:

MATERIA	**Liceo scientifico**				
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Lingua e lettere italiane	4	4	4	3	4
Lingua e lettere latine	4	5	4	4	3
Lingua e letteratura straniera	3	4	3	3	4
Storia	3	2	2	2	3
Geografia	2	-	-	-	-
Filosofia	-	-	2	3	3
Scienze naturali, chimica e geografia	-	2	3	3	2
Fisica	-	-	2	3	3

Matematica	5	4	3	3	3
Disegno	1	3	2	2	2
Religione	1	1	1	1	1
Educazione fisica	2	2	2	2	2
Totali	**25**	**27**	**28**	**29**	**30**

TEMI P.N.I. (Piano Nazionale per l'Informatica)

Nelle sottosezioni 7e, 7f del programma (che nella sezione 7 tratta di analisi infinitesimale), si invita ad affrontare

7e il problema della misura: lunghezza, area, volume ed integrale definito

7f funzione primitiva ed integrale indefinito. Teorema fondamentale del calcolo integrale, integrazione per parti e per sostituzione.

Questi temi possono essere affrontati nel quinto anno di scuola.

"Il problema della misura sarà affrontato con un approccio molto generale, a partire dalle conoscenze già acquisite dallo studente nel corso dei sui studi precedenti."[1]

Prerequisiti:

È necessario possedere i seguenti requisiti

- Calcolo algebrico
- Equiscomponibilità tra poligoni
- Trasformazioni geometriche, concetto di simmetria
- concetto di successione
- funzioni continue
- grafico di una funzione
- Limiti

[1] Tratto dal testo originale.

- Derivata di una funzione
- area e volume

Obiettivi generali:

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dall'U.D.
- Affinare le capacità logiche
- procedimenti di astrazione e di formalizzazione dei concetti
- ragionare induttivamente e deduttivamente
- Conoscere e comprendere la nozione di integrale definito acquisendo terminologia e simbologia specifica
- Conoscere e comprendere il teorema fondamentale del calcolo integrale
- Acquisire abilità di calcolo nelle operazioni sugli integrali
- Conoscere e sapere applicare tecniche per il calcolo degli integrali
- Utilizzo almeno parziale dei software presentati (foglio di calcolo, software di matematica)

Obiettivi trasversali:

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative
- Acquisire abilità di studio.
- Comunicare in modo efficace

Obiettivi specifici:

Conoscenze:

- Conoscere come e perché si arriva alla necessità di studiare i limiti e gli integrali
- Conoscere un metodo generale per determinare l'area di una superficie piana qualunque. Area del trapezoide.
- Conoscere il concetto di integrale definito
- Conoscere le proprietà dell'integrale definito
- Conoscere il teorema della media
- Conoscere i principali integrali notevoli
- Conoscere il concetto di funzione primitiva
- Conoscere il concetto di funzione integrale
- Conoscere il teorema fondamentale del calcolo integrale

Competenze:

- Saper calcolare l'area del trapezoide
- Saper definire l'integrale definito
- Saper enunciare le proprietà dell'integrale definito
- Saper enunciare il teorema della media
- Saper definire il concetto di funzione primitiva
- Saper definire il concetto di funzione integrale
- Saper enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

.

Capacità:

- Saper determinare la lunghezza di una curva di equazione $y = f(x)$
- Saper calcolare l'area di una superficie di rotazione, il volume e il baricentro di una figura di rotazione
- Saper applicare il concetto di integrale definito in altre discipline

- Saper estendere la definizione di integrale definito al caso in cui la funzione non sia continua in qualche punto dell’intervallo d’integrazione (o in un estremo, o in un punto interno)
- Saper applicare il calcolo integrale per la risoluzione di problemi riguardanti la fisica
- Saper riconoscere quali sono le applicazioni di tali concetti alla fisica

Contenuti:

- Necessità storica dell’integrale
- Determinazione dell’area di un trapezoide
- L’integrale definito e le sue proprietà
- La funzione integrale e il teorema di Torricelli - Barrow
- La formula per il calcolo dell’integrale definito
- Il calcolo delle aree
- Il calcolo del volume di un solido di rotazione e il suo baricentro
- Il calcolo della lunghezza dell’arco di una linea piana
- Il calcolo dell’area di una superficie di rotazione

Strumenti utilizzati:

- Libro di testo
- Dispense
- Lavagna
- Software didattico (Excel©, Cabrì©, Z.U.L/C.A.R)

Tempi dell’intervento didattico

Previste 18-20 ore.

Metodologia:

Lo svolgimento dell’attività didattica avverrà attraverso lezioni dialogate e interattive, con auspicabili osservazioni, domande flash poste ai singoli alunni. È fondamentale che ogni qual volta si presenti la necessita di richiamare concetti che sono stati già spiegati, vengano richiesti agli alunni. Non dare mai per scontato ciò che si è spiegato le volte precedenti. L’approccio grafico, che tra l’altro in questo caso è usato costantemente, risulta di grande aiuto. L’uso di software è auspicabile per la sua grande capacità di interattività ed immediatezza.

Verifica e valutazione:

La fase di *verifica* e *valutazione* è parte integrante del processo educativo e permette di monitorare sia il raggiungimento degli obiettivi prefissati, sia l’efficacia della strategia didattica attuata.

Le modalità principali di verifica sono:

- osservazione “dialogica” (domande e risposte dal banco);
- osservazione del lavoro fatto in classe o a casa (esame dei quaderni, “giro “ tra i banchi);
- verifiche al calcolatore (di conoscenza, padronanza dello strumento e del software matematico utilizzato);
- Verifiche scritte

Il test di verifica formativa che verrà svolto durante il percorso didattico, consiste in diversi quesiti volti ad accertare da parte dell’alunno le conoscenze di base.

Attraverso la verifica sommativa inoltre, si vuole rilevare se gli studenti hanno acquisito e memorizzato i concetti e li sappiano esprimere correttamente.

Gli esercizi proposti durante la verifica, infatti, riguarderanno il complesso degli argomenti trattati e saranno volti a constatare l’efficacia dell’intervento didattico e del percorso proposto.

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere eventuali attività di recupero o esercizi riepilogativi.

Per individuare gli argomenti che necessitano di recupero, sia a livello collettivo che a livello individuale, ci si avvarrà della verifica formativa, delle prove orali e delle attività di collaborazione insegnante-allievo.

Attività di recupero:

- Recupero da effettuare in classe durante le ore curricolari, attraverso la ripresa dei concetti non ben compresi e lo svolgimento di esercizi riguardanti tali argomenti
- Assegnazione a singolo studente di esercizi mirati.

CONTENUTI

Nota storica:

Una introduzione storica è spesso il miglior modo di cominciare a spiegare qualcosa di cui gli alunni non hanno alcuna idea, questo perché si fa comprendere come le conquiste intellettuali e scientifiche spesso vengano necessariamente ricercate e solo dopo comprese. Sappiamo che già in tempi antichissimi si è cercato un metodo per calcolare con precisione sempre maggiore la lunghezza delle cose, le distanze dei luoghi e le estensioni degli oggetti (aree di oggetti, campi agricoli, pianure). I primi studi rudimentali risalgono a tempi assai remoti, egizi e greci si posero il problema di misurare l'estensione dei campi o delle costruzioni che non avessero forme regolari come quadrati, triangoli, trapezi, etc.

Tra i matematici famosi che si sono occupati del problema del calcolo delle aree vi è Eudosso da Cnido (408?-355? a.C.), allievo di Platone.

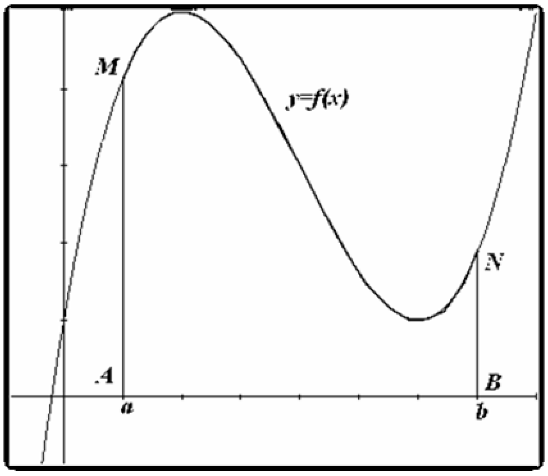
Anche il famoso problema della quadratura del cerchio[2] in qualche maniera si può ricondurre al problema di voler calcolare l'estensione del cerchio, quindi la sua area o superficie conoscendo uno dei suoi parametri caratterizzanti ossia il raggio o il diametro. Infatti il calcolo integrale può spesso essere accostato al calcolo delle aree di figure anche complesse, anche se in modo rigoroso vedremo che si devono fare opportune considerazioni.

Se applichiamo lo stesso ragionamento fatto per la determinazione dell'area di una figura piana, a delle funzioni ci accorgeremo che il procedimento è analogo.

Dallo studio di funzione siamo in grado di calcolare l'andamento qualitativo di una curva, i limiti e i punti notevoli della stessa, sappiamo inoltre calcolare la derivata in questi punti e grazie alla derivata prima e seconda, di determinare in quali intervalli la funzione è

[2] I problema risale all'invenzione della geometria, e ha tenuto occupati i matematici per secoli. Fu solo nel 1882 che l'impossibilità venne provata rigorosamente, anche se i geometri dell'antichità avevano afferrato molto bene, sia intuitivamente che in pratica, la sua intrattabilità. Si deve notare che è solo la limitazione ad usare una riga (non graduata) e un compasso che rende il problema difficile. Se si possono usare altri semplici strumenti, come ad esempio qualcosa che può disegnare una spirale archimedea, allora non è così difficile disegnare un quadrato ed un cerchio di area uguale. Una soluzione richiede la costruzione del numero $\sqrt{\pi}$, e l'impossibilità di ciò deriva dal fatto che π è un numero trascendente, ovvero non-algebrico, e quindi non-costruibile. La trascendenza di π venne dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882. Risolvere il problema della quadratura del cerchio, significa aver trovato anche un valore algebrico di π - il che è impossibile. Ciò non implica che sia impossibile costruire un quadrato con un'area molto vicina a quella del cerchio dato.

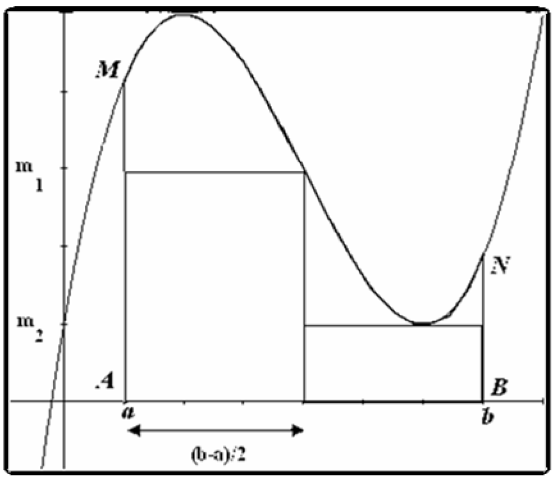
crescente o decrescente e quando la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso. Adesso consideriamo il problema di dover determinare l'area delimitata da una curva, dall'asse delle ascisse e lateralmente da un intervallo chiuso. In figura vediamo una curva (ovvero una funzione limitata) che è delimitata da due valori in $x=a$ e $x=b$ e dall'asse delle ascisse.

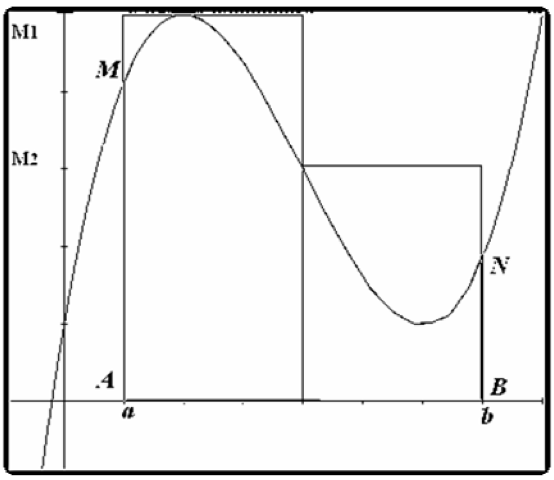


(Figura 1)

Ci chiediamo quanto valga l'area racchiusa dalla curva.

Il problema come, risulta chiaro è simile a quello proposto nell'appendice ma in questo caso ci troviamo a calcolare un'area che è delimitata da una funzione di cui conosciamo l'andamento, sia qualitativo che quantitativo. Storicamente sappiamo che questo problema è stato risolto da Cauchy che propose una risoluzione con l'ausilio di rettangoli di spessore infinitesimo. Ossia si divide l'area sottesa alla curva in tanti rettangoli di spessore uguale sempre più piccolo e con una altezza tale da essere *"tangente"* alla curva (o in eccesso o in difetto). Vediamo graficamente cosa significa.





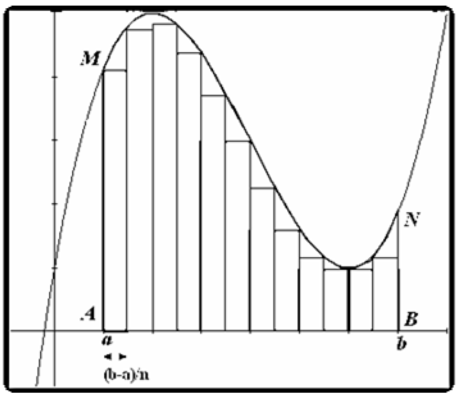
(Figura 2)

Rettangoli *"tangenti"* per difetto: significa che i rettangoli che scegliamo di spessore piccolo a piacere sono sempre tutti al disotto della curva.
Rettangoli *"tangenti"* per eccesso: significa che i rettangoli che scegliamo di spessore piccolo a piacere contengono la curva.

Usando le formule già viste nell'appendice 1, possiamo calcolare l'area dei rettangoli nei due casi, dove questa volta m_1 e m_2 sono le altezze relative dei rettangoli.

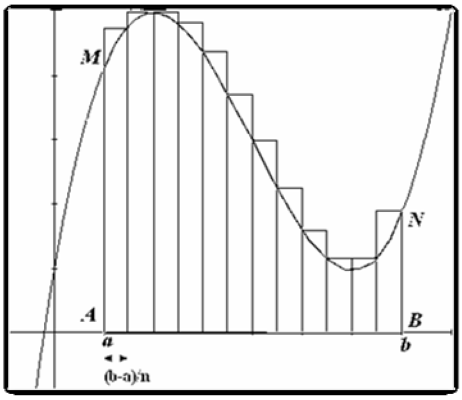
$$s_2 = \frac{b-a}{2} \cdot m_1 + \frac{b-a}{2} \cdot m_2 = \frac{b-a}{2} \cdot (m_1 + m_2)$$
$$S_2 = \frac{b-a}{2} \cdot M_1 + \frac{b-a}{2} \cdot M_2 = \frac{b-a}{2} \cdot (M_1 + M_2)$$

E' facile convincersi che l'area del trapezoide è certamente compresa tra l'are s_2 e S_2.
L'idea che sta alla base del calcolo integrale, ossia del calcolo delle aree dei trapezoidi è proprio questa, calcolare la somma delle aree dei rettangoli facendo tendere la misura del loro spessore a zero. [3]



[3] Si definisce trapezoide la figura delimitata dalla curva di funzione f(x) l'asse delle ascisse e i valori dell'intervallo.

Nelle figure si sono diminuiti gli spessori dei rettangoli in modo tale da calcolarne la



somma delle aree con un errore minore. Questo è stato fatto sia per eccesso che per difetto.

Con riferimento alle equazioni precedenti, abbiamo aumentato il numero n di rettangoli.

(Figura 3,4)

Nota: Usiamo una Macro tratta dal software ***Z.u.L 7.2***[4] per osservare cosa significa diminuire lo spessore dei rettangoli o in modo del tutto equivalente aumentare il numero dei rettangoli nell'intervallo considerato.

La formula che abbiamo utilizzato altro non è che una successione. Le successioni sono una minorante e una maggiorante. Infatti una certamente ha un valore che è minore della somma del trapezoide *(minorante)* e l'altra ha un valore maggiore *(maggiorante)*. La cosa che ci aspettiamo e che le due somme convergano ad un valore unico col tendere di $n \to \infty$ dove n è al denominatore ed indica in numero di rettangoli nell'intervallo .

A questo punto possiamo introdurre un teorema che formalizza quanto appena detto.

Teorema:

Le successioni minorante $\{s_i\}$ e maggiorante $\{S_i\}$ sono convergenti e convergono entrambe allo stesso limite:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Ovviamente, come abbiamo detto, il valore a cui tendono le due successioni è uguale all'area del trapezoide.

[4] Per maggiori informazioni vedi Capitolo sui software didattici e in bibliografia.

Adesso possiamo introdurre una nuova simbologia. Il limite della somma dei rettangoli di spessore infinitesimo viene comunemente indicata con la seguente notazione[5].

$$\int_a^b f(x)dx$$

La ***a*** e la ***b*** che si trovano all'estremità del simbolo di integrale sono detti estremi di integrazione e stanno a significare l'integrale viene calcolato nell'intervallo delimitato dai due valori. ***f(x)*** è detto argomento dell'integrale e il ***dx*** è detta variabile di integrazione.

Qui vediamo che corrispondenza c'è tra le formule viste prima e quella che abbiamo appena introdotto.

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_i m_i \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_i M_i \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Regole di integrazione:

Nel XVIII secolo lo studio dei metodi di integrazione arrivò a delle raffinatezze e precisione che prima di allora erano lasciate all'empirismo matematico. Si comprese ben presto una cosa assai importante, cioè che l'integrazione e la derivazione erano dei "*processi*" l'uno inverso dell'altro. Si capì che quando si integra una funzione si ottiene la così detta primitiva e se si deriva la primitiva[6] si ottiene l'integrale.

In analisi possiamo distinguere gli integrali in due tipologie: integrali indefiniti e integrali definiti o limitati.

---

[5] Questa notazione fu introdotta per la prima volta da **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (Lipsia, 1° luglio 1646 – Hannover, 14 novembre 1716) nel 1684 nel suo scritto di maggiore rilevanza matematica, Nova Methodus. Il simbolo ha una forma di S deformata, che sta proprio a significare Somma. Si legge integrale da ***a*** a ***b*** di ***f(x)*** in ***dx*** (deics)

[6] Più avanti si da una definizione di primitiva di una funzione.

È chiaro che l'integrale indefinito è un integrale che non ha estremi di integrazione cioè una volta calcolato (*"estratto dall'integrale"*) restituisce una funzione che è detta appunto primitiva, mentre l'integrale definito è detto tale proprio perché è definito o delimitato da un intervallo noto, definito dagli estremi di integrazione.. Si usa dire che quando si calcola un integrale indefinito si sta cercando la primitiva della funzione, questa primitiva è individuata simbolicamente con ***F(x)***. Quindi quando si calcola un integrale senza estremi di integrazione si ottiene la primitiva della funzione ***f(x)*** che si trova sotto il simbolo di integrazione, quando invece calcoliamo un integrale definito (quindi che possiede estremi di integrazione) ne calcoliamo un valore numerico e questo valore come detto è proprio l'area sottesa alla curva in quell'intervallo[7]. Le tecniche di *"estrazione"* dell'integrale o di calcolo sono identiche nell'uno e nell'altro caso solo che nel primo (integrale indefinito) otteniamo una funzione, detta primitiva e nel secondo caso (integrale definito) utilizziamo la primitiva stessa per il calcolo numerico dell'integrale.

Definizione di primitiva:

Si dice che la funzione F(x) è una primitiva della funzione f(x), nell'intervallo [a;b], se F(x) è derivabile in ogni punto di questo intervallo e ivi risulta che

$$F'(x)=f(x)$$

Aggiungiamo che : la totalità delle primitive di una funzione data f(x) è detto integrale indefinito della funzione f(x) il quale si indica come visto con la notazione seguente

$$\int f(x)dx$$

Metodo di integrazione per parti:

[7] Bisogna notare una cosa importante. Come abbiamo detto quando si calcola la primitiva di una funzione si ottiene un'altra funzione, ed anch'essa sarà graficabile come una qualsiasi altra funzione. Ci sono alcune eccezioni che però esulano dai nostri interessi.

Il metodo seguente è spesso utilizzato quando il primo non porta a facili risoluzioni, infatti spesso le funzioni complicate non riescono a essere portate ad una forma nota, ecco perché operando con questo metodo si possono risolvere molti integrali.

Siano f(x) e g(x) due funzioni continue e dotate entrambe di derivata continua e siano f′(x) e g′(x) le loro derivate

se la funzione integranda si presenta come segue

$$\int f(x)g'(x)$$

Allora possiamo "*spezzare*" l'integrale in questo modo

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Come si vede la risoluzione è stata semplice, basta fare le opportune considerazioni.

Calcolo dell'integrale definito:

Ora ci poniamo il problema di calcolare numericamente l'integrale definito una volta determinata la sua primitiva.

Una volta calcolata la funzione primitiva è facile calcolare il valore numerico dell'integrale , infatti in generale si ha

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$$

Alla primitiva si sostituiscono alla variabile di integrazione ordinatamente gli estremi di integrazione prima ***b*** e poi ***a*** .

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Bisogna fare bene attenzione al fatto che l'integrale definito è un valore numerico e che quindi non ha nulla a che fare con la variabile di integrazione, cioè una volta calcolata la primitiva della funzione integranda si sostituiscono i valori esterni dell'intervallo e se ne fa la differenza, Da questo momento in poi il valore trovato è solo un numero che indica l'area del trapezoide o il valore della funzione integrata nel punto di ascissa data.

Facciamo degli esempi per verificare la bontà del metodo e per convincerci che stiamo calcolando delle aree. Partiamo da un esempio assai semplice e forse banale.

Alcune proprietà degli integrali definiti:

- Se $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Se gli estremi di integrazione sono uguali *(a=b)* il valore dell'integrale è nullo
- Se dato un intervallo *[a;b]* e un punto c interno a questo intervallo si ha $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Infine trattiamo un teorema fondamentale del calcolo integrale ossia il teorema della media

Teorema della media:

Definizione: L'integrale definito di una funzione continua *f(x)* è uguale all'ampiezza dell'intervallo d'integrazione, moltiplicata per il valore che la funzione integranda assume in un conveniente punto di questo intervallo, ovvero

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_1 \quad)$$

Dove con x_1 si intende quel punto convenientemente preso all'interno di *[a;b].*

Nota sulla funzione integrale:

Abbiamo visto che quando si calcola l'integrale di una funzione ne otteniamo un'altra che abbiamo chiamato primitiva e che indichiamo con F(x). Sappiamo calcolare i limiti e le derivate delle funzioni o per lo meno di una buona parte delle funzioni semplici. Voglio far notare (forse una banalità) che la funzione primitiva ha un grafico e che è possibile quindi

Integrale improprio:

Spesso capita di trovare delle funzioni che sono continue in alcuni intervalli ma posseggono delle discontinuità in punti particolari. Ad esempio la funzione ***f(x)=1/x*** è una funzione sempre continua ma nel punto *x=0* i limiti destro e sinistro tendono rispettivamente a più infinito e a meno infinito. Quindi in *x=0* la funzione presenta una discontinuità. Ci chiediamo allora se e come sia possibile calcolare l'integrale di queste funzioni quando nell'intervallo sia presente uno o più punti di discontinuità. O più in generale quando la funzione non è continua nell'intervallo di integrazione.

Terremo comunque valida l'ipotesi che, se anche la funzione non è continua, essa abbia un numero finito di punti di discontinuità.

Integrali definiti di questi tipi, quando esistono, si dicono integrali impropri.

Consideriamo una funzione che in uno degli estremi di integrazione ha un limite che tende a infinito. Consideriamo la funzione *f(x)* e un intervallo [a;b] e sia dunque $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$

Non possiamo usare la definizione di integrale che conosciamo perché in *b* la funzione non è finita; tuttavia se essa è continua in ogni intervallo del tipo $[a, b-\delta]$ con $\delta > 0$, allora è possibile calcolare

$$\int_a^{b-\delta} f(x)dx$$

Facciamo ora tendere δ a zero, calcoliamo cioè $\lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$

Se tale limite esiste ed è finito, si dice allora che la funzione *f(x)* é integrabile in $[a,b]$ e si pone $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)dx$

Se invece tale limite non esiste o non ha un valore finito, si dice che la funzione non è integrabile in $[a,b]$. Si badi bene che la primitiva è possibile calcolarla ma il valore numerico dell'integrale o diverge (cioè è infinito) oppure non può essere determinato.

Se poi la funzione non è continua in un punto c interno ad $[a,b]$ ma lo è in qualunque altro punto di $[a,b]$, si pone $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_a^{b-\delta} f(x)dx + \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{c+\lambda}^{b} f(x)dx$ supposto che esistano finiti i due limiti.

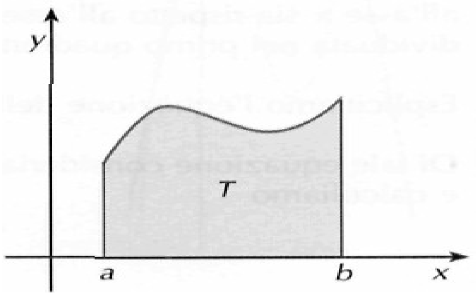
Calcolo dei volumi e superfici tridimensionali.

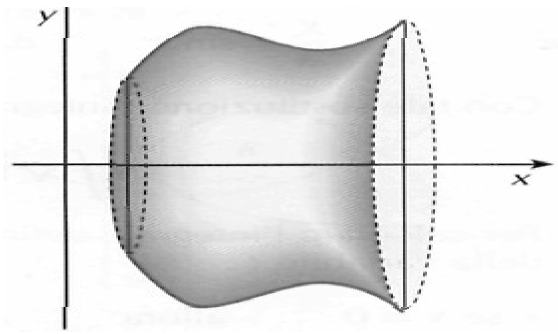
Fino a questo momento abbiamo considerato sempre delle figure che giacciono su un piano ma sappiamo bene che è possibile avere funzioni che sono funzione di due più variabili. Consideriamo il caso di *"oggetti"* che si trovano nello spazio tridimensionale e vediamo che grazie alle tecniche di integrazione sarà possibile calcolarne la superficie e anche il volume. È ovvio che in queste lezioni confideremo casi semplici e di facile risoluzione ma basti sapere che con l'uso di calcolatori e delle tecniche di integrazioni è possibile calcolare quasi ogni tipo di oggetto tridimensionale.

Per una questione di semplicità considereremo oggetti tridimensionali che sono frutto di una rotazione completa intorno ad un asse e vedremo come sia possibile calcolare la loro superficie e il loro volume, inoltre vedremo alcune applicazione alla fisica e all'ingegneria con il teorema di Guldino.

Come visto per il calcolo delle aree delle figure piane anche le note formule per il calcolo dei volumi di solidi regolari (cilindro, cono, sfera) si possono dedurre anche dal calcolo integrale. Infatti questi solidi sono frutto di rotazioni rigide attorno ad un asse di simmetria. Utilizzando il calcolo integrale si ottengono le stesse formule. Ma capiamo bene che nel caso di solidi che sono originati da curve la cosa si complica maggiormente.

Consideriamo una funzione *f(x)* continua in un intervallo $[a,b]$; supponiamo che in tale intervallo essa sia non negativa e indichiamo con T il trapezoide individuato dalla curva e dall'asse x in $[a,b]$. Ruotando attorno all'asse x, T genera un solido di rotazione del quale vogliamo definire e calcolare il volume.





(Figura 8)

Possiamo seguire un ragionamento analogo a quello fatto per determinare l'area di un trapezoide; dividiamo cioè l'intervallo $[a,b]$ in un numero n di parti uguali.

Sia c un punto di ogni intervallino Δx. Consideriamo l'insieme dei rettangoli aventi per base i segmenti Δx e per altezze i valori $f(c)$. Otteniamo in questo modo un plurirettangolo la cui area, al tendere di n all'infinito, sappiamo che definisce l'area del trapezoide.

Se ora facciamo ruotare ciascuno di questi rettangoli di un giro completo attorno all'asse x, otteniamo un solido che è la somma di n cilindri aventi altezze Δx e raggi di base $f(c)$; tale solido prende il nome di *pluricilindro* ed il suo volume è dato da

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot \Delta x$$

Se ora facciamo tendere n all'infinito, il pluricilindro tende al solido di rotazione; per questo motivo si assume come suo volume l'espressione

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i)\right]^2 \cdot \Delta x$$

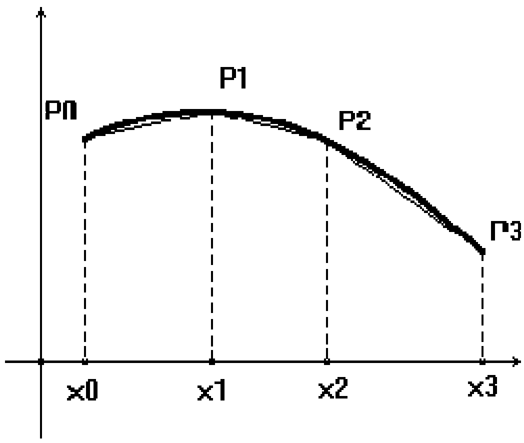
Osserviamo ora che tale limite non è altro che l′integrale definito fra *a* e *b* della funzione $[f(x)]^2$.

Il volume di un solido di rotazione si trova dunque con la formula

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Lunghezza di un arco di curva piana:

Senza entrare nei dettagli e limitandoci a considerazioni. Vogliamo "dimostrare" la formula per calcolare la lunghezza di un arco di curva piana che sia grafico di un funzione reale di variabile reale. Supporremo che la funzione, *f(x)*, sia derivabile con derivata continua in un intervallo [*a*,*b*].



(Figura 12)

Considerando una suddivisione di [*a.b*] in intervalli "infinitamente piccoli" *dx*, potremo ritenere che la lunghezza della curva coincida con quella della spezzata di lati individuati dagli estremi

$$P_i = (x_i, f(x_i)) \text{ e } P_{i-1} = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$$

, con $i = 0,1,2,\ldots, \ n$. La lunghezza di questa spezzata è:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

La supposta derivabilità della funzione ci consente di applicare il teorema di Lagrange, da cui otteniamo

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}$$

ovvero, se l'ampiezza degli intervalli tende a zero

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Questa formula richiede il calcolo di un integrale solitamente non facile, nondimeno è importante perché mostra come la teoria dell'integrale di Riemann possa risolvere numerosi problemi di *misura*, e non solo quello della misura dei domini piani.

Applicazioni alla Fisica :

La fisica e per estensione tutte le scienze utilizzano il concetto e il calcolo integrale per risolvere innumerevoli problemi che adesso è superfluo elencare. Le seguenti applicazioni che vengono qui esposte sono solo alcune delle applicazioni di uso comune e che comunque rientrano nel programma di studi, ovvero cinematica e dinamica. Da quanto segue risulta abbastanza chiaro quanto siano "*potenti*" il calcolo differenziale ed integrale.

Le notazioni che useremo sono quelle proposte nello studio delle applicazioni delle derivate.

Moti rettilinei:

Poiché $v(t) = x'(t)$ (oppure $s'(t)$), si ha, ovviamente,

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt$$
.

Se si vuole la variazione di ascissa in un intervallo di tempo basterà ovviamente fare

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Si tenga conto che, in generale, la variazione di ascissa non coincide con lo spazio percorso: I due valori coincidono (a meno eventualmente del segno) solo quando il moto non ha punti di inversione. Se per esempio lancio un sasso verso l'alto, dopo un po' esso ripasserà per la posizione di partenza: la variazione di ascissa è nulla, ma lo spazio percorso ovviamente no!

Essendo poi *a(t) = v'(t)* si troverà

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt$$
.

Quantità di carica:

Se in un conduttore passa la corrente *i(t)*, la quantità di carica che attraversa una sua sezione può essere calcolata immediatamente:

$$q(t) = \int_0^t i(t)dt$$
.

Lavoro di una forza:

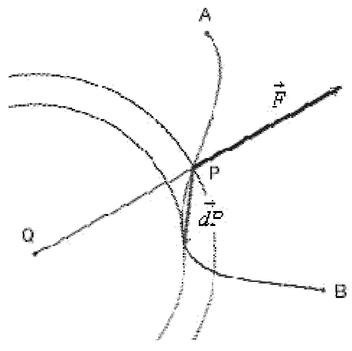
In un moto rettilineo sia *F(x)* una forza, variabile con l'ascissa del punto mobile, e avente sempre la stessa direzione e verso dello spostamento. Il lavoro fatto dalla forza, nello spostamento da una posizione *A* a una posizione *B* è dato da

$$W_{AB} = \int_a^b F(x)dx$$

ove *a* e *b* sono le ascisse di *A* e *B*.

Proponiamo anche un esempio di uso di una terminologia, comune nei testi di fisica, che dal punto di vista matematico è alquanto approssimativa, anche se il risultato ottenuto è perfettamente corretto. Ci riferiamo al calcolo del lavoro della forza elettrostatica prodotta da una carica puntiforme Q, quando una carica "spia" q si sposta da un posizione A ad una posizione B nello spazio.

Si consideri la figura qui sotto. In essa sono rappresentati, nell'ipotesi di cariche concordi: la curva lungo la quale si sposta la carica q dal punto iniziale A al punto finale B, la sorgente Q del campo, la forza **F** di interazione tra le cariche in una data posizione P della carica q, lo spostamento "elementare" **dP** (cioè uno dei tratti infinitesimi in cui deve essere diviso lo spostamento per il calcolo del lavoro), i due archi di circonferenza di centro Q passanti per l'origine e il secondo estremo del vettore **dP**. Per il calcolo del lavoro si dovrà fare il prodotto scalare tra **F** e **dP** e poi sommare i risultati ottenuti (con un integrale, ovviamente).



(Figura 13)

Il modulo della forza **F** è $k\frac{|Q||q|}{r^2}$, il prodotto del modulo di **dP** per il coseno dell’angolo tra **dP** ed **F** è, a meno del segno, uguale alla variazione dr di raggio tra le due circonferenze di figura. È facile constatare che, in ogni caso, vale $\vec{F}\cdot\vec{dp} = k\frac{Qq}{r^2}dr$, purché Q, q e dr siano presi con il loro segno (per esempio nel caso di figura il prodotto scalare deve essere negativo e il valore di dr è proprio negativo). Il risultato segue ora immediatamente dal calcolo dell’integrale: .

$$W_{AB} = \int_A^B k\frac{Qq}{r^2}dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Software per la didattica:

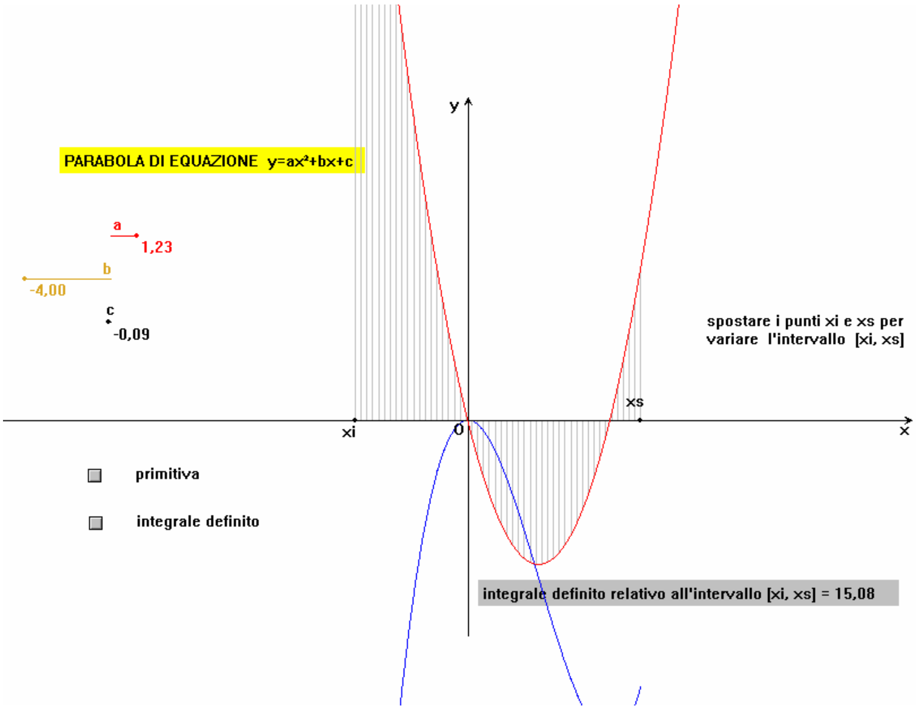
L’utilizzo di software didattici è sempre auspicabile quando si ha a che fare con funzioni, derivate ed integrali, oltre al vastissimo impiego che se ne fa nel campo della geometria piana e solida e in altri numerossissimi campi della fisica e della matematica. Qui presento solo alcuni dei software didattici, quelli che più comunemente sono utilizzati e che quindi offrono tra le altre cose anche una vastissima sitografia dedicata con manuali esercizi e macro già compilate, che all’occorrenza possono essere modificate ed adattate ai propri scopi.

Alcuni di questi software o comunque quelli più utilizzati sono tutti coperti da CopyRight e quindi necessitano di licenza a pagamento, anche se alcuni di questi possono essere utilizzati nella versione trial, ossia una versione limitata o nelle funzioni o nel tempo.

Questi software sono spesso capaci di affrontare i diversissimi problemi della didattica tradizionale grazie alla loro flessibile interattività. È possibile infatti comporre delle costruzioni o disegnare funzioni e poi dinamicamente osservare il loro comportamento sottolineando alcune caratteristiche che spesso con l'uso di lavagna e gesso non è possibile fare.

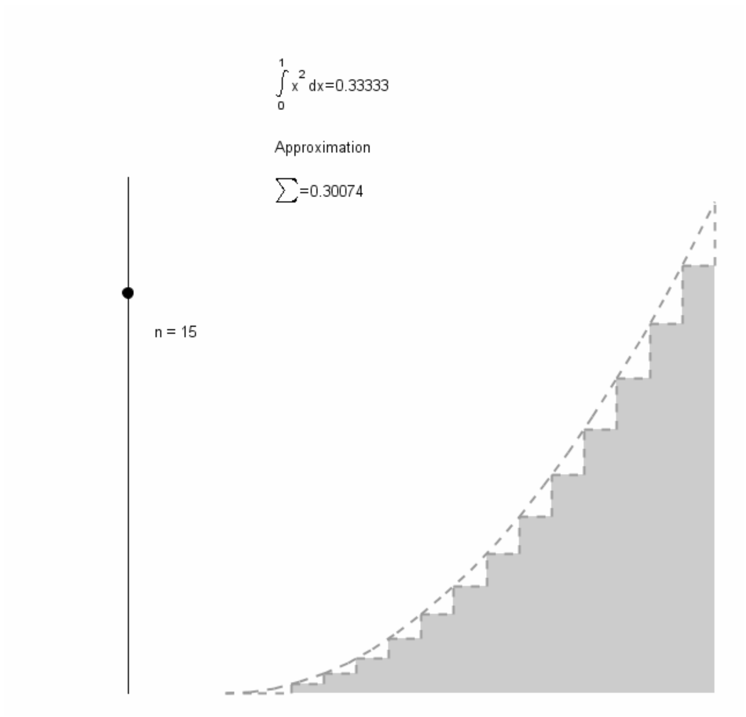
I software di geometria che ho utilizzato sono due Cabrì Geomètre II Plus ® e Z.u.L. C.a.R.. Possiamo dire che è riduttivo affermare che sono software per la geometria, visto che con alcuni accorgimenti possono essere utilizzati oltre che per la costruzione assiomatica delle figure e dei teoremi della geometria euclidea, anche per la costruzione di funzioni analitiche, calcolo approssimato di derivate ed integrali, e molto altro. Nella figura si vede che è possibile costruire delle funzioni e poi determinare il valore dell'integrale definito e oltre a questo la parametrizzazione è dinamica.

Con Cabrì Geomètre II Plus ®:



(Figura 14)

Con Z.u.L. C.a.R:



(Figura 15)

Un software assai utile in analisi matematica è sicuramente Derive® che è un potente programma per il calcolo di funzioni, matrici, derivate, integrali, successioni, e moltissimo altro. In questo elaborato ho preferito non usare questo software poiché già quelli che ho presentato sono più che sufficienti per il raggiungimento dello scopo. C'è da dire comunque che a questa categoria di software fanno parte anche programmi più potenti e complessi con i quali è possibile risolvere quasi ogni tipo di problema matematico, per citarne solo alcuni… Maple®, MathCAD®, Mathematica®, MathLab®, MiniTab.