Unita didattica: Elementi di Calcolo delle probabilità

Destinatari
Questa unità didattica è rivolta a studenti del 4° anno del Liceo Scientifico con sperimentazione PNI e si svolge durante il secondo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica (e informatica) previste sono 5.

Inquadramento nei programmi
I programmi per il Liceo Scientifico di ordinamento non citano l'argomento.
Per quanto riguarda il PNI lo troviamo nel biennio e nel triennio.
PNI biennio: ***TEMA 4. ELEMENTI DI PROBABILITA' E DI STATISTICA***
a) Semplici spazi di probabilità: eventi aleatori, eventi disgiunti e "regola della somma".
b) Probabilità condizionata, probabilità composta. Eventi indipendenti e "regola del prodotto".
c)….
PNI triennio*:* "**Tema n. 4 - Probabilità e statistica**
4.b Valutazioni e definizioni di probabilità in vari contesti
4.c Correlazione, indipendenza, formula di Bayes. Variabili aleatorie in una e *in due dimensioni* (casi finiti)
4.d *Variabili aleatorie discrete: distribuzioni binomiale, geometrica, di Poisson*
Suddivisione per anno
Classe quarta: 4.b - 4.c
Classe quinta: 4.d"

Nel commento al tema 4 si indica di introdurre tramite l'allusione ai vari contesti in cui si valutano queste probabilità le diverse definizioni di probabilità che non verranno viste come antitetiche l'una dell'altra, potendosi usare in ogni contesto applicativo quella che appare più opportuna nello stato di informazione in cui si sta operando. Una possibile sintesi tra le varie definizioni, che potrà essere effettuata all'ultimo anno (ma qui è inserita in quarta), sta nella formalizzazione assiomatica della teoria

Obiettivi generali
- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dall'unità didattica.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre ad un appropriato lessico matematico.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.
- Riconoscere l'importanza della conoscenza del calcolo della probabilità nella vita di tutti i giorni.

Obiettivi trasversali
- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.

Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere il concetto di evento.
- Conoscere le varie definizioni di probabilità.
- Conoscere il concetto di gioco equo.
- Conoscere l'impostazione assiomatica della probabilità.
- Conoscere il concetto di probabilità condizionata.
- Saper enunciare la formula di Bayes.
- Svolgere esperienze interessanti con Excel a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

Competenze

- Saper costruire ed operare nell'ambito dei modelli probabilistici.
- Saper calcolare la probabilità in semplici casi.
- Saper calcolare la probabilità di un evento condizionato al verificarsi di un altro evento.
- Saper utilizzare la formula di Bayes.

Capacità

- Utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere esercizi.
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso del calcolo delle probabilità.

Prerequisiti

- Le quattro operazioni aritmetiche e relative proprietà.
- L'operazione di elevazione a potenza e relative proprietà.
- Elementi di base del calcolo letterale.
- Nozioni generali sulle frazioni algebriche.
- Il calcolo combinatorio.
- Conoscenza basilari sulla teoria degli insiemi.
- Uso del software *Excel*

Contenuti

- La storia della probabilità.
- La concezione classica della probabilità.
- La concezione statistica della probabilità.
- La concezione soggettiva della probabilità.
- L'impostazione assiomatica della probabilità.
- La probabilità della somma logica di eventi.
- La probabilità condizionata.
- Il Teorema di Bayes.
- Il gioco equo.

Metodologie didattiche

Per affrontare gli argomenti di questo percorso didattico si alterneranno *lezioni frontali-dialogiche,* quali l'insegnamento per problemi che stimolano gli alunni a formulare ipotesi di soluzione ricorrendo non solo alle conoscenze già possedute ma anche alla intuizione e alla fantasia, a *metodologie didattiche attive* quali le discussioni guidate e il lavoro di gruppo. Si ritiene più proficuo affrontare gli argomenti, oggetto delle lezioni, utilizzando il *metodo induttivo* che consiste nel partire da esempi concreti della vita quotidiana (es. partite di calcio, le estrazioni del gioco del lotto, giochi sociali, ecc.) per passare poi, gradatamente, alla formalizzazione dei concetti introdotti.
A sostegno si farà uso del *laboratorio di informatica*.
Gli argomenti dell'unità didattica verranno presentati mediante opportuni esempi svolti, che ne agevoleranno la comprensione; a conclusione di ciascuno di essi si cercherà di proporre un buon numero di esercizi, risolti assieme in classe in modo che siano momento immediato di sostegno e

anche di recupero della teoria. Infine la storia della matematica come strumento metodologico per inquadrare da un punto di vista storico le nozioni ed i concetti introdotti, con brevi accenni, affinché la matematica non sembri una scienza data ma frutto di una evoluzione.

Materiali e strumenti utilizzati

Lavagna tradizionale. Libri di testo. Materiale concreto quali monete, dadi, carte, fiches. Uso del computer con software: *Excel.*

Controllo dell'apprendimento e valutazione

Durante lo svolgimento della lezione il docente concretizzerà la valutazione formativa mediante brevi colloqui, esercitazione scritta in classe costituita da quesiti a risposta multipla e non, correzione degli esercizi per casa, verificando l'acquisizione progressiva delle conoscenze, competenze e capacità previste come obiettivi specifici. Questo aiuterà a comprendere meglio le difficoltà che hanno ostacolato l'apprendimento e quindi permetterà di progettare l'attività di recupero in itinere. Un altro mezzo di controllo saranno le *verifiche orali*, nelle quali gli alunni saranno chiamati ad eseguire alla lavagna alcuni esercizi motivando, con riferimenti alla teoria, le strategie utilizzate per la loro risoluzione. Al termine dell'argomento, verrà assegnata una *verifica sommativa* in cui si proporrà agli studenti la risoluzione di esercizi simili a quelli visti in classe. Per determinare gli esiti della verifica sommativa assegniamo ad ogni esercizio un punteggio. La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze, competenze e capacità richieste per svolgerli.

Tempi dell'intervento didattico (totale 19 ore)

Lezioni Teoriche: 7 ore
Esercizi in classe: 3 ore
Laboratorio: 4 ore
Verifica formativa: 2 ore
Verifica sommativa: 2 ore
Correzione: 1 ora

Storia del calcolo delle probabilità

Il calcolo delle probabilità era già presente nei giochi d'azzardo degli Egiziani (circa 3600 a.C.).
Il gioco d'azzardo più antico di cui si abbia notizia, è una specie di lancio del dado, chiamato gioco della pietra egiziana. Ed è proprio in seguito a questo tipo di gioco che Cicerone, nella sua opera *De Divinatione* (da previsione del futuro, 44 a.C.), cerca di approfondire i termini di sorte, caso e prove ripetute, avvicinandosi così alle problematiche attuali del calcolo delle probabilità. Dopo Cicerone, dovranno passare moltissimi anni per sentire parlare nuovamente di probabilità in termini razionali. Solo in pieno umanesimo, l'algebrista Girolamo Cardano, nel suo libro sul gioco del dado, (1526), ripropone, sempre attraverso il gioco d'azzardo, l'attenzione sul concetto di probabilità, e ne fissa il problema in termini generali.

Nel 1620, Galileo Galilei nel suo opuscolo sopra le scoperte dei dadi, insegna, per la prima volta, a contare il numero dei casi favorevoli a un evento casuale. Ma la nascita del calcolo delle probabilità viene comunemente fissata nella corrispondenza tra i due grandi matematici francesi Pascal e Fermat a metà del secolo XVII. E l'interesse di Pascal fu risvegliato dal cavaliere De Méré, matematico almeno discreto, ed accanito giocatore d'azzardo.
De Méré riportò a Pascal vari problemi, tra cui la ripartizione della posta tra due giocatori che debbono interrompere il gioco, ed un altro problema, meno rilevante per gli sviluppi matematici, ma molto interessante per altri versi: egli si lamentò che la matematica lo faceva perdere al gioco, perché aveva calcolato per una combinazione ai dadi una probabilità maggiore di 1/2, aveva scommesso a lungo su tale combinazione, ma invece di vincere, perdeva. Pascal rifece i calcoli e trovò che in realtà la probabilità dell'evento considerato era minore di 1/2, cosicché le perdite conseguite concordavano con quanto ci si poteva aspettare. Dalla corrispondenza tra Pascal e

Fermat venne un notevole sviluppo del calcolo combinatorio. Il primo a formulare esplicitamente il concetto di probabilità è l'olandese Huygens (1656); successivamente (1715) Jacob Bernoulli, enuncia il suo famoso teorema in cui si pone in relazione il concetto di frequenza relativa di un evento con quello di probabilità e lo stesso evento; in quest'opera Bernoulli approfondisce anche le applicazioni di calcolo combinatorio al calcolo delle probabilità.

Nel 1812, il francese Laplace introduce la *definizione classica* di *probabilità* di un evento casuale, intesa come il rapporto tra il numero dei *casi favorevoli* al realizzarsi dell'evento e il numero dei *casi possibili*, a condizione che quest'ultimi si possano ritenere *ugualmente possibili*. Sulla base di questa definizione nasce la *teoria classica* della probabilità, il cui campo di applicabilità è, però, molto ristretto. Rimane comunque l'unica teoria fino all'inizio del XX secolo. Nasce poi la teoria della probabilità secondo *l'impostazione frequentista*. Concetto base di questa teoria è la *frequenza relativa* di un evento la quale, determinata in un gran numero di prove, svolte tutte nelle stesse condizioni, viene assunta dagli statistici come valore approssimato della probabilità.

Nel 1960, l'italiano Bruno De Finetti, propone la *teoria soggettivista* secondo la quale la *probabilità* di un evento è la misura del grado di fiducia che una determinata persona attribuisce al verificarsi dell'evento stesso. Secondo la concezione soggettivista, il campo di applicabilità non presenta alcuna limitazione, e ciò rappresenta un notevole pregio rispetto alle altre impostazioni. Per contro però, non tutti sono disposti ad accettare un atteggiamento soggettivistico di fronte ai problemi scientifici.

Ciò ha portato alla nascita di altre teorie della probabilità, tra le quali menzioniamo soltanto quella secondo l'*impostazione logistica* e quella secondo l'*impostazione assiomatica*, ove la probabilità è definita implicitamente mediante l'insieme di tre particolari postulati (la metodologia è analoga a quella adottata per i postulati della geometria euclidea).

Da tutto ciò emerge la notevole complessità insita nel concetto di probabilità, a causa della grande varietà di eventi che si incontrano nella realtà del mondo che ci circonda. D'altra parte, sono proprio i sempre nuovi campi di applicazione che spingono ad elaborare nuove teorie e ad approfondire gli studi e le ricerche sul calcolo delle probabilità.

Sviluppo dei contenuti

Gli eventi

Nel mondo che ci circonda troviamo una quantità innumerevole di situazioni probabilistiche.

DEFINIZIONE

Un ***evento*** è un avvenimento, descritto da una proposizione, che può accadere o non accadere.

Gli eventi che accadono con certezza (Nel gioco della tombola si può estrarre un numero da 1 a 90) si dicono ***eventi certi***.

Gli eventi che non possono mai verificarsi si dicono ***eventi impossibili*** (lanciando un dado esce il numero 9).

Ci sono eventi che dipendono dal caso (lanciando due monete otteniamo due teste) e quindi possono accadere, ma senza certezza. Questi ultimi si dicono ***eventi aleatori***.

(Nota: Aleatorio deriva dal latino alea, che significa "dado").

Dalla casualità di un evento aleatorio, diventa necessario stimare la possibilità che esso ha di accadere. Per determinare questa stima si introduce il concetto di ***probabilità***.

La concezione classica della probabilità

Iniziamo da un esempio. Abbiamo un sacchetto contenente 5 palline numerate da 1 a 5 che differiscono solo per il numero riportato, impercettibile al tatto. Estraiamo una pallina. L'esito dell'esperimento dà luogo ai seguenti possibili risultati che costituiscono tutti gli eventi elementari relativi a questo esperimento: E_1 = "Esce il numero 1", E_2 = "Esce il numero 2", E_3 = "Esce il numero 3", E_4 = "Esce il numero 4", E_5 = "Esce il numero 5".

L'insieme di tutti gli eventi elementari si chiama **universo degli eventi** o anche **spazio campionario**.
Nel nostro esempio possiamo rappresentare l'universo come ***U*** = {1,2,3,4,5}
L' insieme ***U*** rappresenta l'insieme dei ***casi possibili***. Avendo considerato palline tutte uguali, possiamo dire che tutti i casi sono ugualmente possibili. Osserviamo inoltre che i casi possibili si escludono a vicenda. Consideriamo l'evento aleatorio *E* = "Esce una pallina con un numero dispari"
Il sottoinsieme *E*={1,3,5} rappresenta l'insieme dei **casi favorevoli**, cioè quello dei casi in cui E è verificato. Possiamo allora generalizzare il concetto di evento aleatorio definendolo come ogni possibile sottoinsieme di U. Gli eventi aleatori sono quindi tutti i possibili sottoinsiemi di U, l'insieme dei quali è l'insieme delle parti di U che chiamiamo **spazio degli eventi**. In particolare:

- i sottoinsiemi di un solo elemento sono gli eventi elementari
- il sottoinsieme $\emptyset$ è l'evento impossibile
- l'insieme U è l'evento certo

Consideriamo il quoziente

$$\frac{numero\ dei\ casi\ \ favorevoli}{numero\ dei\ casi\ \ possibili} = \frac{3}{5}$$

otteniamo una stima sulla possibilità che l'evento E si verifichi che viene chiamato **probabilità di E**.
<u>Osservazione</u>
Bisogna far notare ai ragazzi che la formula precedente vale solo nel caso in cui i singoli eventi abbiano tutti identiche possibilità di verificarsi.

Possiamo quindi meglio precisare la formula mediante la definizione seguente, dovuta al matematico ***Laplace*** (1749-1827).

<u>DEFINIZIONE</u>
*La **probabilità** di un evento **E** è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli **f** e quello dei casi possibili **u**, quando sono tutti ugualmente possibili.*

La definizione appena data non è esente da possibili critiche. Infatti in essa il concetto di probabilità viene introdotto sfruttando la nozione di eventi equiprobabili che a sua volta implica la conoscenza dell'idea di probabilità. Ne nasce un evidente giro vizioso che non sfuggì a Laplace. Per superarlo egli ricorse al cosiddetto << principio di ragione sufficiente >>, in base al quale
" *due eventi sono da considerarsi **equiprobabili** quando non sussistono validi motivi per pensare che uno di essi possa verificarsi più facilmente dell'altro*"
<u>Osservazione</u>
Dalla definizione della probabilità, possiamo osservare che:

- La probabilità è un numero ***puro***, cioè non ha dimensione.
- La probabilità di un evento impossibile è 0.
- La probabilità di un evento certo è 1.
- La probabilità di un evento aleatorio è compreso fra 0 e 1.

Spesso, il valore della probabilità viene espresso in termini percentuali.

<u>La concezione statistica della probabilità</u>
<u>DEFINIZIONE</u>
La ***frequenza relativa f*(*E*)** di un evento sottoposto a ***n*** esperimenti effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto fra il numero delle volte ***m*** che si è verificato e il numero ***n*** delle prove effettuate.
<u>DEFINIZIONE</u>

La ***probabilità statistica*** di un evento ***E*** è la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero di prove effettuato è da ritenersi “sufficientemente alto”.

Questo tipo di definizione si applica generalmente ai problemi fisici legati alla misurazione o in generale quando si hanno a disposizione un gran numero di dati sperimentali. Se dopo aver ripetuto n volte un'osservazione (con n molto grande) nelle medesime condizioni, un evento A si è verificato m volte, allora la probabilità di questo evento è misurata dalla quantità:

$$p = P(A) = \frac{m}{n}$$

questa definizione denota un approccio <u>frequentistico o empirico o a posteriori</u>

<u>NB. Occorre a mio parere far notare:</u>

- anche se “visivamente” la definizione appare del tutto simile alla prima definizione introdotta, parte da presupposti completamente diversi
- questo tipo di definizione si introduce per rispondere ai problemi in cui manca o è molto difficile definire la equiprobabilità degli eventi.
- con la seconda definizione è possibile collegarsi con la statistica descrittiva in particolare alle distribuzioni in frequenza di un carattere

<u>Osservazione</u>

Osserviamo che i valori della frequenza di un evento è compreso tra 0 e 1. Dobbiamo inoltre sottolineare che la frequenza 0 non significa che l’evento è impossibile, ma soltanto che non si è mai verificato. Analogamente, frequenza 1 non significa che l’evento è certo, ma soltanto che in quella serie di esperimenti è stato sempre osservato.
Se ripetiamo l’esperimento, senz’altro otterremo valori diversi. Inoltre, se aumentiamo il numero delle prove si rileva che il valore della frequenza tende a un valore costante che si può ritenere come la probabilità dell’evento.

Dalla definizione della frequenza relativa si giunge a formulare la seguente legge sperimentale

<u>Legge empirica del caso</u>

Dato un evento ***E***, sottoposto a ***n*** prove tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa ***f*(*E*) =** $\frac{m}{n}$ tende al valore della probabilità ***p*(*E*)**, all’aumentare del numero ***n*** di prove effettuate.

Nell’impostazione classica il valore della probabilità è calcolato **a priori**, ossia prima che l’esperimento avvenga, mentre il valore della frequenza è un valore **a posteriori**.

Ci sono moltissimi eventi per i quali è impossibile calcolare la probabilità applicando l’impostazione classica. Per eventi di questo tipo si è costretti ad applicare l’impostazione frequentistica.
Per esempio, nel campo delle assicurazioni si calcola con questo metodo:
- la probabilità di incidenti automobilistici;
- la probabilità di vita e di morte;
- la probabilità di furti.
Per tutti questi eventi occorre fondare il calcolo su quanto è avvenuto in passato e cercare statisticamente le relative frequenze che costituiranno le probabilità degli eventi.
Altri esempi in cui viene utilizzata la probabilità statistica sono:
- la probabilità che hanno dei macchinari di produrre pezzi difettosi;
- la probabilità di contrarre una determinata malattia;

- la probabilità che un farmaco sia efficace.
A questo punto è opportuno far notare che anche la teoria frequentistica della probabilità, proprio perchè a *posteriori*, ha dei limiti di applicazioni. Si richiede, infatti, che le prove sperimentali possano essere ripetute un gran numero di volte, tutte nelle *stesse condizioni*. Ciò, ovviamente, non è possibile per tutti i tipi di eventi. Infatti se un evento non si è mai realizzato, ma si potrebbe realizzare, non è possibile stabilirne la probabilità; come ad esempio:qual è la probabilità che un terremoto distrugga Roma? Oppure che ci sia un extraterrestre rinchiuso nella vostra cantina?

La concezione soggettiva della probabilità (Bruno De Finetti)

Osservazione

Il modo di procedere soggettivo è l'unico utilizzabile per quegli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili e non si può sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni.
Siamo in questa situazione se vogliamo stimare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio a un torneo.

DEFINIZIONE

La ***probabilità soggettiva*** di un evento è ***la misura del grado di fiducia*** che una persona attribuisce al verificarsi dell'evento, secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto fra la somma **P** che si è disposti a pagare in una scommessa, e la somma **V** che si riceverà nel caso l'evento si verifichi.

Osservazione

Deve sussistere la ***condizione di coerenza***: la persona che accetta di pagare **P** per ottenere **V** deve anche essere disposta a ricevere **P** per pagare **V** nel caso l'evento si verifichi.

L'impostazione assiomatica della probabilità

L'impostazione assiomatica della probabilità sistema in modo rigoroso le conoscenze e le applicazioni che si sono sviluppate nel tempo.
Questo approccio ha permesso di superare le "ambiguità" viste nelle precedenti definizioni.
Prima di procedere con l'elencazione degli assiomi diamo alcune definizioni:

Si dice spazio dei campioni o spazio campione U l'insieme formato da tutti i risultati di un'osservazione. Un risultato è detto campione. Un evento E è rappresentato da un sottoinsieme dell'insieme U. Anche l'insieme vuoto e U sono da considerare sottoinsiemi dello spazio campione.

- I sottoinsiemi di U formati da un solo elemento sono detti eventi semplici.
- I sottoinsiemi di U formati da più di un elemento sono detti eventi complessi o composti.
- un evento si dice certo se coincide con U.
- un evento si dice impossibile se è l'insieme vuoto.
- due eventi sono incompatibili quando i rispettivi sottoinsiemi dello spazio U non hanno elementi in comune.
- due eventi sono compatibili quando i rispettivi sottoinsiemi dello spazio U hanno uno o più elementi in comune.

Considerando gli eventi come insieme, possiamo effettuare le usuali operazioni fra insiemi, alle quali corrispondono operazioni logiche tra le proposizioni che descrivono gli eventi. Ricordiamo quindi alcune operazioni logiche.

In generale, possiamo dare le seguenti definizioni.
• Dato un evento **E**, l'evento complementare $\mathbf{E}^{\mathbf{C}}$ di **E** rispetto ad **U** è detto **evento contrario** di **E**. Tale evento si verifica se e solo se non si verifica **E**.

• Dati due eventi $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$, entrambi sottoinsiemi di **U**, l'evento $\mathbf{E_1 \cup E_2}$ è detto **evento unione** o **somma logica** di $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$. Esso si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.
• Dati due eventi $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$, entrambi sottoinsiemi di **U**, l'evento $\mathbf{E_1 \cap E_2}$ è detto **evento intersezione** o **prodotto logico** di $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$. Esso si verifica al verificarsi di entrambi gli eventi dati.
• Due o più eventi si dicono **incompatibili** o **disgiunti** se essi hanno a due a due intersezione vuota, cioè se il verificarsi di uno di essi esclude il verificarsi di uno qualunque dei rimanenti. Nel caso contrario si diranno "**compatibili**".

È opportuno far notare ai ragazzi che definendo gli eventi come insiemi si possono applicare le proprietà che hanno gli operatori di complemento, unione, intersezione:

- Associativa
- Distributiva
- relazioni con l'insieme vuoto e l'insieme U

<u>In più è necessario utilizzare i diagrammi di Venn durante la lezione frontale per aumentare la comprensibilità dei risultati.</u>

Gli assiomi

<u>DEFINIZIONE</u>
La **probabilità assiomatica** è una funzione reale **p** che associa a ogni evento **E** dello spazio degli eventi un numero reale, in modo da soddisfare i seguenti assiomi:
(**1**) **p(E)** ≥ 0;
(**2**) **p(U)** $= 1$;
(**3**) se due eventi $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$ sono tali che $\mathbf{E_1 \cap E_2} = \emptyset$ (eventi incompatibili), allora:

$$\mathbf{p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)}.$$

Osservazione: l'impostazione assiomatica non fornisce alcun procedimento per determinare la probabilità di un evento, ma i valori che vengono assegnati agli eventi devono rispettare gli assiomi.

Probabilità condizionata

Definizione:

La probabilità condizionata dell'evento B rispetto all'evento A, con P(A)>0, è definita da:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dalle definizioni dei probabilità condizionata possiamo subito osservare che:

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
2. $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$
3. $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

L'eguaglianza (3) chiamata anche <u>regola delle probabilità composte</u> afferma che:

La probabilità dell'intersezione di due eventi è uguale al prodotto delle probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro, a condizione che il primo abbia avuto luogo.

Consideriamo ora due eventi A e B.

Si dice che l'evento A è <u>indipendente</u> da B se il verificarsi dell'evento B non altera la probabilità dell'evento A. Vale perciò l'uguaglianza:

$$P(A|B) = P(A)$$

Alcune proprietà:

1. Se l'evento A è indipendente da B allora: $P(A)P(B|A)=P(B)P(A)$
2. Se l'evento A è indipendente da B: $P(B|A)=P(B)$
3. Se due eventi A e B sono tra loro indipendenti (posso affermarlo grazie al punto precedente) la regola delle probabilità composte per due venti indipendenti si riduce a:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

<u>**TEOREMA**</u> ***Probabilità della somma logica di due eventi.***

La probabilità della somma logica di due eventi $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$ è uguale alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione:

$$\mathbf{p(E_1\cup E_2)= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1\cap E_2).}$$

In particolare se gli eventi sono **incompatibili**:

<u>**TEOREMA DELLA PROBABILITA' TOTALE.**</u>

Dati ***n*** eventi a due a due incompatibili $\mathbf{E_1, E_2,\ldots E_n}$, la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle loro singole probabilità:

$$\mathbf{p(E_1\cup E_2\cup \ldots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) +\ldots+ p(E_n).}$$

<u>**TEOREMA DELLA PROBABILITA' COMPOSTA**</u>

La probabilità dell'evento composto o prodotto logico degli eventi $\mathbf{E_1}$ ed $\mathbf{E_2}$ è uguale al prodotto della probabilità dell'evento $\mathbf{E_1}$ per la probabilità dell'evento $\mathbf{E_2}$ nell'ipotesi che $\mathbf{E_1}$ sia verificato:

$$p(E_1\cap E_2) = p(E_1)\cdot p(E_2|E_1).$$

<u>Con il teorema della probabilità composta possiamo calcolare la probabilità degli eventi composti anche quando non è possibile effettuare il calcolo diretto.</u>

Il teorema della probabilità composta si può estendere a più eventi che si devono verificare uno dopo l'altro, considerando sempre quello precedente come verificato. Nel caso di tre eventi la formulazione è la seguente:

$$p(E) = p(E_1\cap E_2\cap E_3) = p(E_1)\cdot p(E_2|E_1)\cdot p(E_3|(E_1\cap E_2)),$$

che per eventi indipendenti si semplifica:

$$p(E) = p(E_1\cap E_2\cap E_3) = p(E_1)\cdot p(E_2)\cdot p(E_3).$$

<u>**Il Teorema di Bayes**</u>

Abbiamo sempre calcolato la probabilità di un evento che potrebbe accadere conoscendo le cause che stanno alla base del suo verificarsi. <u>Ora ci poniamo di fronte a un evento che si è verificato e vogliamo conoscere la probabilità da assegnare alla causa che può averlo prodotto.</u>

La probabilità della causa dell'evento che si è verificato si ottiene facendo il rapporto tra la probabilità dell'evento, verificata la causa, e la probabilità totale dell'evento.

<u>**TEOREMA di BAYES**</u>

La probabilità che, essendosi verificato un evento **E**, la causa che sta alla sua origine sia l'evento $\mathbf{E}_{\boldsymbol{i}}$, con ***i*** = **1**, **2**, …, ***n***, è:

$$\mathbf{p(E_i|\,E)} = \frac{p(E_i)\cdot p(E|E_i)}{p(E)}$$

dove **p(E)** è la probabilità dell'evento totale:

$$p(E) = p(E_1)\cdot p(E|E_1) + p(E_2)\cdot p(E|E_2) + ... + p(E_n)\cdot p(E|E_n).$$

Il teorema di Bayes trova applicazioni nel campo del controllo della qualità, in medicina, in farmacia e ogni qualvolta è necessario valutare il "peso" di una causa di fronte al verificarsi di un effetto.

Speranza matematica e giochi equi

I giochi nei quali si punta denaro nella speranza di ricavarne un utile sono di due tipi: quella nei quali entra la componente <<abilità del giocatore>> e quelli basati esclusivamente sulla buona sorte. I problemi del primo tipo sono esprimibili in termini di calcolo delle probabilità, ma occorre dare una valutazione numerica all'abilità del giocatore, il che complica le cose, oltre a rendere soggettive le conclusioni cui si perviene. I problemi del secondo tipo cadono, invece, in pieno nel dominio della matematica. Esponiamo quindi, per questo tipo di giochi, alcune nozioni elementari.

DEFINIZIONE
Si chiama **speranza matematica** il prodotto dell'ammontare del premio pattuito ove un evento **E** abbia a verificarsi per la probabilità associata ad **E**.

Supponiamo che, relativamente ad un certo gioco, possono verificarsi ***n*** eventi alternativi $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$,…, $\mathbf{E_n}$. Per alternativi si intende ***n*** eventi incompatibili e tali che la loro unione è un evento certo. Indichiamo con $\mathbf{S(E_1)}$, $\mathbf{S(E_2)}$,…, $\mathbf{S(E_n)}$ le somme che il giocatore riscuote o paga in corrispondenza al verificarsi di $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$,…, $\mathbf{E_n}$. Allora si pone:

$$\textbf{Speranza matematica} = \mathbf{S(E_1)\cdot P(E_1) + S(E_2)\cdot P(E_2) + \ldots + S(E_n)\cdot P(E_n)};$$

cioè si definisce come ***speranza matematica la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando la quota da riscuotere o da pagare*** (in corrispondenza a ciascuno degli *n* eventi alternativi) ***per la probabilità associata all'evento stesso***.

DEFINIZIONE

Allorché la *speranza matematica* è *nulla* si dice che il **gioco** è **equo**.

Osservazione
Nel gioco del lotto, il giocatore ha come avversario l'amministrazione dello Stato: dunque non è mai equo. In casi fortunati, il giocatore può realizzare una buona vincita, ma in generale, lo Stato incasserà una somma superiore a quella che distribuisce per le vincite. La stessa cosa avviene nei casinò: chi alla lunga ci rimette è sempre il cliente.

A sostegno del percorso si farà uso del laboratorio di informatica. In particolare con il software *Excel*, supposto che in un urna vi siano palline di tre colori, ricaviamo la probabilità dell'uscita di tre palline di diversi colori. Possiamo, ancora, simulare l'estrazione di 8000 terne di palline e calcolare la percentuale di estrazioni delle terne formate da due palline nere e una bianca.
Possiamo simulare il lancio di due dadi e analizzare la differenza fra la distribuzione di frequenza e quella di probabilità.