LIMITE

DESTINATARI: IV anno del liceo scientifico PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 615 del 27 settembre 1996** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 7.b** - *Limite e continuità di una funzione in una variabile reale* - del **Tema n. 7** – *Analisi infinitesimale*; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel primo quadrimestre.

PREREQUISITI:

- Conoscenze di base di logica: uso di quantificatori esistenziali e universali
- Nozioni sui numeri irrazionali e trascendenti; numero di Nepero
- Conoscenza del piano cartesiano
- Conoscenza della geometria analitica
- Padronanza e consapevolezza nella risoluzione di equazioni e disequazioni (di vario tipo: razionali intere e fratte, logaritmiche esponenziali, goniometriche)
- Definizione di funzione crescente e decrescente (funzioni monotòne)
- Funzioni polinomiali, funzioni razionali e irrazionali, funzione segno, funzione valore assoluto, funzione radice, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni trigonometriche
- Nozioni di topologia (intervallo, intorno e punti di accumulazione)
- Conoscenza del concetto di funzione, di dominio e codominio di una funzione e della funzione inversa
- Funzioni reali di variabile reale
- Conoscenza della dimostrazione per assurdo
- Conoscenza di base del software didattico Derive.

METODOLOGIE DIDATTICHE

L'introduzione rigorosa del concetto di limite e di continuità a livello di scuola secondaria di secondo grado è sempre più oggetto di dibattito e, sono sempre di più quelli convinti che questo tipo di nozioni non sia adatto agli studenti di quest'età.
Per questo motivo le metodologie usate saranno, per quanto possibile, volte a dare prima un'interpretazione intuitiva dei concetti per poi passare alla formalizzazione rigorosa in modo che la prima aiuti la comprensione della seconda. Si partirà quasi sempre da esempi che verranno commentati opportunamente con l'aiuto dell'insegnante per poter poi trarre definizioni e teoremi. Quindi nella stessa ora di lezione si farà uso dell'approccio dialogico e dell'approccio frontale; le lezioni non saranno mai solo frontali in modo da creare discussioni guidate che stimoleranno gli alunni a dare il loro contributo attivo mediante osservazioni e domande. Gli esempi e gli esercizi come anche la spiegazione teorica, verranno sistematicamente **affiancati da grafici** che possono aiutare molto gli studenti a chiarire concetti che potrebbero sembrare astratti.
A conclusione di ogni argomento si proporrà un buon numero di esercizi, risolti insieme in classe, in modo che siano momento immediato di sostegno e anche di recupero della teoria.
Agli studenti verranno assegnati degli esercizi significativi da svolgere a casa, scelti con difficoltà crescente, in modo che questi possano acquisire una maggiore familiarità con l'argomento; in seguito, in classe, saranno svolti quegli esercizi che hanno apportato più incertezze e difficoltà.
Si svolgerà attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Derive; in queste occasioni si preferirà il lavoro di gruppo, le esercitazioni guidate ma anche quelle autonome.
A sostegno di tutto questo vi è anche l'approccio storico-epistemologico che per tanti argomenti di matematica, è fondamentale per far capire agli studenti che ciò che si sta studiando non è affatto infondato, come spesso pensano, ma anzi, che ha delle origini ed è frutto di una evoluzione.

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO

FASE	Ore
• Accertamento dei prerequisiti • La nascita del calcolo infinitesimale (introduzione storica) • Introduzione intuitiva al concetto di limite • Definizioni rigorose del concetto di: o limite finito per una funzione in un punto o limite infinito per una funzione in un punto • Esercizi per verificare i limiti di funzioni mediante la definizione	2
• Definizioni rigorose del concetto di: o limite finito per una funzione all'infinito o limite infinito per una funzione all'infinito • Esercizi per verificare i limiti di funzioni mediante la definizione • Definizione di asintoto • Definizione generale di limite	2
• Teorema dell'unicità del limite e relativa dimostrazione • Teorema del confronto e relativa dimostrazione • Teorema della permanenza del segno e relativa dimostrazione	2
• Verifica formativa	1
• Consegna e correzione della verifica sommativa	1
TOTALE	**8**

Le ore indicate si riferiscono solo ai momenti di spiegazione, ma ovviamente a queste saranno da aggiungere le ore che verranno impiegate per fare numerosi esercizi, essendo un'unità didattica che contiene argomenti che hanno bisogno di tante esercitazioni per essere compresi a fondo. Orientativamente stimerei almeno altre 7 ore di esercitazioni per un totale di circa 15 ore. Poiché le ore di matematica a settimana sono 5, l'unità didattica dovrebbe svolgersi in circa 3 settimane quindi in circa 1 mese.

OBIETTIVI SPECIFICI:

Gli obiettivi specifici sono suddivisi in *conoscenze* e *abilità*.

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze:

- Conoscere l'origine storica del concetto di limite
- Conoscere il concetto intuitivo di limite e le definizioni rigorose di limite (Limite finito di una funzione in un punto, limite infinito di una funzione in un punto, limite finito di una funzione all'infinito, limite infinito di una funzione all'infinito);
- Conoscere i teoremi fondamentali sui limiti (Unicità del limite, confronto, permanenza del segno);

Abilità:

- Saper dare la definizione di limite nei quattro casi e la rispettiva interpretazione grafica;
- Saper enunciare e dimostrare i teoremi fondamentali sui limiti (Teorema dell'unicità del limite, Teorema del confronto, Teorema di permanenza del segno);
- Saper verificare i limiti assegnati, utilizzando la definizione di limite;
- Saper applicare i teoremi fondamentali sui limiti.

Contenuti

- La nascita del calcolo infinitesimale (introduzione storica)
- Introduzione intuitiva al concetto di limite
- Definizioni rigorose del concetto di:
  - limite finito per una funzione in un punto
  - limite infinito per una funzione in un punto
  - limite finito per una funzione all'infinito
  - limite infinito per una funzione all'infinito
- Verifica del limite di funzioni razionali intere e fratte
- Definizione di asintoto
- Definizione generale di limite
- Teorema dell'unicità del limite e relativa dimostrazione
- Teorema del confronto e relativa dimostrazione
- Teorema della permanenza del segno e relativa dimostrazione

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1° passo: "limiti" nella lingua italiana
introduco l'argomento facendo osservare agli studenti che la parola "limite" è usata anche nella lingua italiana (limiti della nostra pazienza o della nostra resistenza); creo una piccola discussione su questo, per poi collegarmi a :"Ma in matematica che significato ha la parola limite"

2° passo: introduzione storica per spiegare l'origine del calcolo infinitesimale
Sulla base dell'approccio storico sulle funzioni che dovrebbe essere un prerequisito degli alunni, l'insegnante pone agli studenti delle domande per farli riflettere e condurli a capire qual è stato il motivo che ha condotto i matematici del passato a studiare il concetto di limite.
Poiché l'argomento limiti seguirà quello delle funzioni non sarà difficile far comprendere agli studenti che il concetto di limite ha origine da quello di funzione; gli studenti sapranno che il concetto di funzione è nato essenzialmente dallo studio del moto e che questo studio fu ad opera dagli scienziati del seicento e che rimase un punto fondamentale e costante in tutte le ricerche dei successivi duecento anni poiché alcuni problemi non erano ancora stati risolti:

1. come si definisce la velocità in un determinato istante
2. l'individuazione della retta tangente ad una curva
3. determinazione del massimo e del minimo di una funzione
4. calcolo della lunghezza della curva, delle aree delimitate da curve, delle superfici e dei volumi

3° passo: introduzione intuitiva al concetto di limite
L'idea è quella di presentare la "spaventosa" definizione rigorosa di limite il più tardi possibile o almeno solo dopo che nella mente degli allievi si è formata una minima idea di che cosa significhi calcolare il limite di una funzione.

Per introdurre intuitivamente il concetto di limite parto col proporre alla classe un esempio. Scrivo alla lavagna le seguenti divisioni

$$\frac{10}{0,1}=\frac{10}{\frac{1}{10}}=100 \qquad \frac{10}{0,01}=1000 \qquad \frac{10}{0,001}=10000$$

ricordo agli studenti che la divisione per 0 è impossibile e dialogicamente facciamo fare loro le dovute osservazioni: se il denominatore tende a zero, il valore della frazione aumenta; in matematica si suole dire che "*il limite di una frazione col denominatore che tende a zero è infinito*". Quindi pur continuando a dire che la divisione per zero è impossibile, abbiamo comunque affermato che la divisione per zero tende a infinito. Sinteticamente, anche se la scrittura $\frac{k}{0}$ non ha senso, si scrive $\lim_{x\to 0}\frac{k}{x}=\infty$

OSSERVAZIONE DIDATTICA: già da subito è bene sottolineare agli studenti che **∞ non è un numero ma solo un simbolo** che ci indica il comportamento di una funzione il cui valore diventa arbitrariamente grande, via via che la variabile indipendente si avvicina a qualche limite. Questa precisazione è importante per evitare che nello studente si creino **misconcezioni che lo portino anche a pensare che l'infinito sia una grandezza che si può paragonare o addirittura sommare o sottrarre ad altre grandezze finite**: scritture come $\infty+\infty$, o $\infty+1$ non hanno significato.

4° passo: introduzione alle definizioni rigorose di limite
non si daranno subito le definizioni di limite ma per si farà un'introduzione con l'uso di esempi:

1. per ogni caso si partirà dallo studio di funzioni scelte in maniera opportuna;
2. si chiederà agli studenti di determinare il domino, tracciare il grafico per via elementare, esaminare, aiutandosi con il grafico tracciato, **l'andamento dei valori assunti** da $f(x)$ quando ci si avvicina ai punti di accumulazione da destra e da sinistra, esaminare **l'andamento del grafico** della funzione quando ci si avvicina ai punti di accumulazione da destra e da sinistra;
3. dagli esempi considerati, si passerà alla formalizzazione del concetto di limite;
4. generalizzazione con la formulazione rigorosa della definizione di limite.

Le definizioni che verranno date, tutte seguendo questa metodologia appena descritta, in ordine di esecuzione, sono:

1. definizione di limite finito per x tendente ad un valore finito x_0
2. definizione di limite infinito per x tendente ad un valore finito x_0
3. definizione di limite finito per x tendente ad all'infinito
4. definizione di limite infinito per x tendente all'infinito

NOTA: esempi e definizioni saranno sempre affiancati da grafici ben fatti. Ritengo che l'aspetto grafico aiuti moltissimo nell'analisi e penso anche che la lettura del grafico aiuti a ragionare e riflettere.

OSSERVAZIONE DIDATTICA: le definizioni non devono essere "imparate a memoria"
Le numerose definizioni limite che verranno date, potrebbero spaventare gli studenti i quali già si trovano di fronte ad uno strano linguaggio. È importante che l'insegnante sottolinei che **tutte le altre definizioni che verranno date, conseguono dalla prima.** Capita bene la prima, ragionando si possono dedurre tutte le altre quindi NIENTE MEMORIA. Anzi l'insegnante, prima di dare la nuova definizione, potrebbe spronare gli alunni a scriverla, ovviamente sulla base della prima data.

Durante la spiegazione dei vari tipi di limiti si faranno diverse osservazioni e dove è possibile si evidenzieranno con numerosi esempi/esercizi:

OSSERVAZIONE: attività di laboratorio
Oltre a far vedere graficamente il comportamento di una funzione in un "punto critico", si potrebbe pensare di organizzare un'attività di laboratorio in cui si fanno costruire (con Derive) delle tabelle di valori che si avvicinano (per eccesso e per difetto) a quel punto e mostrare quali sono i valori assunti dalla funzione in corrispondenza di quei valori.

OSSERVAZIONE: sulla terminologia, simbologia e valore assoluto presenti nelle definizioni
Per ogni definizione, verranno fatte le osservazioni opportune a proposito della terminologia e della simbologia usate e dell'eventuale valore assoluto, precisando cosa vuol significare (esiste il limite destro, esiste il limite sinistro, la funzione divergente positivamente, la funzione divergente negativamente). Naturalmente si spenderà più tempo nel primo limite; negli altri si ripeteranno molte cose già viste nel primo.

OSSERVAZIONE: nel caso di limite finito per x tendente ad un valore finito x_0, dalla definizione si deduce che **il limite in un punto, è indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso;** verranno esaminanti alcuni casi e ciascuno verrà chiarito mediante degli esempi mirati:

- la funzione è definita in x_0, esiste il limite per $x \to x_0$ ed è uguale al valore $f(x_0)$ che la funzione assume in $x = x_0$;
- la funzione è definita in x_0 ed esiste il limite per $x \to x_0$ ma $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(c)$;
- la funzione è definita in x_0, ma non è possibile definire il limite per $x \to x_0$;
- la funzione non è definita in x_0, ma esiste il limite per $x \to x_0$

Analogamente nel caso di limite infinito per x tendente ad un valore finito x_0, si farà osservare che non ci occupiamo del comportamento della funzione nel punto x_0; spesso in questo punto la funzione non è definita.

OSSERVAZIONE: le definizioni di limite
A cosa servono le definizioni di limite? Non per calcolare il limite ma per verificare se un limite fornitoci, è corretto o meno.
Verranno proposti pochi esercizi di verifica del limite perché, spesso, le difficoltà incontrate dagli studenti derivano da problemi con l'uso delle disequazioni e del valore assoluto, più che da ostacoli dell'argomento *limite*.

OSSERVAZIONE: gli asintoti
Con il supporto di un disegno si darà la definizione di asintoto per poi passare a definire l'asintoto verticale e l'asintoto orizzontale.
Poi mediante un esempio si farà notare agli studenti che se una funzione non è definita in un punto, non necessariamente ha in quel punto un asintoto verticale.
Il grafico di una funzione può avere più asintoti verticali, anche infiniti come nel caso della funzione tangente: $f(x) = tgx$ ma al massimo due asintoti orizzontali quando i limiti per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$ sono entrambi finiti, ma diversi fra loro.

5° passo: definizione generale di limite e schema riassuntivo

Alla fine di questa trattazione si darà la definizione generale di limite; inoltre proporrei anche uno schema riassuntivo. Potrebbe essere un'occasione di recupero della teoria spiegata fino a questo momento ma nello stesso tempo un momento di verifica formativa orale che permette all'insegnante di comprendere se gli alunni stanno costantemente apprendendo il lavoro che si sta svolgendo. L'insegnante potrebbe compilare lo schema alla lavagna dopo aver fatto delle domande agli studenti o l'insegnante potrebbe chiamare a turno alcuni studenti alla lavagna per farlo compilare a loro.

6° passo: teoremi sui limiti
Gli studenti sono pronti per affrontare lo studio dei primi teoremi sui limiti.
I teoremi che verranno proposti sono tre:
I. Teorema di unicità del limite;
II. Teorema del confronto;
III. Teorema della permanenza del segno.

Per tutti verrà proposta anche la dimostrazione che non sarà complicata da comprendere se gli studenti avranno ben chiara la definizione di limite. Per tutti i tre teoremi, la dimostrazione avrà le basi nella definizione di limite, quindi il loro studio potrà essere considerato come un'ulteriore applicazione della definizione di limite.
La dimostrazione del teorema di unicità del limite si basa su un ragionamento per assurdo; tale tipo di ragionamento risulta di difficile comprensione da parte degli studenti. Quindi, prima di procedere con la dimostrazione, sarebbe opportuno portare qualche esempio molto semplice, preferibilmente tratto dall'esperienza comune, per far capire il meccanismo.
Come metodologia per la spiegazione di questi teoremi propongo prima che prima della spiegazione da parte dell'insegnante, vengano assegnati da leggere con attenzione per casa, dal libro. Questa metodologia avrà una duplice valenza: abituare gli studenti ad interpretare i libri di testo e per l'insegnante, poter spiegare in maniera dialogica. Infatti nella lezione successiva gli studenti potranno già esporre i propri dubbi e le difficoltà incontrare nella lettura, in modo che l'insegnante partendo da queste potrà spiegare le dimostrazioni dei teoremi.

Per il teorema del confronto potrebbe essere utile una migliore memorizzazione dello stesso raccontare agli studenti che tale teorema viene comunemente chiamato TEOREMA DEI DUE CARABINIERI; l'origine del nome è legato alla comune immagine di due carabinieri che stringono un carcerato ai lati: $g(x)$ è l'arrestato, tenuto da destra e da sinistra da due carabinieri $f(x)$ e $h(x)$. Se i due carabinieri si dirigono verso un luogo (per esempio, la prigione), l'arrestato pur non volendolo, non ha altra possibilità, essendo trattenuto sia da destra che da sinistra, di dirigersi verso il medesimo luogo.

Per approfondimento e per evitare che gli studenti considerino inutile lo studio di questi teoremi si proporranno degli esercizi di applicazione degli stessi.