CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE E CALCOLO DEI LIMITI

DESTINATARI: IV anno del liceo scientifico PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 615 del 27 settembre 1996** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 7.b** - *Limite e continuità di una funzione in una variabile reale* - del **Tema n. 7** – *Analisi infinitesimale*; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel primo quadrimestre.

PREREQUISITI:

- Conoscenze di base di logica: uso di quantificatori esistenziali e universali
- Conoscenza del piano cartesiano
- Conoscenza della geometria analitica
- Padronanza e consapevolezza nella risoluzione di equazioni e disequazioni (di vario tipo: razionali intere e fratte, logaritmiche esponenziali, goniometriche)
- Nozione di numero irrazionale e trascendente
- Nozioni di topologia (intervallo, intorno e punti di accumulazione)
- Conoscenza del concetto di funzione, di dominio e codominio di una funzione e della funzione inversa
- Funzioni reali di variabile reale
- Conoscenza della definizione di limite (in tutti i casi)
- Conoscenza della definizione di asintoto (in particolare di asintoto orizzontale e verticale)
- Conoscenza di base del software didattico Derive.

METODOLOGIE DIDATTICHE

I concetti vengono introdotti utilizzando un'interpretazione intuitiva; solo dopo che l'idea è stata assimilata si passa alla formalizzazione rigorosa.
Alla classe verranno proposti alcuni esercizi che verranno svolti con l'aiuto dell'insegnante; successivamente questi saranno commentati e da essi di dedurranno definizioni e teoremi.
Durante le lezioni si utilizzerà un approccio dialogico e frontale.
Gli esempi e gli esercizi, come anche la spiegazione teorica, verranno sistematicamente **affiancati da grafici** che possono aiutare molto gli studenti a chiarire concetti che potrebbero sembrare astratti.
A conclusione di ogni argomento si proporrà un buon numero di esercizi, risolti insieme in classe, in modo che siano momento immediato di sostegno e anche di recupero della teoria.
Verranno sistematicamente assegnati esercizi da svolgere a casa, scelti con difficoltà crescente; la lezione successiva verranno corretti quegli esercizi che hanno apportato più incertezze e difficoltà.

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO

FASE	Ore
• Accertamento dei prerequisiti • introduzione intuitiva al concetto di continuità di una funzione • definizione di funzione continua in un punto • definizione di funzione continua in un intervallo • esempi di funzioni continue	2

• teoremi sulle operazioni tra limiti finiti (somma/differenza, prodotto, quoziente, potenza n-esima, radice n-esima, elevamento a potenza) e tra funzioni continue (somma/differenza, prodotto, quoziente, inversa, composta) • forme indeterminate	2
• i limiti notevoli per la risoluzione delle forme indeterminate • gli asintoti e la loro ricerca • Teorema di Weierstrass	2
• Teorema dei valori intermedi • Teorema dell'esistenza degli zeri	2
• Definizione di punto di discontinuità (di prima specie, di seconda specie, di terza specie)	2
• Verifica sommativa	2
• Consegna e correzione della verifica sommativa	1
TOTALE	**13**

ovviamente a queste saranno da aggiungere le ore che verranno impiegate per fare numerevoli esercizi
almeno altre 10 ore di esercitazioni per un totale di circa 23 ore. Poiché le ore di matematica a settimana sono 5, l'unità didattica dovrebbe svolgersi in circa 4 settimane quindi in poco più di 1 mese.

OBIETTIVI SPECIFICI

<u>*Conoscenze*</u>

- Conoscere il concetto di funzione continua in un punto e in un intervallo
- Conoscere la definizione di punto di discontinuità
- Conoscere la continuità delle funzioni elementari
- Conoscere i teoremi sul calcolo dei limiti
- Conoscere le operazioni tra funzioni continue
- Conoscere il teorema della continuità delle funzioni inverse
- Conoscere le forme indeterminate
- Conoscere i limiti notevoli delle funzioni $\frac{senx}{x}$ per $x \to 0$ e $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ per $x \to \infty$
- Conoscere la definizione di asintoto obliquo
- Conoscere i teoremi principali sulle funzioni continue su un intervallo
    - Teorema di Weierstrass
    - Teorema dei valori intermedi,
    - Teorema dell'esistenza degli zeri
- Conoscere la differenza tra i tre tipi di punti di discontinuità

<u>*Abilità*</u>

- Saper dare la definizione di funzione continua in un punto ed in un intervallo.
- Saper stabilire, a partire da una funzione continua, la continuità della sua inversa
- Saper riconoscere i limiti fondamentali

- Saper eseguire operazioni sui limiti
- Saper individuare le varie forme indeterminate o di indecisione
- Saper applicare i limiti fondamentali nella risoluzione di limiti più complessi
- Saper applicare con correttezza e consapevolezza le varie tecniche risolutive al fine di rimuovere le forma indeterminate per poter effettuare il calcolo del limite
- Saper riconoscere quando una funzione riporta degli asintoti e determinarne l'equazione
- Saper interpretare graficamente il significato dei teoremi fondamentali delle funzioni continue
- Saper riconoscere e rappresentare graficamente i punti di discontinuità di una funzione, in particolare saper classificare: i punti di discontinuità eliminabile, i punti di discontinuità di prima specie e di seconda specie

Contenuti

- introduzione intuitiva al concetto di continuità di una funzione
- definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo
- esempi di funzioni continue
- teoremi sulle operazioni tra limiti finiti (somma/differenza, prodotto, quoziente, potenza n-esima, radice n-esima, elevamento a potenza) e tra funzioni continue (somma/differenza, prodotto, quoziente, inversa, composta)
- forme indeterminate
- i limiti notevoli ($\frac{senx}{x}$ per $x \to 0$ e $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ per $x \to \infty$) per la risoluzione delle forme indeterminate
- gli asintoti e la loro ricerca
- teoremi sulle funzioni continue
  - Teorema di Weierstrass
  - Teorema dei valori intermedi
  - Teorema dell'esistenza degli zeri
- Definizione di punto di discontinuità (di prima specie, di seconda specie, di terza specie)

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1° passo: introduzione intuitiva al concetto di continuità (dialogicamente)

Si potrebbe iniziare a parlare di continuità mediante un'idea intuitiva derivante dal significato in italiano di "continuità". Discutendo con gli studenti si può arrivare a dire che una funzione è continua quando è possibile tracciare il suo grafico senza staccare la penna dal foglio. Ma non mi soffermerei molto su questo aspetto perché potrebbe creare delle misconcezioni. Alcuni esempi di grafici di funzioni continue e non continue possono, a mio avviso, essere molto più utili.

2° passo: relazione tra limiti e continuità (dialogicamente/esempio)

Avendo come prerequisito lo studio dei limiti, possiamo rendere più rigoroso il concetto intuitivo di funzione continua: riprendendo una osservazione fatta sulla definizione di limite per $x \to x_0$ secondo cui il limite in un punto, è indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso, si passerà a mettere in evidenza come il concetto di continuità, di cui ci occupiamo ora, vuole invece cercare di mettere in relazione il limite a cui tende la funzione per $x \to x_0$ con il valore della funzione nel punto.

Dopo questa breve introduzione, prima di dare la definizione di continuità in un punto, proporrei un esempio mediante il quale gli studenti possono autonomamente e visibilmente capire la differenza tra funzione continua in un punto e funzione discontinua. Come esempio verrà proposto lo studio di due funzioni analoghe con l'unica differenza che una delle due ha un punto di discontinuità rispetto all'altra e questo sarà messo in evidenza oltre che con la rappresentazione grafica, con il calcolo dei limiti.

3° passo: definizione di funzione continua in un punto
A questo punto viene data la definizione rigorosa di continuità in un punto e si preciserà:

1. se in un punto non vale la definizione data, tale punto si dirà punto di discontinuità o punto singolare
2. quali sono le tre condizioni da verificare per stabilire se una funzione è continua in un punto x_0
3. la continuità a sinistra e a destra del punto x_0 (può capitare che, pur potendo calcolare $f(x_0)$, non sia possibile calcolare il valore del limite per $x \to x_0$ ma si possa valutare tale limite in un intorno solo sinistro o solo destro di x_0).

4° passo: definizione di funzione continua in un intervallo
Prima è stata data una definizione puntuale di continuità ma facciamo osservare agli studenti che è anche possibile parlare di continuità in un intervallo: diamo la definizione.

5° passo: esempi di funzioni continue (dialogicamente/esempi-momento di recupero)
Potrebbe essere utile non fare un elenco delle principali funzioni continue ma introdurre l'argomento agli allievi se riescono a fornire qualche esempio di funzione continua, tra quelle studiate.
L'insegnante riporta sulla lavagna le risposte date e poi verranno studiate mediante la rappresentazione grafica di ciascuna funzione e il calcolo dei limiti opportuni per la verifica della continuità (funzione costante, funzione $f(x) = x$, funzioni goniometriche, funzione esponenziale, funzione logaritmica).
Questo potrebbe essere considerato un <u>momento di recupero e ripasso</u> di concetti precedentemente studiati.

6° passo: teoremi sulle operazioni tra limiti finiti (dialogicamente/esempi)
Introduciamo l'argomento sottolineando che i teoremi che ci accingiamo ad enunciare sono validi sia per x che tende a un valore finito, x_0, sia a $+\infty$ o $-\infty$ ma <u>il valore del limite è sempre un numero reale.</u> Per questi teoremi daremo solo l'enunciato omettendone la dimostrazione.

Introduciamo i teoremi sui limiti partendo da dei semplici <u>esempi</u> e in maniera <u>dialogica</u>, cerchiamo di arrivare a formalizzare il teorema. <u>Parallelamente alle operazioni sui limiti, si faranno osservazioni sulla continuità</u>. Dopo di che per ciascuno saranno proposti degli esercizi di applicazione della teoria appena spiegata.
- Diamo agli studenti due funzioni e rispettivamente due limiti; chiediamo di calcolare la funzione somma e il limite di quest'ultima. Dopo le dovute osservazioni si enuncerà il **teorema sul limite della somma/della differenza algebrica di due funzioni.**
In questo caso si farà notare che la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua.
- Con un esempio analogo o con lo stesso svolto per arrivare al teorema della somma/differenza, considerando la funzione prodotto cioè $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ si arriva a formalizzare il **teorema sul limite del prodotto**; si farà osservare il limite del prodotto di una costante (diversa da zero) per una

funzione. Anche in questo caso si farà notare che il prodotto di due funzioni continue (in particolare il prodotto di una costante per una funzione continua) è una funzione continua.
- Ancora analogamente a quanto fatto per i teoremi precedenti, con un esempio analogo o utilizzando sempre quello, considerando la funzione quoziente cioè $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ si arriva a formalizzare il **teorema sul limite del quoziente**; si faranno osservazioni sulla funzione $\frac{1}{f(x)}$, reciproca di $f(x)$.

Anche in questo caso si farà notare che il quoziente di due funzioni continue $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ è continua nel punto x_0, se $g(x_0)\neq 0$ e in particolare si darà il teorema di continuità della funzione inversa.
- Si procederà con la spiegazione del
teorema sul limite della potenza n-esima di una funzione,
teorema sul limite della radice n-esima di una funzione,
teorema sull'elevamento a potenza di un limite,
teorema sul limite delle funzioni composte (dal quale si farà un particolare riferimento alla continuità enunciando il teorema sulla continuità delle funzioni inverse)
i quali saranno tutti supportati da degli esempi chiarificatori della teoria.

7° passo: Quando il valore del limite è ∞ cosa succede? (dialogicamente/compilazione scheda riassuntiva)

Abbiamo già incontrato degli esempi del tipo $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, ma cosa possiamo dire dell'espressione $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+5+x\right)$? Si possono ancora applicare i teoremi ora visti per le funzioni i cui limiti sono infiniti? E qual è il valore del limite?

Il problema sta nel fatto che in questi casi, dobbiamo eseguire delle operazioni fra numeri finiti e simboli di infinito e non sappiamo come comportarci.
Possiamo allora introdurre un formalismo aritmetico per i simboli di $+\infty$ e $-\infty$ giustificato dal fatto che per esso rimangano validi i teoremi precedenti.

A questo punto sarà utile proporre agli studenti una scheda che riassuma tutto ciò che è stato detto nei vari teoremi. Potrebbe essere una tabella non completa in modo che gli studenti possano terminare di compilarla. Nella compilazione gli alunni si accorgeranno che gli si presentano delle forme di limite che non rientrano in quelle viste.
Questa sarà l'occasione per introdurre le forme indeterminate (o forme di indecisione)

$$(\pm\infty)+(\mp\infty) \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0$$

per le quali non è possibile stabilire a priori quanto valga, poiché non esistono teoremi che permettano di calcolarli direttamente, ma è necessario applicare trasformazioni anche notevoli per arrivare al risultato. Impareremo a risolvere queste forme indeterminate nella prossima lezione.

8° passo: i limiti notevoli per la risoluzione delle forme indeterminate (frontale/esercitazioni)
Alcuni limiti di funzione si presentano sotto forma indeterminata; per la risoluzione di molte forme indeterminate si ricorre all'utilizzo dei cosiddetti limiti notevoli (casi particolari di forme

indeterminate). Spiegherò agli allievi due limiti notevoli $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1, \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Del primo, forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ si proporrà il calcolo, quindi la dimostrazione; mentre il secondo non lo dimostriamo ma ci limitiamo a ricordare che è una forma indeterminata del tipo 1^∞ e che la lettera e, che prende il nome di *numero di Nepero*, dal matematico scozzese John Napier, è un numero irrazionale, trascendente e il suo valore approssimato per difetto è 2,71828182845. Per rendere più chiaro il significato si può esaminare il grafico della funzione $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ che tende, per $x \to \infty$, alla retta di equazione $y = e$.
La spiegazione sarà alternata da numerosi esercizi di applicazione di questi limiti notevoli.
Tutte le altre forme indeterminate saranno analizzate mediante esercizi.

9° passo: gli asintoti e la loro ricerca
Il concetto di asintoto orizzontale e verticale è un prerequisito, essendo già stato affrontato nell'unità didattica sui limiti. Ora che gli studenti hanno imparato ad operare con i limiti, si può riprendere quel concetto per spiegare come si effettua la ricerca degli asintoti.
Prima di fare ciò chiederei agli studenti farei riflettere gli allievi chiedendo: "abbiamo già parlato di asintoti verticali e orizzontale ma esistono gli ASINTOTI OBLIQUI?"
Diamo la definizione di asintoto obliquo osservando che gli asintoti obliqui possono aversi solo nel caso di funzioni definite in intervalli illimitati.
Seguirà subito un esempio da supporto alla teoria appena spiegata.
È bene sottolineare che la ricerca degli asintoti nello studio di una funzione deve essere fatta nel seguente ordine: asintoto verticale, orizzontale, obliquo.

10° passo: teoremi sulle funzioni continue
I teoremi possono sembrare un'insieme di simboli e parole senza senso ma i grafici, come in questo caso, possono aiutare molto la comprensione e la memorizzazione del teorema.
Enunciamo, senza dimostrare, alcuni teoremi che esprimono proprietà importanti di cui godono le funzioni continue e ne illustriamo graficamente le conseguenze.

TEOREMA DI WEIERSTRASS: se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$, allora assume in esso un valore massimo M e un valore minimo m (assoluti).

I casi particolari del teorema di Weierstrass si possono far dedurre dialogicamente dagli studenti stessi, mediante il supporto grafico:
Funzione crescente nell'intervallo, massimo e minimo negli estremi.
Funzione decrescente nell'intervallo, massimo e minimo negli estremi.
Funzione prima crescente e poi decrescente nell'intervallo, massimo all'interno dell'intervallo e minimo in un estremo
Funzione costituita da tratti crescenti e decrescenti nell'intervallo, massimo e minimo interni all'intervallo.

Sempre per il teorema di Weierstrass, sarebbe utile mostrare alcuni controesempi per far osservare ai ragazzi che se alcune ipotesi del teorema non sono valide, la tesi non è più valida.

TEOREMA DEI VALORI INTEMEDI: se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I = [a,b]$, allora assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo assoluti.
TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI: se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $I = [a,b]$ e se in due punti x_1 e x_2 assume valori di segno opposto, allora essa si annulla in almeno un punto interno all'intervallo $]x_1; x_2[$. Cioè esiste almeno un punto $c \in]x_1; x_2[$ tale che $f(c) = 0$.
NOTA: forse non è il caso di scrivere l'enunciato all'esame

11° passo: punti di discontinuità (dialogicamente mediante esempi)
Ora che gli studenti hanno preso dimestichezza con il calcolo dei limiti e sono in grado di calcolare anche quelli che si presentano sotto forme indeterminate, possiamo riprendere il concetto di punto di discontinuità che avevamo accennato.
Introdurrei ciascuna definizioni dei tre tipi di punti di discontinuità con un esempio.
Per i **punti di discontinuità di prima specie** si analizzerà la funzione $y = E(x)$, parte intera di x (Funzione di Legendre) chiedendo agli studenti di calcolare il limite per x che tende a 2 da destra e da sinistra, facciamo osservare che i due limiti sono diversi e poi si procederà a dare la definizione e il significato di salto della funzione.

Si farà osservare che nell'esempio fatto i punti <u>di discontinuità di prima specie sono infiniti</u> e si procederà a dare qualche altro esempio.

Per **i punti di discontinuità di seconda specie**, proporremo agli studenti l'analisi del grafico della funzione tgx e facendo calcolare il limite per x che tende a $\frac{\pi}{2}$ da destra e da sinistra; facciamo osservare che i limiti sono infiniti (nella definizione si richiede solo che "almeno uno dei due limiti" si infinito o che non esista) e poi procediamo a dare la definizione di punto di continuità di seconda specie.

Anche in questo caso si farà osservare che nell'esempio fatto <u>i punti di discontinuità di seconda specie sono infiniti</u> e si procederà a dare qualche altro esempio.

Per i punti di discontinuità di terza specie si chiederà agli studenti di disegnare il grafico di una funzione scelta opportunamente (ad esempio $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$) e dopo alcune considerazioni si passerà a dare la definizione di punto di continuità di terza specie detto punto di **discontinuità eliminabile** nel senso che se la funzione non è definita in x_0, è possibile estendere il suo campo di esistenza a tale punto, ponendo $f(x_0) = l$, rendendo in tal modo la funzione continua. Ovviamente la funzione che si ottiene non è quella originaria ma differisce per $x = x_0$.
Alla luce della definizione si riguarderà l'esempio da cui si era partiti e poi si proporranno altri esempi.