Unità didattica: Grafici deducibili

Destinatari: Allievi di una quarta liceo scientifico PNI e tale ud è inserita nello studio delle funzioni reali di variabile reale.

Programmi ministeriali del PNI: Dal Tema n° 3 "funzioni ed equazioni": si dice di saper operare con somma, differenza, prodotto etc. di funzioni. Dal Tema n° 7 "analisi infinitesimale" si dice di: abituare gli studenti all'esame di grafici di semplici funzioni e alla deduzione di informazioni dallo studio di un andamento grafico.
Per quanto riguarda l'**UMI** si afferma di abituare a studiare ed interpretare i grafici di funzioni già nel primo biennio. Come conoscenze si richiedono quella delle "funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica e le funzioni costanti". Si suggerisce lo studio delle funzioni lineari e quadratiche tramite l'osservazione del cambiamento dei loro grafici per effetto di trasformazioni geometriche elementari (traslazioni, simmetrie, …). Si consiglia l'uso di software adeguati per acquisire le competenze relative alla formalizzazione e rappresentazione di leggi e relazioni.

Prerequisiti

✓Conoscenza degli elementi di base della geometria sintetica
✓Conoscenza degli elementi di base del calcolo algebrico
✓Conoscenza degli elementi fondamentali del piano cartesiano;
✓Conoscenza dell'insieme dei numeri reali, delle operazioni in esso definite e delle relative proprietà
✓Concetto di funzione, dominio e codominio di una funzione, di grafico di una funzione e di variabile dipendente ed indipendente;
✓Definizione di funzioni pari e dispari e relative simmetrie;
✓Definizione di funzione crescente e decrescente (funzioni monotòne);
✓Funzioni polinomiali, funzioni razionali e irrazionali, funzione segno, funzione valore assoluto, funzione radice, funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni trigonometriche;
✓Concetto di funzione inversa e di funzione composta;
✓Conoscenza delle trasformazioni geometriche sia da un punto di vista sintetico che analitico: invarianti di una trasformazione; isometrie (traslazioni, rotazioni, simmetrie) e omotetie; trasformazioni composte (isometrie con isometrie, isometrie con omotetie → similitudini); le coordinate di punti corrispondenti, ossia la descrizione analitica di una trasformazione), dilatazione e compressione (affinità);
✓Conoscenza minime del software didattico Derive.

METODOLOGIE DIDATTICHE:

1. Le lezioni sono condotte seguendo una metodologia mista di tipo frontale e di tipo interattivo, cioè caratterizzata da un'impostazione in chiave problematica o in forma dialogica con il gruppo classe intorno a quesiti o problemi proposti dal docente.
2. Sono previste attività e/o esercitazioni guidate sia di gruppo sia individuali nonché attività didattiche in laboratorio (Derive soprattutto).

Materiali e strumenti: Lavagna e gesso; Quaderno, matita, riga e compasso; Libro di testo; Calcolatrice scientifica; Software didattico: Cabrì Géomètre e Derive.

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze

1)Conoscere le principali proprietà delle funzioni elementari
2)Conoscere i concetti geometrici necessari a tracciare il grafico delle funzioni: $y = f(-x)$; $y = f(|x|)$; $y = -f(x)$; $y = |f(x)|$; $y = |f(|x|)|$; $y = f(x-c)$; $y = f(x)+c$;
$y = \beta + f(x-\alpha)$; $y = af(x)$; $y = f(ax)$
3)Conoscere come si costruisce il grafico della somma, della differenza, del prodotto e del quoziente di due funzioni;

4)Dal grafico della funzione *f*(*x*) conoscere come si costruisce il grafico di alcune delle più semplici funzioni composte ovvero funzione radice $\sqrt{f(x)}$, reciproca $\frac{1}{f(x)}$, esponenziale $e^{f(x)}$ e logaritmo $\log_e(f(x))$.

Abilità

1)Saper riconoscere i grafici delle funzioni elementari

2)Saper dedurre dai grafici delle funzioni elementari i grafici di somme, differenze, prodotti e quozienti e funzioni composte

3)Saper tracciare i grafici deducibili

$y = f(-x);\ y = f(|x|);\ y = -f(x);\ y = |f(x)|;\ y = |f(|x|)|;\ y = f(x-c);\ y = f(x)+c;$

$y = \beta + f(x-\alpha);\ \ y = af(x);\ y = f(ax)$

da quello della funzione *f(x)*.

CONTENUTI

- Breve ripasso sul concetto di funzione reale di variabile reale, di Dominio, codominio, e grafico di una funzione e di dominio e codominio di alcune funzioni elementari
- Grafici deducibili da quello di *f*.
- Grafico della somma e differenza di due funzioni
- Grafico del prodotto e del quoziente
- Grafico della funzione composta:1)Grafico della radice, 2) Grafico della reciproca, 3)Grafico del logaritmo ed esponenziale
- Applicazioni interdisciplinari

Tempi dell'intervento didattico: Per svolgere l'unità didattica si prevedono i seguenti tempi:

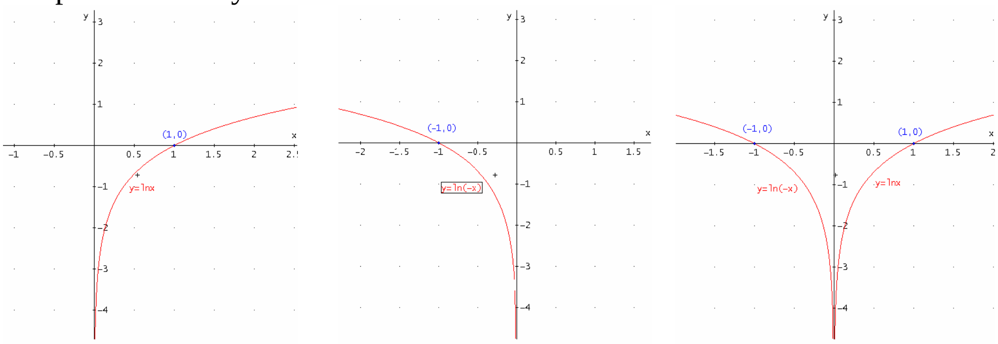
o Ripasso e accertamento dei prerequisiti	1h
o Sviluppo dei contenuti dell'unità didattica(comprende anche esercizi)	9h
o Attività di laboratorio informatico	2h
o Verifica sommativa	2h
o Consegna e correzioni verifiche	1h

Per un totale di 15h (tre settimane). La previsione è da ritenersi elastica, in quanto si deve tenere conto delle necessità degli studenti.

Sviluppo dei contenuti: Si inizierà lo sviluppo dei contenuti andando a riprendere i concetti già visti nei precedenti anni scolastici di funzione reale di variabile reale, di Dominio, condominio e grafico di una funzione, di dominio e codominio di alcune funzioni elementari che gli studenti dovrebbero già conoscere bene quali ad esempio il dominio e condominio di funzioni polinomiali, funzioni razionali, funzioni irrazionali, funzioni goniometriche (sin*x*, cos*x* tan*x*), funzione esponenziale e logaritmica funzione segno, funzione valore assoluto e funzione parte intera. Dopodiché sarà possibile introdurre lo studio dei grafici deducibili a partire da alcune funzioni elementari note. Lo scopo sarà il seguente: dato nel piano cartesiano *Oxy* il grafico della funzione $y = f(x)$, rappresentativo della funzione *f*, e sia D_f il suo dominio, tracciare, con semplici considerazioni geometriche, il grafico delle seguenti funzioni elementari (nel caso in cui la composizione è possibile):

a. $y = f(-x)$, ***b.*** $y = f(|x|)$, $y = -f(x)$, ***c.*** $y = |f(x)|$, *d.* $y = |f(|x|)|$, ***e.*** $y = f(x)+c$, ***f.*** $y = f(x-c)$, ***h.*** $y = f(ax)$, ***i.*** $y = af(x)$, ***m.*** $y = \beta + f(x-\alpha)$. Nel trattare questo argomento, si utilizzerà il software didattico Derive, che ci sarà di grande aiuto. Gli alunni dopo aver tracciato il grafico della funzione in questione, saranno condotti a scoprire proprietà delle funzioni prese in esame, dando vita così a lezioni dialogiche.

Ad esempio: **nel caso a.** si può pensare di considerare la funzione y=f(x)=*ln x* da cui f(-x)=ln(-x). Si possono proporre i grafici con derive e far notare che i punti della curva $y = \log_e(-x)$ si ottengono da quelli della y=lnx cambiando x con $-x$ e lasciando inalterata y. Le due curve sono perciò simmetriche rispetto all'asse y.



Si possono proporre altri esempi ma alla fine occorre generalizzare: data una funzione $y=f(x)$, il grafico della funzione $g(x)=f(-x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ tramite una simmetria assiale rispetto all'asse delle ordinate.

Nota: Gli studenti hanno modo di rivedere una trasformazione del piano: la simmetria assiale (con asse l'asse y). Ho pensato di proporre come esempio la funzione logaritmo in quanto essa viene trattata al quarto anno. In questo modo gli studenti possono acquisire maggiore dimestichezza con questa funzione.

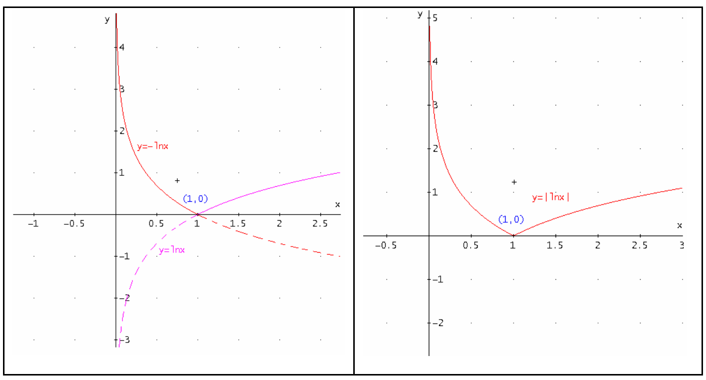
Così anche **per il punto b.** si può pensare di considerare la funzione y=f(x)=lnx e considerare la funzione f(|x|)=ln|x|. Ricordare, dalla definizione di funzione valore assoluto che $\log_e|x| = \begin{cases} \log_e x & \forall x \in R_0^{\ +} \\ \log_e(-x) & \forall x \in R_0^{\ -} \end{cases}$ da cui si ricava che il grafico è il terzo visto sopra, ovvero è l'unione dei grafici y=lnx e y=ln(-x). Quindi in generale si deve sottolineare che il grafico di $g(x)= f(|x|)$ si ottiene da quello di $f(x)$ osservando che:

$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & se\ x \geq 0 \\ f(-x) & se\ x < 0 \end{cases}$$

Perciò il grafico di $g(x)$ è il simmetrico di $f(x)$ rispetto all'asse y per $x<0$ e coincide con $f(x)$ per $x\geq 0$. (Si può osservare come caso particolare la funzione y=cosx da cui f(|x|)=cos|x|, essendo il coseno una funzione pari si ha che cos(-x)=cosx da cui si ha che il grafico di cos|x| coincide con quello di cosx).

Per il caso c. si può sempre fare l'esempio del logaritmo ma si deve generalizzare affermando che, data una funzione $y=f(x)$, il grafico della funzione $g(x)=-f(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ tramite una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse. Come ulteriore esempio si può proporre quello della funzione seno:f(x)=sinx →g(x)=-f(x)=-sinx=sin(-x) perché la funzione seno è dispari. Poiché tale relazione la si ottiene dalla funzione $y = sen(x)$ cambiando x in $-x$, il grafico di y=-sinx=sin(-x), è la curva simmetrica rispetto all'asse y di $y = sen(x)$ (ritornando al caso **a.).**

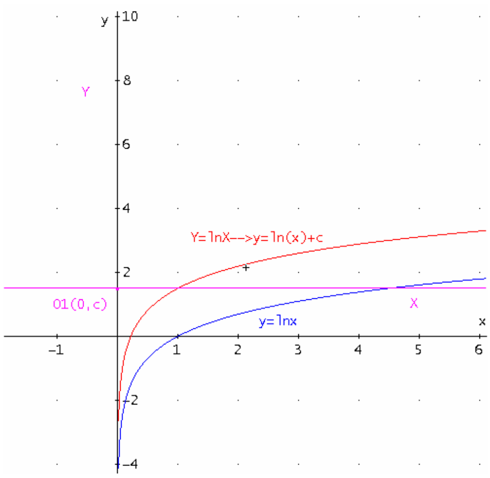
Per il caso d. si può proporre ancora una volta l'utilizzo della funzione logaritmo ma si deve Sottolineare che, in generale, il grafico della funzione $g(x)=|f(x)|$ si ottiene da quello di $f(x)$ tramite una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse di quelle parti di grafico che stanno sotto tale asse e lasciando invariate le altre.



Per il caso e. si può sempre sfruttare la definizione di funzione valore assoluto applicata al caso del logaritmo, seguendo le considerazioni fatte sopra.
Per il caso f. si può sempre partire dalla funzione logaritmo e indagare con derive come cambia il grafico della funzione logaritmo se aggiungiamo alla funzione una costante:è chiaro che bisognerà riprendere il concetto di traslazione.
Siano $f(x)=\log_e x$ e $g(x)=f(x)+c=\log_e(x)+c$ ove $c \in R$. Per disegnare tale grafico, bisogna prima considerare la seguente traslazione

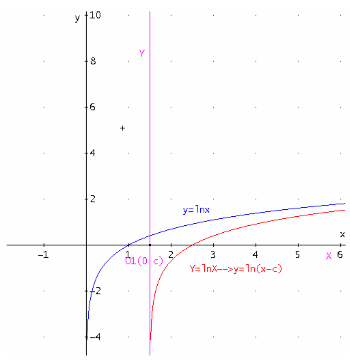
$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - c \end{cases} \quad \text{e} \quad O_1 = (0, c)$$

Nel sistema XO_1Y traslato rispetto al sistema xOy, la curva data ha equazione $Y = \log_e X$.
Dunque il grafico di $y=\log_e(x)+c$ può essere tracciato come il grafico di $y=\log_e x$ nel nuovo sistema ausiliario XO_1Y

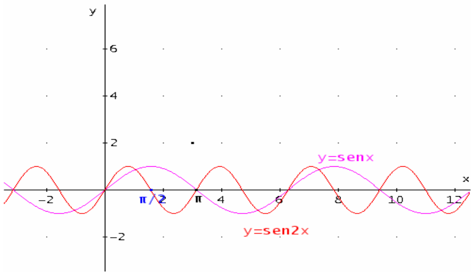


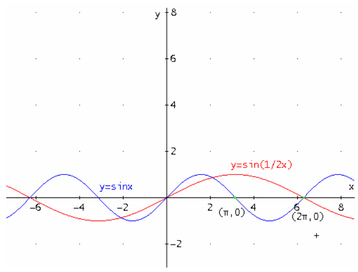
Allora il grafico della funzione $g(x)=\log_e(x)+c$ si ottiene da quello della *f*(*x*) mediante una traslazione di ampiezza c nella direzione dell'asse delle y del grafico della *f*(*x*). Con Derive potremmo far vedere come cambia il grafico della funzione $g(x)=\log_e(x)+c$ facendo variare *c* ad esempio tra *-5 e 5* di passo 1. Possiamo Utilizzare per il nostro scopo il comando di: VECTOR($\log_e(x)+c$,c,-5,5,1).
Perciò in definitiva *c* fa traslare verso l'alto o verso il basso (cioè lungo l'asse *y*) (a seconda che *c>0* o *c<0*) il grafico di *y*=*f*(*x*) di un ampiezza pari a *c*.
Nel punto g. invece è quest'altra la traslazione che si deve considerare (sempre riferita alla funzione logaritmo y=ln(x-c)): $\begin{cases} X = x - c \\ Y = y \end{cases}$ e $O_1 = (c, 0)$

Nel sistema XO_1Y traslato rispetto al sistema xOy, la curva data ha equazione $Y = \log_e X$.
Dunque il grafico di $y=\log_e(x-c)$ può essere tracciato come il grafico di $y=\log_e x$ nel nuovo sistema ausiliario XO_1Y

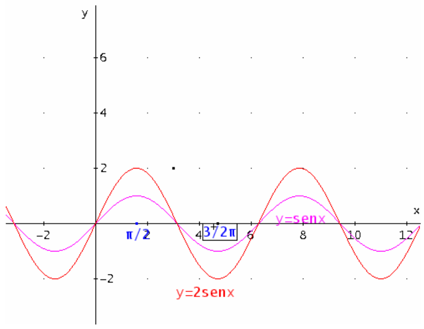


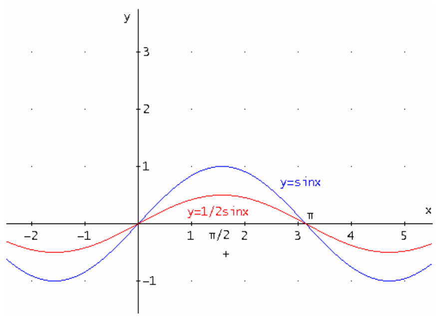
Allora il grafico della funzione $g(x)=\log_e(x-c)$ si ottiene da quello della f(x) mediante una traslazione di ampiezza c nella direzione dell'asse delle x del grafico della f(x). (Anche in questo caso, Derive ci può aiutare molto. in definitiva *c* fa traslare verso destra o verso sinistra (a seconda che *c>0* o *c<0*) il grafico di *y=f*(*x*) di un'ampiezza pari a *c*.
Per **il punto h.** si può sempre proporre un'attività con derive in cui si può considerare la funzione y=sin(ax). Gli studenti devono osservare che se $a<1$ si ha una dilatazione orizzontale, se $a>1$ una contrazione orizzontale.





In particolare si deve osservare anche che cambia il periodo della funzione seno.
Per **il caso i.** utilizzando sempre la funzione seno e considerando la funzione y=a·sinx si deve osservare che: si ha una contrazione verticale se $a<1$, una dilatazione verticale se $a>1$.





Infine l'ultimo caso: **caso m**. la funzione che ci può venire ancora in aiuto è la funzione seno: così dobbiamo tracciare il grafico della funzione y=β+sin(x-α). A tale scopo dobbiamo considerare la seguente traslazione: $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$ $\quad e \quad O_1 = (\alpha, \beta)$.
Come applicazione si può pensare di considerare le equazione oraria di un punto che si muove di moto armonico essendo essa una funzione sinusoidale (s=a·sin(ωt+φ)).
Si può passare poi a trattare l'argomento relativo al:
- grafico **della Somma e della differenza di due funzioni**: (per questo argomento non andremo molto nei dettagli visto il poco tempo a disposizione per esame di stato)
Date due funzioni *f* e *g* definite su uno stesso dominio *D* si può considerare sia la loro somma che la loro differenza: somma $f+g: x \to f(x)+g(x)$; differenza $f-g: x \to f(x)-g(x)$
Come si ottengono i grafici della somma e della differenza conoscendo i grafici delle funzioni *f* e *g*? È necessario disegnare le due funzioni *f* e *g* in uno stesso piano cartesiano, successivamente si deve addizionare (o sottrarre), con riga e compasso, in corrispondenza di ogni valore di *x*, i segmenti che rappresentano *f*(*x*) e *g*(*x*).
- Grafico del prodotto di due funzioni: Date due funzioni *f* e *g* definite su uno stesso dominio *D* si può considerare il loro prodotto: $p = f \cdot g: x \to f(x)\cdot g(x)$. Il grafico della funzione prodotto lo si ottiene direttamente da quelli della funzione f(x) e g(x) disegnandoli su uno stesso piano cartesiano e costruendo in corrispondenza di ogni valore $x_0 \in D$ l'ordinata del prodotto $f(x_0)\cdot g(x_0)$.
<u>Osservazione didattica:</u> Per la costruzione del grafico prodotto è bene sottolineare con gli studenti che essi tengano conto delle seguenti osservazioni:
1. Se i due fattori f(x) e g(x) sono concordi, il prodotto è positivo, altrimenti è negativo;
2. Se uno dei due fattori è 1, il prodotto coincide con l'altro fattore e se è –1, il prodotto coincide con l'opposto dell'altro fattore;

3. se uno dei due fattori è in modulo maggiore di 1 (minore di 1), il prodotto risulta una dilatazione (contrazione) dell'altro fattore;
4. Se uno dei due fattori è 0, il prodotto è 0, qualunque sia l'altro fattore.

- Grafico del quoziente: Date due funzioni f e g definite su uno stesso dominio D si può considerare il loro quoziente: $q=\frac{f}{g}: x \to \frac{f(x)}{g(x)}$. Il grafico della funzione quoziente lo si ottiene direttamente da quelli della funzione f(x) e g(x), disegnandoli contemporaneamente nello stesso piano cartesiano.

Osservazione didattica: Anche per la costruzione del grafico quoziente è bene sottolineare con gli studenti che essi tengano conto delle seguenti osservazioni:

1. Se i due fattori f(x) e g(x) sono concordi, il quoziente è positivo, altrimenti è negativo;
2. Se la funzione al denominatore è 1, il quoziente coincide con il numeratore;
3. se il denominatore è in modulo maggiore di 1 (minore di 1), la funzione quoziente si dilata (si contrae);
4. se le due funzioni sono uguali, la funzione quoziente è l'unità;
5. se la funzione al numeratore è 0 la funzione quoziente è 0.

- Grafico della funzione composta:

Osservazione didattica: E' bene dapprima ricordare agli studenti che cosa si intenda per composizione di funzioni.

Conoscendo il grafico della funzione y= f(x) facciamo vedere come è possibile determinare il grafico di alcune delle più semplici funzioni composte (funzione radice, funzione reciproca, funzione logaritmo e funzione esponenziale).

1. ***GRAFICO DELLA RADICE*** $\sqrt{f(x)}$

2. ***GRAFICO DELLA RECIPROCA*** $\frac{1}{f(x)}$

Osservazione didattica: si faccia notare subito agli studenti che nei punti in cui la funzione *y=f(x)* interseca l'asse delle ascisse, la funzione reciproca non è definita.

3. ***GRAFICO DELLA ESPONENZIALE*** $e^{f(x)}$

Osservazione didattica**:** si faccia notare agli studenti che la funzione $e^{f(x)}$ dove esiste è sempre positiva e che quando la funzione $f(x) \to -\infty$ $e^{f(x)} \to 0$, quando la funzione $f(x) \to +\infty$ anche $e^{f(x)} \to +\infty$. Infine se *f(x) < 0* allora $0<e^{f(x)}<1$; se $f(x) \geq 0$ allora $e^{f(x)} \geq 1$.

4. ***GRAFICO DEL LOGARITMO*** $\log f(x)$

VERIFICA SOMMATIVA: Per la verifica sommativa si possono proporre problemi:

- Dopo aver indicato il dominio e il codominio della funzione y=|f(x)| (ove f(x) è una opportuna funzione), disegnarne il grafico, indicando le eventuali simmetrie facendo le opportune considerazioni;
- Tracciare il grafico della funzione y=a+f(x-c)
- Ricordando il grafico della funzione f(x) disegnare il grafico di g(x)=log(f(x)); dedurre poi da questo il grafico di h(x)=a+log(f(x)).
- Ricordando i grafici delle funzioni f(x) e g(x) disegnare il grafico della funzione h(x)=f(x)/g(x) indicandone anche dominio e codominio. Tracciare poi il grafico delle funzioni seguenti:

  - $f(x)+2$
  - $f(-x)$
  - $3 \cdot f(x)$
  - $f(x)+g(x)$