Titolo: **Successioni; Progressioni geometriche e aritmetiche**
Specializzanda: **Serena Bezzan**

Classe destinataria

L'unità didattica è rivolta ad una classe terza di un Liceo Scientifico ad indirizzo PNI.

Inquadramento nei programmi ministeriali

Programmi PNI. **TEMA 2**: "Insiemi numerici e strutture"
2b. (Principio di Induzione) Progressioni aritmetiche e geometriche. Successioni numeriche.
Questa unità didattica è prevista in classe terza.

Prerequisiti

- Operazioni, ordinamento e loro proprietà nell'insieme dei numeri naturali e interi
- Funzioni reali
- Equazioni di primo e di secondo grado

Obiettivi specifici (conoscenze-abilità)

	Conoscenze	**Competenze**
Definizione di successione numerica	- conoscere il concetto di successione numerica	- saper definire una successione per ricorrenza o in modo analitico
Progressioni aritmetiche	- Conoscere la definizione di progressione aritmetica - Conoscere la formula per il calcolo del termine ennesimo di una progressione aritmetica - Conoscere la legge per calcolare la somma di termini consecutivi	- Saper valutare se una successione è una progressione aritmetica - Saper ricavare le formule che legano due termini qualsiasi della progressione - Saper dimostrare la formula per calcolare la somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica
Progressioni geometriche	- Conoscere la definizione di progressione geometrica - Conoscere la legge che lega due termini qualsiasi della progressione geometrica - Conoscere le formule per calcolare il prodotto e la somma di termini consecutivi	- Saper valutare se una successione è una progressione geometrica - Saper ricavare le formule che legano due termini qualsiasi della progressione - Saper dimostrare le formule per calcolare il prodotto e la somma di termini consecutivi di una progressione geometrica
Applicazioni del concetto di successione	**Obiettivi di capacità**	
	- saper applicare il concetto di progressione ad alcune situazioni economiche e fisiche.	

Tempi dell'intervento

- Ripasso e accertamento dei prerequisiti 2h
- Successioni 1h
- Progressioni aritmetiche 2h
- Calcolo del termine ennesimo 1,5h
- Somma dei primi n termini 1,5h
- Applicazioni 1
- Progressioni geometriche 2h
- Calcolo del termine ennesimo 1,5h
- Somma e prodotto dei primi n termini 1,5h
- Applicazioni 1h
- Attività con Derive 2h
- Verifica sommativa 2h
- Consegna e correzioni verifiche 1h

Per un totale di 20h (quattro settimane).
La previsione è da ritenersi elastica, in quanto si deve tenere conto delle necessità degli studenti.

Metodologia e strumenti

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.
Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).
Verranno discussi e confrontati insieme gli esercizi che hanno apportato incertezze e problemi. Si svolgerà attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Derive; in queste occasioni si preferirà il lavoro di gruppo, le esercitazioni guidate ma anche quelle autonome.

Strumenti utilizzati:
- Libro di testo
- Lavagna e gessi
- Calcolatrice scientifica
- Riga e squadre
- Fotocopie
- Software didattici come Derive.

Controllo dell'apprendimento:
Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante *verifiche formative* e *verifica sommativa*.
Le *verifiche formative* consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuato dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.
Le *verifiche sommative* consistono in prove orali e prove scritte.
Le *prove orali* serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.

La *prova scritta*, della durata di due ore, sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

Recupero:

Per gli studenti che trovano difficoltà nell'apprendimento, verranno svolte attività pomeridiane, ossia gli "sportelli", che consistono in esercitazioni mirate al singolo studente.

Schema dei contenuti (tipo mappa concettuale)

1. **Successioni**
- **Rappresentazione geometrica**
- **Rappresentazione algebrica**
2. **Progressioni aritmetiche**
- **Calcolo del termine n-simo di una progressione aritmetica**
- **Somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica**
- **Applicazioni all'economia**
- **Applicazioni alla fisica**
3. **Progressioni geometriche**
- **Calcolo del termine n-simo di una progressione geometrica**
- **Prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica**
- **Somma di termini consecutivi di una progressione geometrica**
- **Applicazioni all'economia**
- **Attività di laboratorio con Derive**

Considerazioni didattiche (sui contenuti, approfondimenti e attività eventuali di laboratorio)

1. **Successioni**

Per introdurre l'argomento delle successioni, si parte da un esempio semplice.
Cominciamo con il prendere in considerazione l'insieme dei numeri naturali.
La sequenza 1, 2, 3, 4, …. non ha termine, perché dopo qualunque numero naturale n si può scrivere il numero naturale seguente n+1; questa proprietà si esprime dicendo che vi sono infiniti numeri naturali ed anzi i numeri naturali rappresentano l'esempio più semplice di insieme contenente un numero infinito di elementi.
Consideriamo ora una qualsiasi funzione che ad ogni numero naturale associa un ben determinato numero reale. Sia, per esempio, g definita come segue:

$$g : N \to R \qquad n \to g(n) = \frac{2^n + 1}{n}$$

Allora g fa corrispondere ai numeri naturali una sequenza di numeri reali:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \dots & n, & \dots \\ g(1) = 3, & g(2) = 5/2, & g(3) = 3, & \dots & g(n) = \dfrac{2^n + 1}{n}, & \dots \end{array}$$

La "fila" 3, $\frac{5}{2}$, 3, ... è dunque una sequenza infinita di numeri reali e costituisce un **esempio di successione numerica**; l'aggettivo numerica sta a significare che tutti i termini della sequenza sono dei numeri.

Generalizziamo ora il ragionamento precedente. Sia f una qualsiasi legge che ad ogni numero naturale $n \neq 0$ faccia corrispondere un ben determinato numero reale, che per comodità di scrittura, possiamo indicare con a_n, cioè una lettera dell'alfabeto, munita di un indice che può assumere i valori in N. Allora la legge f trasforma l'insieme numerico

$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ n-1,\ n,\ \ldots\ldots$

nell'insieme numerico

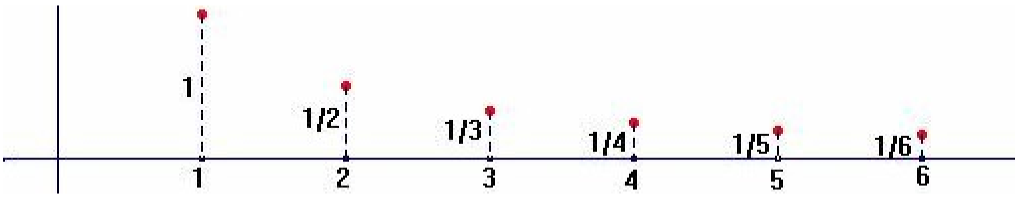
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots\ldots.$

Si dice allora che gli elementi di quest'ultimo insieme (che sono dei numeri reali), costituiscono una **successione.** Tale notazione suggerisce il fatto che a_1 , cioè il valore assunto dalla funzione in 1, può essere pensato come il primo elemento di una "fila di numeri"; allo stesso modo a_2 ne è il secondo elemento, e così via.
E' anche vero il viceversa che ogni fila di numeri può essere pensata come una funzione che fa corrispondere a 1 il primo elemento della fila, a 2 il secondo, ecc…

Nota Didattica: Ogni successione è un insieme ordinato di numeri, nel senso che ne conosciamo il primo termine, il secondo, il terzo, …. .L'insieme di numeri reali $[0,1]$ invece non costituisce una successione, perché, posto 0 il primo termine, non è chiaro chi ne sia il secondo, chi il terzo.

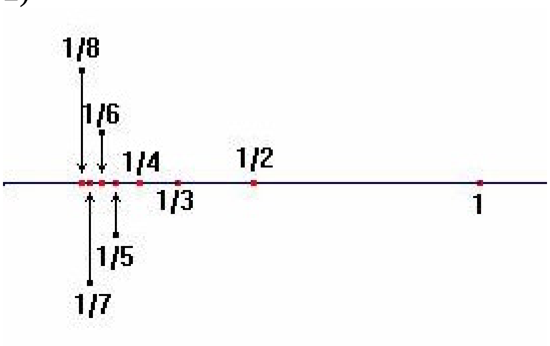
Rappresentazione geometrica:

1) Per visualizzare graficamente una successione, abbiamo a disposizione due metodi. Ognuno presenta vantaggi e svantaggi. I due metodi alternativi sono illustrati nel seguente esempio, con riferimento alla successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$



Questo tipo di visualizzazione evidenzia bene il fatto che una successione è una funzione: a ogni numero naturale (in questo caso, non nullo) n, corrisponde uno e un solo ben determinato valore e la variabile n non varia in modo continuo, ma discreto.

2)



Questa visualizzazione fa bene notare come i termini della successione costituiscono un insieme numerico: l'insieme $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.\right\}$

Rappresentazione algebrica:

Anche per rappresentare una successione dal punto di vista algebrico, esistono diverse modalità.

1) Quella più immediata consiste nell'esplicitare uno ad uno alcuni termini della successione. Questo modo ha l'evidente limite pratico che permette una conoscenza solo parziale della successione; ma è l'unico utilizzabile per indicare la successione dei risultati ottenuti lanciando più volte un dado e in generale quando non si conosce a priori l'esito di un certo evento.

2) Un modo più efficace per rappresentare una successione consiste, se possibile, nel definire astrattamente la legge che, ad ogni numero naturale *n*, fa corrispondere il numero a_n; diremo allora che la successione è definita **analiticamente.** Ad esempio: $a_n = 2n+1$.

3) Un terzo modo per definire una successione è quello della **ricorrenza**: esso consiste nell'assegnare il primo termine e la legge che lega due termini consecutivi.
Ad esempio: $a_0 = 4$, $a_{n+1} = a_n - 2$.

Nota Didattica
Una stessa successione può essere definita sia analiticamente, sia per ricorrenza; perciò non è la successione ad essere analitica o ricorsiva, ma il modo in cui è definita.
Si noti che, se la successione è definita ricorsivamente, per conoscere un suo termine occorre calcolare tutti i precedenti; se invece la successione è definita in modo analitico, il termine ennesimo si può calcolare direttamente a partire da *n*.
La successione $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ può essere definita anche nel modo seguente: $a_n = 2^n, n \in N$.
Si osservi che, per calcolare a_{20} quest'ultima definizione è più immediata.

2. Progressioni aritmetiche

Prendiamo in esame ora delle particolari successioni che possono avere interessanti applicazioni.
Su parte da un esempio applicativo.
Consideriamo, ad esempio, la situazione pratica di un capitale di 800 euro investito dalla banca in un titolo che frutta un tasso annuale fisso di interesse del 2%; supponiamo per semplicità che l'interesse sia annualmente calcolato solo sugli 800 euro inizialmente investiti. Ci chiediamo quale sarà il valore del capitale depositato in banca alla scadenza di ogni anno, nell'ipotesi che su quella somma non siano eseguite altre operazioni.
Il primo passo consiste nel determinare l'interesse *i* che la banca versa annualmente: $i = 800\,euro \cdot \dfrac{2}{100} = 16\,euro$.
Al termine del primo anno la somma sarà dunque di 816 euro, al termine del secondo sarà di 832 euro, al terzo 848, e così via. Si ottiene quindi la successione
$800,\ 816,\ 832,\ 848,\ ....$ in cui ogni termine si ottiene dal precedente aggiungendo 16.

In generale, ogni successione **di tre o più numeri** tali che sia costante la differenza tra ciascuno di essi (eccettuato il primo) e il precedente si definisce **progressione aritmetica**.
La differenza costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama **ragione**.

Siano ora *a* e *b* due termini consecutivi di una progressione aritmetica di ragione d. Si vede facilmente che:
$b = a + d \quad e \quad a = b - d$
Quindi, in una progressione aritmetica, **un termine qualunque si ottiene dal precedente aggiungendo a quest'ultimo la ragione, oppure si ottiene dal seguente sottraendogli la ragione**.

Osservazione:
Da questa proprietà segue che:
- se la ragione è positiva, la progressione è crescente in quanto ogni termine è maggiore del precedente;
- se la ragione è negativa, la progressione è decrescente perché ogni termine è minore del precedente;

- se infine la ragione è zero, la progressione è costante, cioè è costituita da numeri tutti uguali tra loro.

Chiedere agli alunni:
- Sono vere le proposizioni inverse delle precedenti? (si)
- Cosa rappresenta il grafico di una progressione aritmetica in un diagramma cartesiano? (si ottengono punti tutti appartenenti alla stessa retta) – (vedi esercizi con *Derive* riportati a fine ud)

Calcolo del termine n-simo di una progressione aritmetica

Una progressione aritmetica è univocamente determinata, una volta che se ne conosce il primo termine a_1 e la ragione d.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

In generale, se si cerca il termine ennesimo della progressione aritmetica, intuitivamente si comprende che occorre aggiungere al primo termine (n-1) volte la ragione, cioè vale:

Teorema:

Il termine ennesimo di una progressione aritmetica è uguale alla somma del primo temine, con il prodotto della ragione per il numero di termini che precedono a_n.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Ossservazione:

Se invece del primo, è noto un termine qualunque della progressione, è possibile calcolare tramite la ragione un altro termine?

Si può dimostrare facilmente che se a_r e a_s sono due termini qualunque della progressione allora

$$a_s = a_r + (s-r)d$$

Osservazione: Questa relazione vale anche se $s<r$.

Somma di termini consecutivi di una progressione aritmetica

Vogliamo determinare la somma dei primi n termini consecutivi di una progressione aritmetica, con la sola conoscenza dei termini a_1, a_n e del numero n dei termini.

Partiamo dall'osservazione di un semplice esempio:

si consideri la progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13. Le coppie di termini equidistanti sono $\{3,13\}$, $\{5,11\}$, $\{7,9\}$.

si nota che la somma di termini equidistanti vale sempre lo stesso valore.

Questa proprietà è la base per dimostrare come si ottiene la somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica .

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

La somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma dei termini estremi, moltiplicata per il numero dei termini.

Osservazione:

Osserviamo che la somma S_n può calcolarsi anche una volta che siano dati il primo termine, la ragione e il numero dei termini. In questo caso, infatti, basta ricavarsi con un passaggio intermedio il termine a_n e poi applicare la formula precedente.

Applicazioni all'economia

Le progressioni aritmetiche trovano applicazione in economia, ad esempio, nei problemi di capitalizzazione semplice.

Applicazioni alla fisica

Tramite le progressioni aritmetiche si possono affrontare anche alcuni problemi di fisica, sul moto uniformemente accelerato.

Ad esempio si possono impostare progressioni aritmetiche riferite alla velocità di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato.

3. Progressioni geometriche

Si sviluppa un percorso parallelo a quello fatto per le progressioni aritmetiche.

Introduciamo l'argomento tramite un esempio classico.

"Il bramino inventore degli scacchi chiese di essere pagato nel seguente modo: presa la scacchiera, mise un granello di riso nel primo quadrato, 2 nel secondo, 4 nel terzo, 8 nel quarto, e così via. Quanti granelli di riso andrebbero collocati nell'ultimo quadrato della scacchiera?"

Innanzitutto dobbiamo ricordare che una scacchiera è dotata di otto righe ed otto colonne, e dunque è formata da 64 quadrati. I numeri di granelli di riso che devono essere posti su ogni quadrato della scacchiera costituiscono una successione di 64 termini

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

tali che ogni termine è il doppio del precedente.

L'esempio riportato rappresenta una progressione geometrica. Possiamo quindi dare la definizione generale:

Si chiama progressione geometrica una successione di tre o più numeri, tali che il quoziente tra ciascuno di essi (escluso il primo) e il precedente è costante. Il quoziente costante tra ogni termine e il suo precedente si chiama ragione.

Siano *a* e *b* due termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q; esplicitiamo il legame che intercorre tra *a* e *b*.

$$b = a \cdot q \quad e \quad a = \frac{b}{q}$$

Osservazione 1: la ragione deve sempre essere diversa da zero perché, in base alla definizione data, nessun termine della progressione può essere nullo.

Osservazione 2: un termine qualunque si ottiene dal precedente moltiplicandolo per la ragione, oppure si ottiene dal seguente dividendolo per la ragione => se la ragione è positiva, tutti i termini della progressione sono di ugual segno; se la ragione è negativa, i termini sono alternativamente di segno opposto.

Osservazione 3: dalla osservazione 2 segue che possiamo studiare una eventuale crescenza o decrescenza della progressione solamente nel caso in cui la ragione è positiva.

Si ha che:

- Se $q>1$ ogni termine è maggiore del precedente e dunque la progressione è crescente.
- Se $q=1$ la progressione è costante.
- Se $0<q<1$ ogni termine è minore del precedente e dunque la progressione è decrescente.

Calcolo del termine n-simo di una progressione geometrica

Come per le progressioni aritmetiche è prevedibile che una progressione geometrica sia univocamente determinata una volta che se ne conosca il primo termine a_1 e la ragione q.

$a_2 = a_1 q$

$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$

..

Intuitivamente, per calcolare il termine ennesimo della progressione occorre moltiplicare il primo termine (n-1) volte per la ragione, cioè vale:

Teorema:

Il termine ennesimo di una progressione geometrica è uguale al prodotto del primo temine, con la ragione elevata all'esponente uguale al numero di termini che precedono a_n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

Utilizzando questo risultato, chiedere agli studenti di ricavare la relazione che lega due termini qualunque a_r e a_s di una progressione geometrica:

$$a_s = a_r \cdot q^{(s-r)}$$

Osservazione: questa relazione vale anche se $s<r$.

Prodotto di termini consecutivi di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica, è possibile avere delle informazioni sul prodotto e la somma dei primi *n* termini consecutivi?

Come nel caso delle progressioni aritmetiche è necessario fare un'osservazione sul prodotto di termini equidistanti dagli estremi.

Nella progressione iniziale 1, 2, 4, 8, 16, 32 le coppie di termini equidistanti $\{1,32\}$, $\{2,16\}$, $\{4,8\}$ sono caratterizzate dal fatto che il prodotto degli elementi di ogni coppia è costante.

Partendo da questa osservazione, si dimostra che:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Il prodotto dei primi *n* termini di una progressione geometrica a termini positivi è uguale alla radice quadrata del prodotto dei termini estremi elevato al numero dei termini.

Osservazione:

Se i termini della progressione non sono tutti positivi, allora il secondo membro nella formula precedente rappresenta il valore assoluto del prodotto di questi termini:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

ed il segno deve essere deciso caso per caso.

Somma di termini consecutivi di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, ...$ ci proponiamo ora di calcolare la somma S_n dei primi *n* termini.

Si può dimostrare facilmente che

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Applicazioni all'economia

Nella parte delle progressioni aritmetiche sono stati descritti i problemi di capitalizzazione semplice; essi però rappresentano delle situazioni semplificate in cui gli interessi sono calcolati solo sul capitale iniziale. Se invece si tiene conto del fatto che anche gli interessi maturano per il futuro nuovi interessi, la capitalizzazione si dirà composta.

Attività di laboratorio con Derive

Derive può essere molto utile per favorire la capacità di rappresentazione e di comprensione delle proprietà delle successioni da parte degli studenti.

- Con derive si può rappresentare il grafico delle successioni definendole sia per via analitica che per ricorrenza e quindi studiarne l'andamento.
- Con *Derive* può essere interessante studiare l'andamento della successione dei rapporti tra un termine e il precedente relativamente alla famosa successione di Fibonacci definita da

$$\begin{cases} F(0)=1 \\ F(1)=1 \\ F(n)=F(n-1)+F(n-2) \end{cases}$$

Verifica (o esempi di esercizi)

VERIFICA SOMMATIVA

1. Fra le seguenti successioni ci sono progressioni aritmetiche? In tal caso indica il primo termine e la ragione:
   - $a_n = 5 + 2n$
   - $a_n = 2 + \frac{1}{n}$
   - $a_n = -3n$ [6]
1. In una progressione aritmetica si sa che il primo termine è 15, l'ultimo è 5 e la somma dei termini è 310. Determinare il numero dei termini e la ragione. [4]

2. I tre lati di un triangolo sono in progressione aritmetica. Determinare la loro misura sapendo che il perimetro è 24 cm. [4]

3. Dimostrare che se x_0, x_1, x_2 …. sono una progressione geometrica di ragione *d*, allora i valori della funzione $y=ax+b$ calcolati per x_i sono pure in progressione aritmetica.
[5]

4. In una progressione geometrica il primo termine è 5 e la ragione è 2; calcolare il prodotto e la somma dei primi 4 termini. E se la ragione fosse –2? [4]

5. I lati di un triangolo sono in progressione geometrica. Sapendo che il perimetro è 76m e il rapporto tra il lato maggiore e la somma degli altri due è $\frac{9}{10}$, trovare le misure dei lati del triangolo.
[5]

6. Un impresario si impegna, per contratto, alla seguente penalità: 10 euro di penalità per il primo giorno di ritardo di consegna dei lavori, 20 euro per il secondo giorno, 40 per il terzo e così via. Quanto pagherebbe per dieci giorni di ritardo?
[3]

Valutazioni (griglia)

<table>
<tr><th>Punteggio Grezzo
(Totale 31)</th><th>Voto in Decimi
(ottenuto con la proporzione)</th><th>Voto in decimi
(una proposta)</th></tr>
<tr><td>0</td><td rowspan="4">0-1</td><td rowspan="10">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="3">2-3</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">3-4</td><td rowspan="4">4</td></tr>
<tr><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3">4-5</td></tr>
<tr><td>14</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">5-6</td></tr>
<tr><td>17</td><td rowspan="4">6</td></tr>
<tr><td>18</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="3">6-7</td></tr>
<tr><td>20</td></tr>
<tr><td>21</td><td rowspan="3">7</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">7-8</td></tr>
<tr><td>23</td></tr>
<tr><td>24</td><td rowspan="3">8</td></tr>
<tr><td>25</td><td rowspan="3">8-9</td></tr>
<tr><td>26</td></tr>
<tr><td>27</td><td rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="3">9-10</td></tr>
<tr><td>29</td></tr>
<tr><td>30</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>31</td><td>10</td></tr>
</table>