Schema “La retta nel piano cartesiano”

Destinatari
Questa unità didattica è rivolta a studenti della 3° Liceo Scientifico tradizionale. Si svolge nel primo quadrimestre. Il percorso didattico sarà articolato tenendo conto del fatto che si hanno tre ore settimanali a disposizione.

Prerequisiti
- Conoscenze di base di aritmetica
- Equazioni e disequazioni di primo grado
- Risoluzione di sistemi di primo grado
- Concetto di valore assoluto ed equazioni con valore assoluto
- Potenze con esponenti interi
- Conoscenza degli elementi fondamentali della geometria sintetica piana
- Piano cartesiano
- Asse di un segmento
- Punto medio di un segmento e distanza tra due punti
- Conoscenza della definizione di seno e coseno di un angolo
- Teorema di Talete
- Rette parallele e perpendicolari
- Rappresentazione di un insieme di numeri su una retta orientata
- Calcolo algebrico con monomi, polinomi e frazioni algebriche
- Trasformazioni geometriche

Obiettivi
Obiettivi generali
- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dall’unità didattica per l’argomento delle rette.
- Contribuire a sviluppare l’interesse degli studenti per gli aspetti storico-epistemologici della matematica e condurli ad inquadrare storicamente la nascita della geometria analitica.
- Acquisire consapevolezza del contributo della logica e fornire contesti di applicazione delle sue regole.
- Rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico specifico della materia.
- Imparare ad operare con il simbolismo matematico.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali.

Obiettivi trasversali
- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Perseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.

- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.
- Rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.
- Maturare processi di astrazione.
- Potenziare la capacità di studio di un testo scritto selezionando le informazioni in ordine di importanza.

Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere la definizione di retta come luogo geometrico di punti.
- Conoscere l'equazione della retta sia in forma implicita che in forma esplicita
- Riconoscere rette parallele agli assi.
- Sapere quando un punto appartiene ad una retta data.
- Riconoscere le condizioni di parallelismo e perpendicolarità.
- Conoscere come si determina l'equazione di una retta passante per due punti
- Conoscere il significato di coefficiente angolare
- Conoscere i fasci di rette

Abilità

- Saper riconoscere l'equazione di una retta.
- Saper verificare se un punto appartiene ad una retta.
- Saper calcolare la distanza di un punto da una retta.
- Scrivere l'equazione di una retta sotto condizioni assegnate.
- Saper operare con rette parallele o perpendicolari.
- Saper dare un significato alla pendenza di una retta .
- Saper determinare e trasformare l'equazione della retta da forma esplicita a forma implicita e viceversa
- Saper determinare l'equazione della retta passante per due punti
- Saper determinare le rette base del fascio ed il centro del fascio

Capacità

- Data l'equazione di una retta, essere in grado di tracciarne il grafico.
- Saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi.
- Essere in grado di applicare proprietà già note di geometria sintetica a contesti di geometria analitica.
- Essere in grado di risolvere problemi di geometria dando un'interpretazione analitica.
- Essere in grado di applicare le conoscenze e le competenze acquisite a contesti diversi, in particolare a quello della fisica.

Metodologie didattiche

- lezioni frontali, lezioni dialogiche e lo svolgimento di ulteriori esercizi.
- Si avrà cura di fare il maggior numero di esempi ogni volta che verrà introdotto un nuovo concetto o un nuovo modo di risolvere problemi, al fine di renderli il più chiari possibili.
- Si assegneranno esercizi per casa
- Verranno utilizzati software per rendere alcuni argomenti meglio assimilabili.

Tempi dell'intervento didattico

Per svolgere questa unità didattica prevedo di impiegare i seguenti tempi :

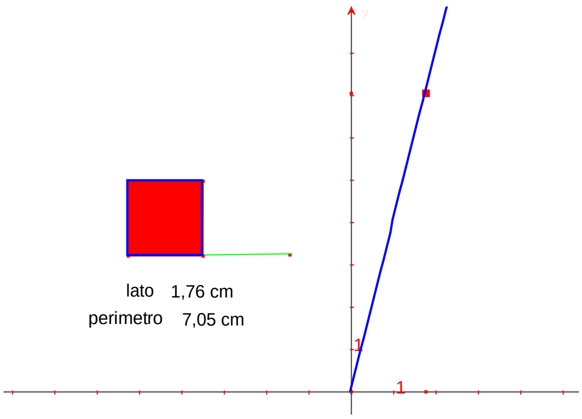
Attività didattica	Tempo previsto
sviluppo dei contenuti e svolgimento esercizi	15-20 h
Verifiche orali	6-7 h
Verifica sommativa	2 h
Correzione verifica sommativa	1 h
Totale	24-30 h

Sviluppo dei contenuti

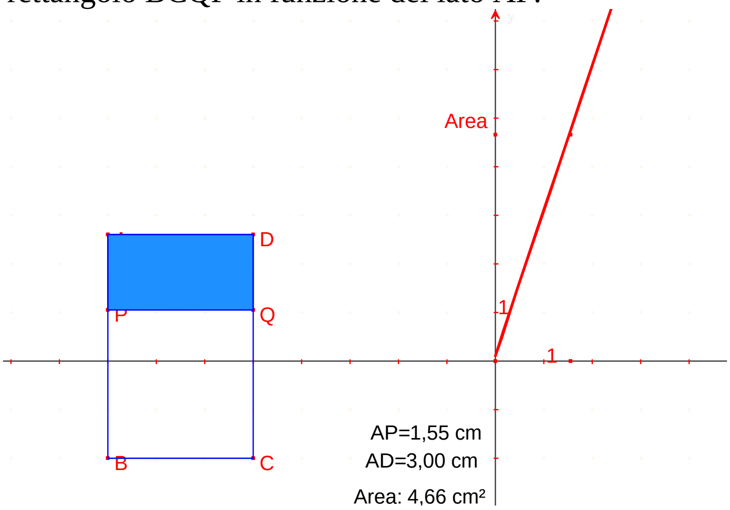
Considerazioni storico-epistemologiche
Fu senz'altro *Euclide* che nei suoi *"Elementi"* formalizzò per primo una consistente definizione di piano e di retta. La sua opera più importante è gli *"Elementi"*. Gli Elementi non sono un compendio della matematica dell'epoca ma piuttosto un manuale che abbracciava tutta la matematica "elementare" (costruzioni con riga e compasso), ossia l'aritmetica (teoria dei numeri) e la geometria sintetica. I primi matematici che hanno introdotto lo studio delle curve piane con lo strumento algebrico, quindi attraverso l'equazione algebrica, sono stati Cartesio e Fermat. Fu un appendice del "*Discours sur la méthode*", intitolata *La geometria*, che più direttamente influenzò lo sviluppo della matematica. In essa Cartesio forniva la prima anticipazione di quella che oggi chiamiamo *geometria analitica*; in realtà lo scopo che Cartesio si prefiggeva era una costruzione geometrica, e non come si è soliti banalizzare la riduzione della geometria all'algebra. Insieme a Cartesio, Fermat è stato uno dei due matematici principali della prima metà del XVII secolo. Indipendentemente da Cartesio scoprì i principi fondamentali della geometria analitica.

Introduzione
Per introdurre la retta come relazione di proporzionalità diretta ci avvarremo dell'attività descritta nell'allegato 1.(ve lo inserisco perché capiate di cosa si tratta)
L'obiettivo è quello di pervenire alla scoperta del fatto che equazioni del tipo $ax+by+c=0$ ammettono infinite soluzioni, intese come coppie ordinate *(x,y)* di numeri che si dispongono, sul piano cartesiano, in linea retta.

Approccio simile allegato 1 ma fatto con Cabri:
È importante introdurre il concetto di retta nel piano cartesiano in maniera tale da far comprendere agli alunni che retta ed equazioni di primo grado in due incognite rappresentano due facce della stessa medaglia.
A questo scopo è utile proporre alcuni esercizi da effettuare con il software Cabri Géomètre come i seguenti:
rappresentare, nel piano, un quadrato di lato variabile;esprimere algebricamente la relazione che lega il perimetro al lato; formare una tabella a due colonne in cui inserire a coppie le misure del lato e del perimetro; rappresentare tali coppie numeriche nel piano cartesiano.



Studiare l'area di un rettangolo APQD al variare della misura del segmento AP. Disegnare il grafico dell'area del rettangolo BCQP in funzione del lato AP.



Equazione di primo grado in due variabili
L'equazione

$$ax + by + c = 0 \qquad (*)$$

con $a, b, c \in R$ e a **e** b **non contemporaneamente nulli** si dice lineare in x e y.
Ogni coppia (x_0, y_0) tale che $ax_0 + by_0 + c = 0$ si dice soluzione dell'equazione.
L'equazione $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni che si ottengono attribuendo valori arbitrari ad una delle due variabili e ricavando i corrispondenti valori dell'altra.
Tali soluzioni possono essere considerate coordinate di punti del piano e di conseguenza avere una rappresentazione grafica.

Fare degli esempi

Tutti i punti della retta godono della proprietà di avere per coordinate coppie di numeri che, sostituiti ordinatamente al posto delle variabili x e y nell'equazione $ax + by + c = 0$, soddisfano l'equazione stessa.
Se consideriamo un punto non appartenente alla retta possiamo verificare che non soddisfa l'equazione.

Fare un controesempio

Facciamo osservare che non esiste una corrispondenza biunivoca tra le rette del piano e le equazioni lineari del tipo (*), nel senso che ogni retta del piano è rappresentata algebricamente da infinite equazioni del tipo (*), tutte definite a meno di una costante arbitraria reale non nulla.

Retta parallela all'asse *x*
Se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione diventa

$$by + c = 0 \qquad \text{ossia} \qquad y = -\frac{c}{b}$$

che, posto $h = -\frac{c}{b}$, si può scrivere sotto la forma generica

$$y = h$$

che individua una retta parallela all'asse delle ascisse.
Il valore *h* rappresenta il "livello di posizione" o la "quota" comune a tutti i punti della retta e l'ordinata del punto di intersezione di tale retta con l'asse y.
In particolare se $h = 0$, la retta coincide con l'asse *x* e pertanto la sua equazione è $y = 0$.

Retta parallela all'asse *y*
Stesso modo di prima

Retta passante per l'origine
Se $c = 0$ l'equazione assume la forma $ax + by = 0$. Questa equazione ammette soluzione per $x = 0$, $y = 0$ dunque la retta passa per l'origine.
Pertanto se nell'equazione di una retta manca il termine *c* la retta passa per l'origine.

Retta passante per due punti
Si considerano due punti distinti del piano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e si disegni la retta che li unisce.
Se $P(x, y)$ è un punto generico della retta passante per P_1 e P_2 interno o esterno a piacere al segmento congiungente tali punti, possiamo mediante il teorema di Talete
ottenere di nuovo $ax + by + c = 0$ che è la forma ***"implicita"*** della retta.

Forma esplicita dell'equazione della retta e rappresentazione grafica
Partendo da $ax + by + c = 0$ e ricavando la y otteniamo

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad \text{con } b \neq 0$$

e ponendo $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$

si ottiene l'equazione $y = mx + q$ che è detta equazione della retta in forma ***"esplicita"*** dove *m*, nel caso di un sistema monometrico, viene chiamato coefficiente angolare e *q* termine noto (intercetta).

Si spiega il significato di *q* e il significato geometrico del coefficiente angolare *m* considerando sulla retta due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.
Si ha allora $y_2 = mx_2 + q$ e $y_1 = mx_1 + q$ da cui sottraendo membro a membro

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

ossia $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Perciò il coefficiente angolare (o pendenza della retta) *m* nell'equazione della retta in forma esplicita rappresenta il *rapporto tra la differenza delle ordinate di due punti qualsiasi della retta e la differenza delle corrispondenti ascisse cioè*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vediamo come varia *m* al variare della retta, quindi al variare dall'angolo che forma con il semiasse positivo delle *x*.
possiamo dire che il coefficiente angolare dà anche indicazioni dell'angolo che la retta in esame forma con l'asse delle ascisse.

Si possono far creare rette ai ragazzi con l'aiuto del software Excel
Bisogna osservare anche che non tutte le rette del piano sono rappresentate algebricamente da equazioni del tipo $y = mx + q$. Per esempio le rette parallele all'asse *y*: per tali rette *m* non è finito.

Collegamento alla Fisica. Moto rettilineo uniforme

la velocità $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

velocità è costante e ***uguale alla pendenza della retta***.

SIGNIFICATO DELLA PENDENZA
L'intensità della velocità è rappresentata dal modulo della pendenza di ciascuna retta. Tanto più grande è tale modulo tanto più grande è la velocità.
Quindi si può scrivere:

$$pendenza \;\; della \;\; retta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v$$

Osserviamo il problema dal punto di vista matematico.
Se y e x sono due variabili legate linearmente tra loro, la pendenza del grafico che descrive y in funzione di x deve essere una linea retta. Quindi $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ = costante.
Nel linguaggio matematico, questa costante che rappresenta la pendenza è indicata con m.

- Se y è proporzionale a x, come in figura, allora y=mx.

(la funzione *f(x)=y=mx* rappresenta la proporzionalità diretta tra due classi di grandezze)

Invece di due generiche variabili x e y, utilizziamo s per indicare lo spostamento e t il tempo impiegato a percorrerlo; se il loro rapporto si mantiene costante in tutti gli intervalli di tempo e coincide con la velocità, allora si tratta di un ***MOTO RETTILINEO UNIFORME***

Il diagramma orario di un moto uniforme è una retta la cui pendenza è uguale al valore della velocità:

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0};$$

se $s_0=0$ *e* $t_0=0$ $\Rightarrow$ $\frac{s}{t} = v$, cioè $s = vt$

In tal caso lo spazio percorso è proporzionale al tempo impiegato a percorrerlo.

Può accadere che per t=0 l'oggetto in considerazione sia già a distanza s_0, allora lo spazio percorso dopo un tempo t è $s - s_0$, per cui:

$\frac{s - s_0}{t} = v$ cioè $s = s_0 + vt$.

Sistemi di due rette. Condizione di parallelismo

Consideriamo due rette:

$r: ax + by + c = 0$

$r': a'x + b'y + c' = 0$ $\Longrightarrow$ e il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

E' noto che:

1) se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ una e una sola soluzione cioè il sistema è determinato (le rette sono incidenti cioè hanno un punto in comune)
2) se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è impossibile (non esiste alcuna soluzione cioè le rette sono parallele ma non coincidenti)
3) se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è indeterminato (esistono infinite soluzioni cioè infiniti punti in comune e quindi le rette sono coincidenti)

Se vediamo le due rette scritte in forma esplicita cioè $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, essendo come è noto:

$m = -\frac{a}{b}$ $\quad m' = -\frac{a'}{b'}$ $\quad q = -\frac{c}{b}$ $\quad q' = -\frac{c'}{b'}$

risulta che il sistema è:

impossibile se $m = m'$ e $q \neq q'$

e indeterminato se $m = m'$ e $q = q'$.

<u>*Osservazione*</u>

Le condizioni di parallelismo di due rette si possono esprimere nel seguente modo:

"due rette del piano sono parallele se e soltanto se hanno proporzionali i coefficienti delle variabili oppure se hanno lo stesso coefficiente angolare".

Condizione di perpendicolarità di due rette

Siano $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ le equazioni esplicite di due rette r e r', tra loro perpendicolari. Vogliamo esprimere la condizione di perpendicolarità di queste due rette a mezzo dei loro coefficienti angolari *m* e *m'*.

A tale scopo consideriamo anche le equazioni:

$y = mx$ e $y = m'x$

che rappresentano le rispettive rette *s* e *s'* parallele alle rette date e passanti per l'origine.

La retta di equazione $x = 1$ interseca la retta *s* nel punto *A* e la *s'* nel punto *B*.

Con il teorema di Pitagora si ha:

$mm' = -1$ o anche $m = -\frac{1}{m'}$

Distanza di un punto da una retta

Data una retta *r*: $ax + by + c = 0$ e un punto $P(x_P, y_P)$ non appartenente a *r*, vogliamo determinare la distanza di *P* dalla retta *r* nei seguenti casi:

i. la retta *r* è parallela all'asse x. La distanza di $P(x_P, y_P)$ da *r* è $\overline{PH} = |y_P - k|$

ii. la retta *r* è parallela all'asse y. La distanza di $P(x_P, y_P)$ da *r* è $\overline{PH} = |x_P - h|$

iii. la retta *r* ha equazione generica. La distanza di $P(x_P, y_P)$ da *r* è $d = \dfrac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Fascio proprio ed improprio di rette
Ricordiamo che si chiama:
"Fascio proprio di rette" l'insieme di tutte e sole le rette del piano che hanno uno stesso punto in comune detto centro del fascio.
Siano

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

e

$$a'x + b'y + c' = 0 \qquad (2)$$

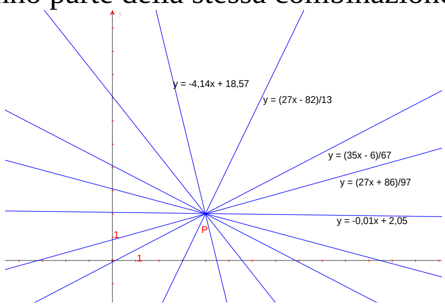
le equazioni di due rette distinte che si incontrano in un punto *P*.
Si chiama combinazione lineare delle due equazioni, l'equazione

$$l(ax + by + c) + l_1(a_1x + b_1y + c_1) = 0 \qquad (3)$$

dove l e l_1 sono due numeri qualunque purchè non entrambi nulli.
I numeri l e l_1 sono detti parametri della combinazione lineare.
Al variare di questi parametri si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio. Possiamo quindi dire che: *l'equazione di una retta di un fascio proprio si può scrivere sotto forma di combinazione lineare delle equazioni di due rette del fascio.*

In generale, dato un punto $P(x_1, y_1)$, il fascio di rette di centro *P* ha equazione $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Al variare di *m* si ottengono tutte le rette del fascio passanti per *P*, tranne la parallela all'asse *y* che ha equazione $x = x_1$. Pertanto il fascio completo è descritto dalle equazioni
$y - y_1 = m(x - x_1)$ con $m \in \Re$ e $x = x_1$.

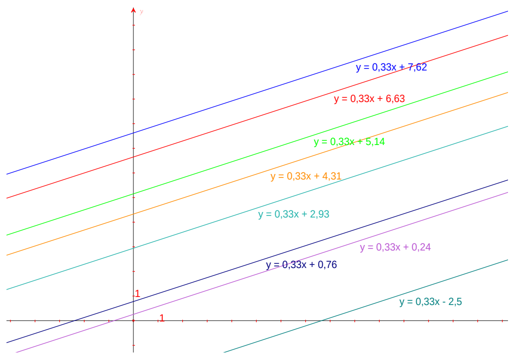
Possiamo utilizzare il software Cabri per creare un fascio proprio:
- fissiamo un punto *P* per esempio di coordinate (4,2)
- creiamo un numero di rette passanti per tale punto
- con la funzione "Coordinate o equazione" scriviamo le equazioni di alcune rette
- verifichiamo poi che fanno parte della stessa combinazione lineare.



Si chiama invece:
"Fascio improprio di rette" l'insieme delle rette del piano parallele ad una retta data *r*.
Se $ax + by + c = 0$ è l'equazione delle retta *r*, ogni altra retta di equazione $ax + by + k = 0$ sappiamo che è parallela ad *r*. Al variare del parametro *k* si ottengono le equazioni di tutte le rette del fascio improprio individuato dalla retta *r*.

Possiamo utilizzare anche in questo caso il software Cabri per creare un fascio improprio:

- fissiamo una retta
- creiamo un numero di rette parallele alla retta data
- con la funzione “Coordinate o equazione” scriviamo le equazioni di alcune rette
- verifichiamo poi che hanno lo stesso coefficiente angolare.



Equazione dell’asse di un segmento (anche questa si può introdurre con Cabri)

Vogliamo, dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, scrivere l’equazione dell’asse del segmento *AB*.

<u>*Caso 1*</u>

Se *AB* è parallelo all’asse *x*, allora l’asse di *AB* è parallelo all’asse *y*. L’asse di *AB* ha equazione

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

in quanto passa per il punto medio di *AB*.

<u>*Caso 2*</u>

Se *AB* è parallelo all’asse *y*, allora l’asse di *AB* è parallelo all’asse *x*. L’asse di *AB* ha equazione

$$y = \frac{y_A + y_B}{2}$$

in quanto passa per il punto medio di *AB*.

<u>*Caso 3*</u>

Se *AB* non è parallelo agli assi, possiamo determinare l’asse di *AB* seguendo due procedimenti basati sulle due diverse definizioni di asse.

<u>*Primo procedimento*</u>

Dalla definizione di asse come perpendicolare al segmento condotta per il suo punto medio posiamo, fissati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, scrivere l’equazione dell’asse del segmento *AB* in questo modo:

- si determinano le coordinate del punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento *AB*;
- si determina il coefficiente angolare m_{AB} della retta passante per *A* e per *B*;
- si scrive l’equazione della retta passante per *M* con coefficiente angolare uguale a $-\dfrac{1}{m_{AB}}$.

L’equazione dell’asse *AB* è dunque:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_M)$$

<u>*Secondo procedimento*</u>

Indicato con *P(x,y)* un generico punto dell’asse del segmento, il luogo dei punti equidistanti dagli estremi del segmento si traduce nella relazione $\overline{PA} = \overline{PB}$, che diventa, applicando la formula della distanza tra due punti

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$$

o anche, elevando al quadrato

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$$

Se svolgiamo i calcoli, otteniamo un'equazione lineare, perché i termini quadratici in x e in y si semplificano.

Simmetria assiale (si può omettere)

NOTA: Prima di introdurre la simmetria assiale nel modo formale, io l'ho introdotta con il metodo di piegamento della carta oppure si può introdurre con Cabri e viene benissimo lo stesso.

Dopo aver introdotto la simmetria assiale da un punto di vista pratico possiamo darne la definizione.

Def. Data una retta a, chiamata asse, la simmetria assiale di asse a è la trasformazione del piano in sé che muta un punto P del piano in un punto P' del piano tale che la retta PP' sia perpendicolare all'asse a e intersechi a in un punto H tale che $PH \cong P'H$.

Vogliamo determinare nel piano cartesiano le equazioni della simmetria assiale nei seguenti casi:

i) simmetria assiale rispetto all'asse x;

$$\sigma_x:\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$$

ii) simmetria assiale rispetto all'asse y;

$$\sigma_y:\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$$

iii) simmetria assiale rispetto ad una retta parallela all'asse x;

$$\sigma_a:\begin{cases}x'=x\\y'=2k-y\end{cases}$$

iv) simmetria assiale rispetto ad una retta parallela all'asse y;

$$\sigma_a:\begin{cases}x'=2h-x\\y'=y\end{cases}$$

v) simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante;

$$\sigma_a:\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$$

vi) simmetria assiale rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante;

$$\sigma_a:\begin{cases}x'=-y\\y'=-x\end{cases}$$

ALLEGATO 1

Proponiamo alla classe queste attività:

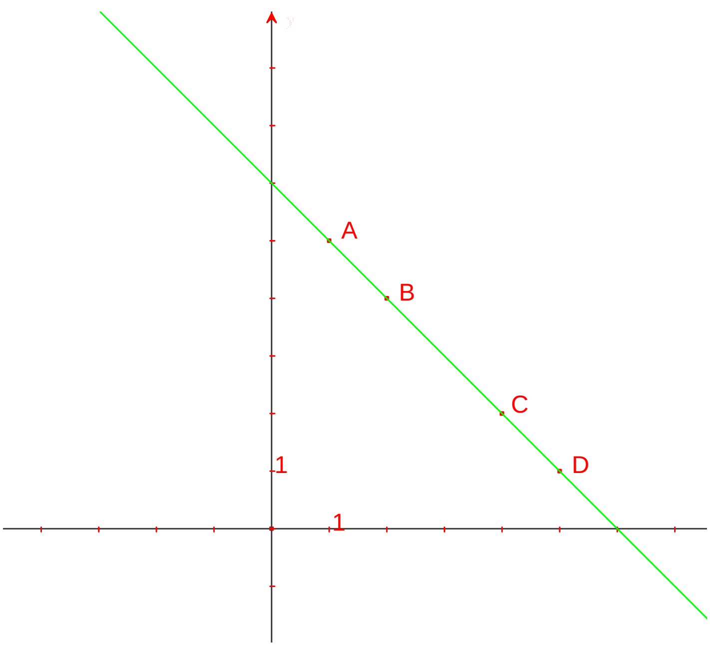
a)"rappresentate su un foglio quadrettato 10 rettangoli di perimetro uguale a 12 unità; esprimete algebricamente la relazione che lega base e altezza dei rettangoli al perimetro dato; formate una tabella a due colonne in cui inserirete a coppie le misure delle basi e delle altezze dei singoli rettangoli; rappresentate poi tali coppie numeriche nel piano cartesiano".

Consideriamo i seguenti rettangoli, le basi e le altezze misurano rispettivamente:

Base	*Altezza*
2	4
4	2
1	5
5	1

Consideriamo le misure dei lati dei rettangoli come coordinate di punti e rappresentiamoli nel piano cartesiano

A(1,5)
B(2,4)
C(4,2)
D(5,1)



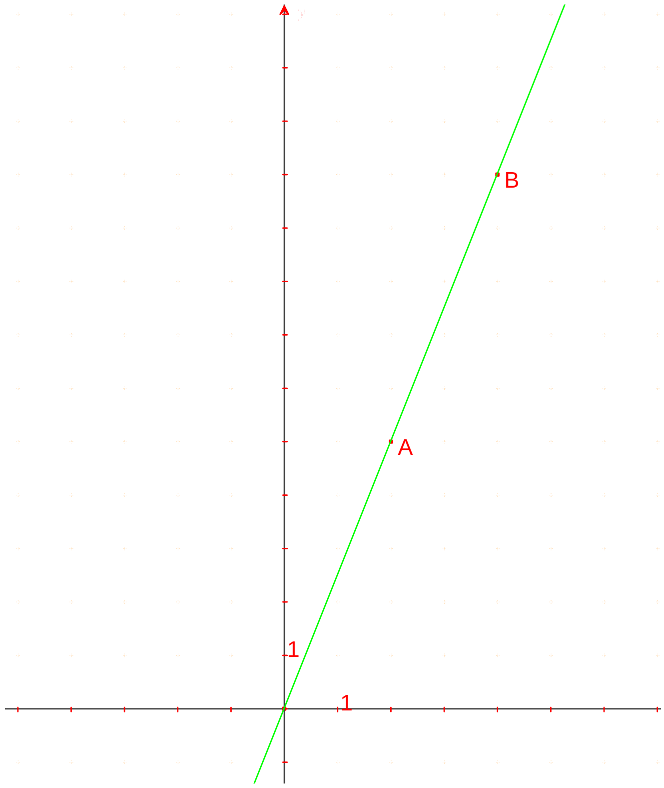
Unendo i quattro punti possiamo notare che rappresentano una retta.

b)"rappresentate su un foglio quadrettato 10 triangoli rettangoli di altezza costante pari a 5 unità e di area pari ai primi 10 multipli di 5; formate una tabella a due colonne in cui inserirete a coppie le misure della base e dell'area di ciascun triangolo; esprimete algebricamente la relazione che lega la base alla corrispondente area; rappresentate tali coppie numeriche nel piano cartesiano".

Base	*Area*
4	10
6	15
8	20
10	25
…	…

Consideriamo sempre queste misure come punti del piano

A(2,5)
B(4,10)
C(6,15)
D(8,20)
….



This document was created with Win2PDF available at http://www.win2pdf.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.