

Unità didattica: il piano cartesiano

Destinatari:

Allievi della classe II di un liceo scientifico tecnologico con sperimentazione Brocca. L'argomento è inserito nel Tema n. 1 punto 3 dei programmi di matematica B del biennio ("*Il piano cartesiano: retta, parabola e iperbole equilatera*"). Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5. Per il liceo scientifico tradizionale, tale argomento è previsto al terzo anno (primo quadrimestre, 3 ore settimanali)

Prerequisiti:

- Nozioni di insiemistica
- Il prodotto cartesiano
- I numeri reali: nozioni introduttive
- Il concetto di funzione e di corrispondenza biunivoca
- Calcolo algebrico: equazioni e disequazioni di primo grado. Sistemi di equazioni lineari.
- La geometria sintetica nel piano: in particolare rette parallele e perpendicolari, il concetto di misura di un segmento, il punto medio di un segmento, il Teorema di Pitagora e suo inverso, la similitudine fra triangoli, il Teorema di Talete, le trasformazioni isometriche e i triangoli rettangoli con angoli di 30° , 60° , 45° (per introdurre le traslazioni e le prime rotazioni nel piano e risolvere esercizi). Punti notevoli di un triangolo: baricentro, circocentro, ortocentro, incentro.
- Formula di Erone
- Simmetria di un punto rispetto ad una retta e ad un altro punto.
- Il valore assoluto di un numero reale
- Conoscenze di base di logica
- Primi elementi di Cabri-Géomètre

Obiettivi generali

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dell'unità didattica per l'argomento geometria analitica del piano cartesiano.
- Comprendere le finalità e acquisire il metodo della geometria analitica.
- Condurre gli studenti ad essere in grado di integrare il metodo della geometria sintetica e il metodo della geometria analitica.
- Contribuire a sviluppare e soddisfare l'interesse degli studenti per gli aspetti storico-epistemologici della matematica e condurli ad inquadrare storicamente la nascita e l'evoluzione della geometria analitica.
- Contribuire a cogliere le interazioni tra pensiero filosofico e pensiero matematico.
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali.
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico specifico della matematica.
- Impadronirsi dei primi rudimenti nell'uso del Software Cabri-Géomètre.

Obiettivi trasversali

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative.

Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere le coordinate cartesiane sulla retta
- Conoscere le coordinate del punto medio di un segmento sulla retta
- Conoscere i segmenti orientati su una retta e la differenza tra distanza relativa e distanza assoluta tra due punti su una retta
- Conoscere la traslazione su una retta
- Conoscere le coordinate cartesiane sul piano
- Conoscere la distanza tra due punti nel piano cartesiano
- Conoscere le coordinate del punto medio di un segmento nel piano cartesiano
- Conoscere le coordinate del baricentro di un triangolo nel piano
- Conoscere la simmetria di un punto rispetto ad un punto nel piano cartesiano
- Conoscere il concetto di traslazione del sistema di riferimento nel piano
- Conoscere il concetto di rotazioni particolari del sistema di riferimento
- Conoscere il concetto di luogo geometrico
- Conoscere il concetto di rappresentazione grafica di una funzione nel piano cartesiano
-

Competenze

- Saper determinare la distanza tra due punti nel piano cartesiano
- Saper utilizzare sia sistemi di riferimento monometrici che dimetrici
- Saper calcolare le coordinate cartesiane del punto medio del segmento congiungente due punti
- Saper calcolare le coordinate del baricentro di un triangolo, conoscendo le coordinate dei suoi vertici
- Saper calcolare le coordinate dei punti del piano cartesiano rispetto a sistemi di riferimento traslati
- Saper calcolare le coordinate dei punti del piano cartesiano rispetto a sistemi di riferimento ruotati di angoli particolari
- Saper rappresentare luoghi geometrici particolari nel piano cartesiano con il software Cabri-Géomètre

Capacità

- Saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere i primi problemi di geometria analitica
- Saper rappresentare le posizioni di oggetti reali nel piano cartesiano scegliendo le opportune unità di misura (in sistemi sia monometrici che dimetrici) collegandosi al concetto di misura affrontato in Fisica.
- Riportare dati sperimentali di Fisica in un piano cartesiano

Contenuti

- Coordinate cartesiane su una retta
- Relazione tra segmenti di una retta: distanza relativa e assoluta tra due punti
- La relazione di Chasles
- Coordinate del punto medio di un segmento su una retta
- Distanza tra due punti sulla retta
- Traslazione sulla retta
- Coordinate Cartesiane nel piano
- Distanza tra due punti nel piano
- Coordinate del punto medio di un segmento nel piano

- Coordinate del baricentro di un triangolo
- Traslazione nel piano
- Rotazioni particolari
- I luoghi geometrici nel piano cartesiano
- Rappresentazione di funzioni nel piano cartesiano
- Asse di un segmento

Tempi dell'intervento didattico

Accertamento dei prerequisiti: 1 h

Introduzione storico-epistemologica: 1 h

Coordinate cartesiane sulla retta, segmenti orientati, relazione di Chasles: 1 h

Punto medio di un segmento e distanza tra due punti sulla retta: 1 h

Traslazione sulla retta e coordinate cartesiane nel piano: 1 h

Distanza tra due punti e coordinate del punto medio di un segmento: 1 h

Baricentro di un triangolo: 1 h

Traslazione nel piano e rotazioni particolari: 1 h

Rappresentazione grafica delle funzioni nel piano cartesiano e luoghi geometrici: 2 h

Attività con Cabri-Géomètre: 2 h

Verifica sommativa: 2 h

Correzione verifica sommativa: 1 h

Totale: circa 15 ore

Metodologie didattiche

Durante una stessa ora di lezione si alterneranno approcci di tipo frontale e di tipo dialogato, in modo da creare discussioni guidate; gli alunni saranno costantemente stimolati a dare il loro contributo attivo mediante osservazioni e domande.

A sostegno si farà uso del software Cabri Géomètre che si presta particolarmente per una trattazione più intuitiva e dinamica dell'argomento.

Gli argomenti di ogni unità didattica verranno presentati mediante opportuni esempi svolti, che ne agevoleranno la comprensione; a conclusione di ciascuno di essi si cercherà di proporre un buon numero di esercizi, risolti insieme in classe, in modo che siano momento immediato di sostegno e anche di recupero della teoria. Tra gli esercizi proposti, essenziali saranno quelli di applicazione alla fisica.

Agli studenti verranno assegnati degli esercizi significativi da svolgere a casa scelti con difficoltà crescente, in modo che questi possano acquisire una maggiore familiarità con l'argomento; in seguito in classe, saranno svolti quegli esercizi che hanno comportato più incertezze e difficoltà.

Materiali e strumenti utilizzati

- Lavagna
- Libro di testo
- Appunti e fotocopie
- Software Cabri-Géomètre

Verifiche e valutazione:

La verifica dell'apprendimento sarà effettuata per mezzo di

- ✓ verifiche formative, alle quali non si attribuirà un voto, sotto forma di domande ed esercizi svolti in classe, correzione di esercizi dati a casa, test scritti da svolgere in classe. In particolare si proporrà un test scritto (domande aperte, a risposta multipla, esercizi e/o vero o falso) con lo scopo di accertarsi del livello di conoscenza e comprensione raggiunto: in tal modo si potrà intervenire tempestivamente per superare eventuali difficoltà e poter proseguire con i nuovi argomenti.

- ✓ verifica sommativa che serviranno per accertare il conseguimento degli obiettivi prefissati e che prevedono l'assegnazione di un voto, attraverso interrogazioni orali e prove scritte.

Intervento didattico:

Questa unità didattica ha come scopo la presentazione delle basi della geometria analitica e quindi fornisce il metodo per la costruzione di un sistema di coordinate prima sulla retta e poi sul piano, con relative applicazioni e conseguenze.

Primo approccio

Si introdurrà l'argomento partendo da una lettura critica di alcune parti del “*Discorso sul metodo*” di Cartesio che può essere uno spunto per la nascita di un dibattito anche in un'ottica interdisciplinare.

Considerazioni storico-epistemologiche

Fu senz'altro Euclide che nei suoi “*Elementi*” formalizzò per primo una consistente definizione di piano e di retta. La sua opera più importante è gli “*Elementi*”. Gli Elementi non sono un compendio della matematica dell'epoca ma piuttosto un manuale che abbracciava tutta la matematica “elementare” (costruzioni con riga e compasso), ossia l'aritmetica (teoria dei numeri) e la geometria sintetica. I primi matematici che hanno introdotto lo studio delle curve piane con lo strumento algebrico, quindi attraverso l'equazione algebrica, sono stati Cartesio e Fermat. Fu un'appendice del “*Discours sur la méthode*”, intitolata *La geometria*, che più direttamente influenzò lo sviluppo della matematica. In essa Cartesio forniva la prima anticipazione di quella che oggi chiamiamo *geometria analitica*; in realtà lo scopo che Cartesio si prefiggeva era una costruzione geometrica, e non come si è soliti banalizzare la riduzione della geometria all'algebra. Insieme a Cartesio, Fermat è stato uno dei due matematici principali della prima metà del XVII secolo. Indipendentemente da Cartesio scoprì i principi fondamentali della geometria analitica.

Coordinate Cartesiane su una retta

In questa fase si introdurrà in maniera rigorosa, utilizzando disegni e simboli opportuni, il concetto di unità di misura su una retta, di retta orientata e di corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e i numeri reali, per cui sarà sempre possibile associare ad un punto un numero reale e viceversa, ad ogni numero reale un unico punto della retta.

In questa fase ritengo sia opportuno disegnare rette con diversa direzione e verso, per evitare la misconcezione che il verso positivo vada sempre "verso destra".

È importante la definizione di segmento orientato $\overline{AB}$ (sarà utile per la futura trattazione dei vettori) e non orientato AB per arrivare alla definizione di

📖 distanza relativa tra due punti su una retta: In maniera rigorosa, si arriverà a trovare l'espressione della distanza relativa utilizzando l'identità di Chasles (*presi tre punti $A(a)$, $B(b)$ e $C(c)$ disposti in qualsiasi ordine sulla retta, vale la relazione: $\overline{AB_0} + \overline{BC_0} + \overline{CA_0} = 0$ o equivalentemente: $\overline{AB_0} = \overline{AC_0} + \overline{CB_0}$*): la distanza relativa tra due punti è uguale alla differenza tra l'ascissa del secondo punto e quella del primo. Essa è positiva o negativa a seconda che il secondo punto abbia ascissa maggiore o minore del primo. $\overline{AB_0} = b - a$.

📖 distanza assoluta tra due punti su una retta: La distanza assoluta sarà definita come la misura del segmento AB non orientato, e quindi $\overline{AB} = |b - a|$. Risulta importante

insistere sul fatto che la misura di un segmento, a differenza della distanza relativa, è sempre una quantità positiva.

Dalla definizione data risulta poi possibile fornire una interpretazione geometrica per:

- 📖 il valore assoluto di a come distanza del punto $A(a)$ dall'origine
- 📖 la risoluzione (per via grafica) delle equazioni del tipo: $|x| = c$ e delle disequazioni del tipo $|x| \leq c$ e $|x| \geq c$ con $c \in \mathbb{R}^+$.

Si definirà poi il punto medio di un segmento su una retta (note le ascisse degli estremi) e se ne troverà l'espressione algebrica imponendo la condizione sintetica secondo cui i due segmenti in cui viene suddiviso il segmento di partenza sono uguali tra loro.

E in ultimo si farà osservare come varia la coordinata di un punto su una retta al variare del sistema di riferimento (ipotizzando che l'orientazione e l'unità di misura siano le stesse e che vari soltanto l'origine).

Coordinate Cartesiane nel Piano

Si introdurrà l'argomento partendo da due rette incidenti, ciascuna dotata di una unità di misura e di un verso.

Nel caso l'unità di misura per i due assi sia la stessa si parlerà di sistema monometrico, altrimenti il sistema si dirà dimetrico.

È importante ricordare che le unità di misura adottate sulle due rette non devono essere necessariamente uguali e che molto spesso, in fisica, ci si trova a dover analizzare dati sperimentali utilizzando sistemi di riferimento dimetrici (l'approfondimento è rimandato in seguito)

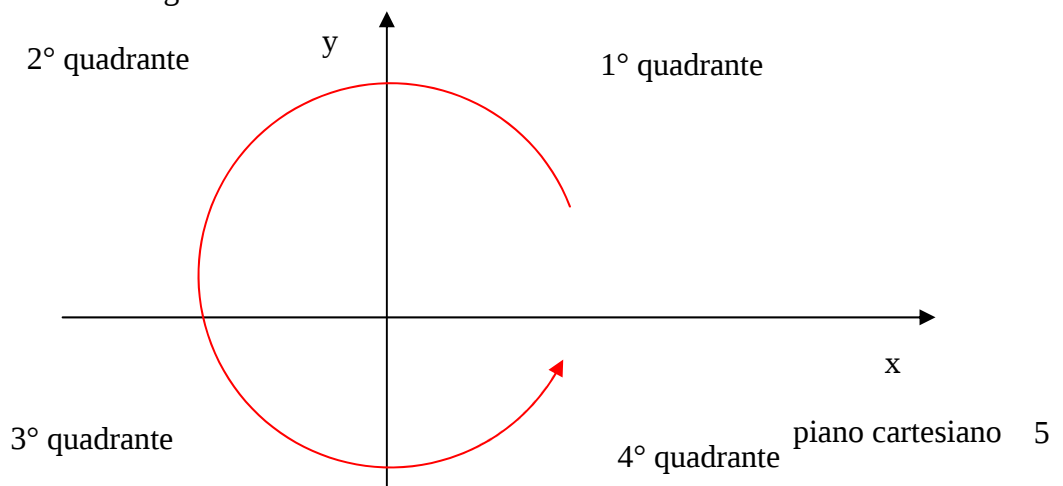
E a questo punto si sottolineerà che nel caso in cui i due assi siano perpendicolari tra loro, il sistema di riferimento si dirà ortogonale.

Per introdurre le coordinate dei punti nel piano cartesiano partirei da esempi numerici da eseguire su carta o con l'ausilio del software Cabri-Géomètre: in questo modo i ragazzi osserveranno che:

Ad ogni punto P del piano viene associata la coppia ordinata di numeri reali $(x;y)$ e viceversa, ogni coppia di numeri reali $(x;y)$ individua nel piano un unico punto P . Si realizza così una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Tramite visualizzazione grafica mostrerei come le coordinate di un punto di un piano cartesiano rappresentino le distanze del punto dagli assi coordinati.

Tramite uno schema come il seguente



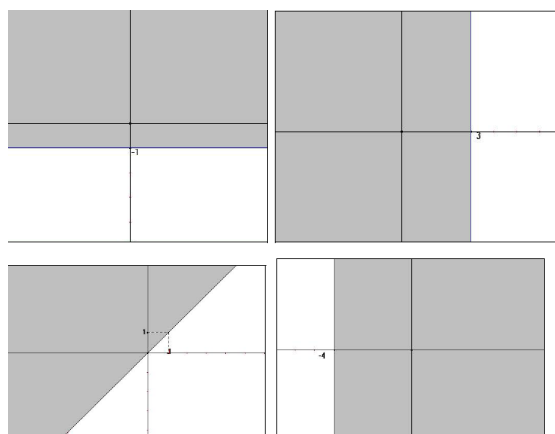
Mostrerei le convenzioni relative ai 4 quadranti e tramite Cabri visualizzerei la rappresentazione e le coordinate di punti particolari come un punto sull'asse delle x, uno sull'asse delle y, l'origine degli assi ...

Approfondimento sui sistemi dimetrici

Avendo a questo punto a disposizione tutti gli strumenti del caso, passerei ad approfondire il concetto di sistema dimetrico con degli esempi. Normalmente, in matematica, non si presentano mai esercizi che trattano questo caso particolare, ma può essere utile proporre degli esercizi inerenti soprattutto per le possibili applicazioni in ambiti diversi come la fisica. Infatti capita spesso, nella trattazione di dati sperimentali, di dover rappresentare sui due assi cartesiani numeri diversi per ordine di grandezza, per i quali non è quindi possibile, o risulta scomodo, utilizzare la stessa unità di misura.

Lettura di grafici

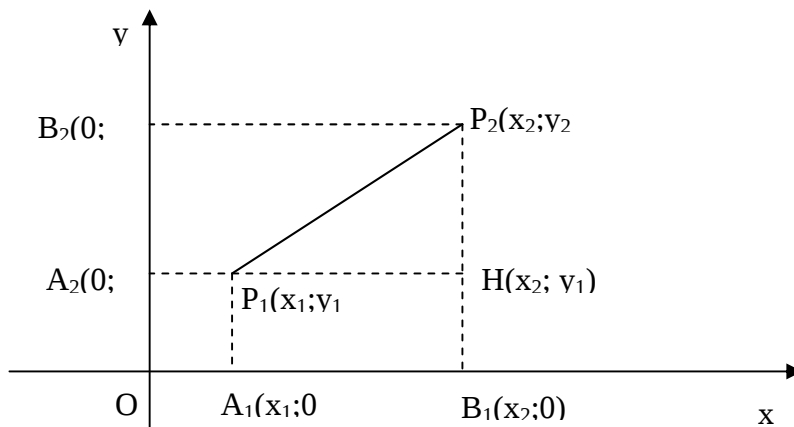
Per familiarizzare con il piano cartesiano, con i concetti di ascissa e ordinata e di quadranti, è utile proporre agli alunni esercizi come i seguenti: quali condizioni soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti che si trovano nelle parti di piano colorate in grigio nella seguente figura? E di quelli che si trovano nelle intersezioni delle diverse zone? (analizza i vari casi).



La distanza tra due punti

Per arrivare alla formula della distanza tra due punti nel piano partirei da due casi particolari: il primo è quello in cui i due punti hanno la stessa ordinata, il secondo quello in cui i punti hanno la stessa ascissa; in questi casi sarà molto semplice determinare tale distanza come differenza tra le ascisse dei due punti nel primo caso, e come differenza tra le loro ordinate nel secondo caso.

La generalizzazione per punti qualsiasi andrà dimostrata sfruttando il teorema di Pitagora:



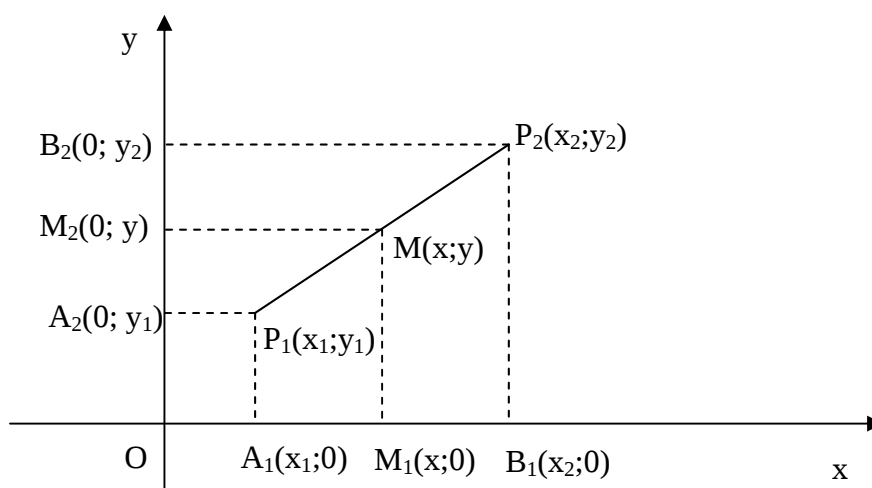
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Osservazione: Dopo che lo studente ha assimilato questi argomenti, sarà utile mostrare un esempio di sistema di riferimento nel piano non ortogonale e porre la seguente domanda:

“Vale ancora, in un sistema di riferimento come questo, il teorema di Pitagora?”(no)

Coordinate del punto medio di un segmento

Saranno introdotte a partire dal teorema di Talete



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Al termine della dimostrazione rigorosa, sarà interessante, per mettere alla prova la capacità degli alunni di ragionare, porre anche qui la domanda:

“Se lavorassimo in un sistema di riferimento non ortogonale, sarebbe ancora valida la formula per il calcolo delle coordinate del punto medio?”

Applicazione da proporre agli allievi come esercizio in classe:

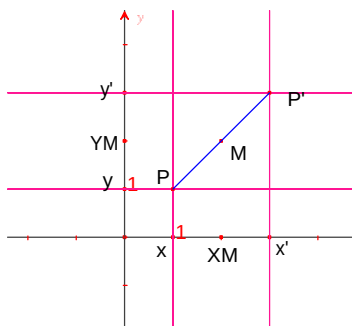
Come applicazioni degli argomenti trattati precedentemente sarà utile ricavare una formula generale per determinare le coordinate del baricentro di un triangolo qualunque, una volta note le coordinate dei tre vertici sul piano Cartesiano. In questo modo gli alunni potranno ben rendersi conto della possibilità, nel piano cartesiano, di studiare aspetti della geometria sintetica, anche da un punto di vista algebrico.

Occorre ricordare che il baricentro è il punto di intersezione delle mediane e si dovrà sfruttare il teorema di Talete per pervenire alla soluzione.

Applicazione alla fisica (del terzo anno di scuola): quando verrà affrontato l'equilibrio in fisica, si potranno determinare le coordinate del baricentro di un corpo omogeneo piano e regolare. Sfruttando le formule appena ricavate.

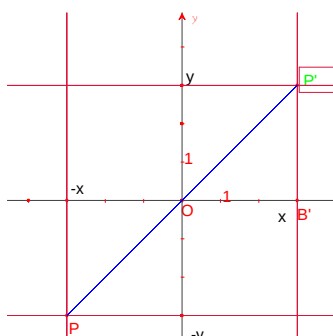
La simmetria centrale

Dopo aver dato la definizione di simmetria centrale come trasformazione geometrica, tramite rappresentazione nel piano cartesiano si dimostrerà agli alunni come si perviene alle espressioni analitiche che la rappresentano sfruttando le formule per il calcolo del punto medio di un segmento.



$$\begin{cases} x_M = \frac{x + x'}{2} \\ y_M = \frac{y + y'}{2} \end{cases}$$

E presenteremo il caso particolare in cui il centro della simmetria coincide con l'origine degli assi

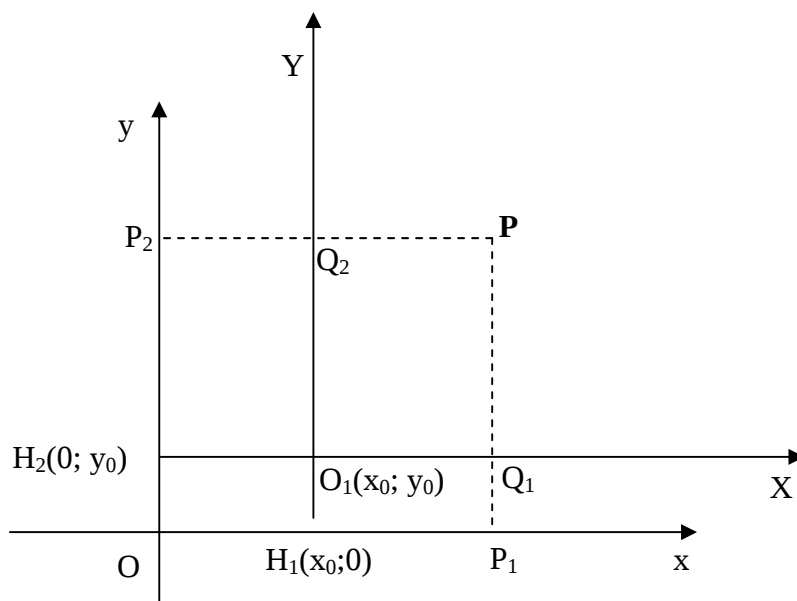


$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Sottolineeremo che fra le trasformazioni geometriche la simmetria centrale è una isometria, cioè una trasformazione in cui la distanza tra due punti qualsiasi A e B è uguale alla distanza tra le loro immagini A' e B'. Le isometrie trasformano figure geometriche in figure ad esse congruenti.

Traslazione nel piano

Anche in questo caso si introdurrà la formula che fornisce le coordinate di un punto in un nuovo sistema di riferimento partendo dalla rappresentazione nel piano cartesiano:



$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

Le traslazioni nel piano saranno argomento importantissimo al terzo anno quando gli studenti si accingeranno a studiare i moti relativi e le trasformazioni galileiane.

Rotazioni particolari

Accanto alla traslazione un'altro tipo fondamentale di movimento rigido del piano è la rotazione; pertanto introdurremo questo argomento sul piano Cartesiano, limitatamente agli angoli particolari di 45° , 90° , 180° .

L'argomento permette già di introdurre l'idea di angolo orientato, che potrà essere utile nello sviluppo della trigonometria nel quarto anno.

Rappresentazione di una funzione nel piano cartesiano

Un punto fondamentale dei programmi del biennio della scuola superiore è costituito dal concetto di funzione. *“Il concetto di funzione, fondamentale per stabilire relazioni di dipendenza, consente di visualizzare leggi e fenomeni in connessione interdisciplinare con altri ambiti...La nozione di grafico di una funzione va illustrata anche su esempi diversi, osservando che non è necessario attendere il possesso degli strumenti del calcolo differenziale per avere un'idea qualitativa dell'andamento di funzioni definite da semplici espressioni.*

In questo contesto l'impiego del calcolatore può essere importante purché lo studente abbia consapevolezza del carattere approssimato delle rappresentazioni ottenute”.

Alla luce di ciò è importante pensare di inserire nel percorso la trattazione del problema della rappresentazione grafica di una funzione.

il piano cartesiano ci permette di rappresentare graficamente una funzione matematica del tipo $y=f(x)$, dove x è la variabile indipendente e y la variabile dipendente.

L'argomento può essere introdotto proponendo alcuni esercizi da effettuare con il software Cabri Géomètre come i seguenti:

1) *Rappresentare, nel piano, un quadrato di lato variabile; esprimere algebricamente la relazione che lega il perimetro al lato; formare una tabella a due colonne in cui inserire a coppie le misure del lato e del perimetro; rappresentare tali coppie numeriche nel piano cartesiano.*

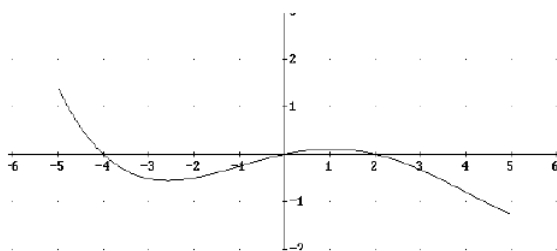
2) *Studiare l'area di un rettangolo APQD al variare della misura del segmento AP. Disegnare il grafico dell'area del rettangolo BCQP in funzione del lato AP.*

Da questi esempi gli alunni possono rendersi conto del particolare legame che lega le coppie di punti considerate (sono tutti allineati) e avere una prima visualizzazione di ciò che abbiamo definito grafico di una funzione nel piano cartesiano.

È poi utile generalizzare affrontando l'aspetto della rappresentazione grafica di una qualsiasi funzione del tipo $y=f(x)$.

Il diagramma della funzione $y=f(x)$ è il luogo geometrico dei punti del piano aventi per ascissa i valori della variabile indipendente x e per ordinata i valori corrispondenti della variabile dipendente y .

Dai quaderni dell'Umi è possibile trarre spunto per la preparazione di esercizi specifici atti a consolidare la comprensione di un argomento importante come quello della rappresentazione delle funzioni. Ad esempio, in Figura è riportato il grafico di una funzione, compreso nella striscia delimitata dalle rette $x = -5$ e $x = 5$. Per quali valori di x la funzione assume il valore zero?



Equazione di un luogo geometrico

A questo punto, poiché i ragazzi avranno già assimilato il concetto di grafico di una funzione, sarà possibile analizzare dal punto di vista algebrico e analitico un concetto già studiato nella geometria sintetica, e cioè il concetto di luogo geometrico.

Ricorderemo dalla geometria sintetica che un luogo geometrico è l'insieme di tutti e soli i punti che godono di una data proprietà. Come si può ottenere nel piano cartesiano l'equazione che rappresenta un luogo geometrico?

Un primo esempio che si potrà proporre è quello della determinazione dell'equazione dell'asse di un segmento: *Scrivere l'equazione del luogo dei punti equidistanti da due punti $A(-2;1)$ e $B(3;3)$ (asse del segmento AB).*

La condizione necessaria a determinare l'equazione dell'asse è $PA=PB$, dove le coordinate di P saranno le due incognite x e y . Imponendo tale condizione algebrica, e sfruttando quindi la formula della distanza tra due punti, si perverrà alla equazione dell'asse che è l'equazione di una retta.

N.B. A questo proposito, tale esempio dell'equazione dell'asse potrà essere ripreso quando si introdurrà la retta nel piano cartesiano, cioè, partendo da questo esempio, già noto agli alunni, ci si potrà domandare se esiste un'equazione generale per tutte le rette del piano!

Quindi, generalizzando, si potrà osservare che:

In un piano, sul quale è dato un riferimento cartesiano ortogonale, l'equazione di un luogo geometrico si ottiene traducendo la proprietà geometrica caratteristica dei punti del luogo in una relazione matematica tra le coordinate x e y di uno qualsiasi di tali punti del piano. Si otterrà così un'equazione del tipo $F(x;y)=0$, il cui grafico è il luogo richiesto e che è verificata da tutti e i soli punti del piano che godono della proprietà assegnata.

Il software Cabri Géomètre si dimostra efficacissimo nella visualizzazione dei luoghi geometrici del piano cartesiano. A questo proposito si potrà proporre un'attività di laboratorio con la quale rendere evidente le due facce della medesima medaglia della geometria analitica: mi riferisco alla possibilità di visualizzare con un ente geometrico (curva) nel piano una funzione nelle variabili x e y .

¹Assumeremo, per esempio, come funzione la

$$y = \frac{3x - 8}{x + 2}$$

e la rappresenteremo graficamente. Questo tipo di attività permette di prendere dimestichezza con comandi del software come la calcolatrice e il luogo geometrico. Con alcuni semplici passaggi gli alunni potranno osservare quale curva geometrica rappresenta il luogo dei punti del piano che soddisfano alla funzione di partenza.

¹ P.L. Pezzini, M. Garetto, Tecnologie per la didattica, Cabri, Laboratorio S.I.S. A.A. 2002/2003. quaderni didattici del dipartimento di matematica, Università di Torino

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.