Equazioni lineari

1.Destinatari, Contenuti e programmi ministeriali

[Questo percorso didattico (*Equazioni lineari*) si rivolge a studenti del Liceo Scientifico di ordinamento]. Per i licei di ordinamento, tale argomento è previsto al 2° anno, per il classico (2 ore settimanali a disposizione), ed al 1° anno per lo scientifico (5 ore settimanali a disposizione).
Nel P.N.I. l'argomento delle *equazioni lineari* è inserito nel Tema 2 (insiemi numerici e calcolo), al *punto e)* : *Equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado*. Nel caso del PNI vi sono 5 ore settimanali a disposizione. Solitamente, l'argomento è previsto al I° anno di corso. Per quanto riguarda i programmi "Brocca", si vedano i programmi PNI.

2. Prerequisiti

- Scomposizione di polinomi in fattori
- Calcolo algebrico con monomi, polinomi
- Frazioni algebriche
- Prodotti notevoli

3. Accertamento dei prerequisiti

Per la comprensione del seguente percorso didattico è indispensabile la conoscenza dei prerequisiti sopra elencati, il cui accertamento avverrà mediante una verifica. Se necessario si provvederà quindi al recupero dei prerequisiti mancanti. Si cercherà comunque di richiamare concetti e proprietà ogni volta che questi verranno utilizzati.

4. Obiettivi

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, competenze e abilità previste dall'unità didattica
- Comprendere le finalità e acquisire la competenza del calcolo algebrico
- Condurre ad un appropriato utilizzo del linguaggio matematico
- Individuare la strategia di soluzione più adeguata di un problema, in base alle indicazioni ricevute
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico matematico
- Acquisizione e consapevolezza dei vari collegamenti logici che partono dai sistemi lineari
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi
- Ampliare ulteriormente il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative
- Sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite
- Sviluppare la capacità di sistemare logicamente le conoscenze acquisite

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze
- Conoscere la classificazione e la risoluzione di equazioni di primo grado
- Riconoscere, impostare e risolvere problemi di primo grado

Abilità
- Saper risolvere equazioni di primo grado intere e fratte
- Saper individuare le equazioni algebriche di rette, precisandone le caratteristiche
- Saper impostare e risolvere problemi di primo grado

5. Metodologie didattiche

Durante lo svolgimento delle lezioni si cercherà di richiamare i concetti fondamentali. Al termine di ogni lezione si fisseranno le nuove nozioni attraverso lo svolgimento di esercizi. La metodologia sarà di tipo dialogico – frontale.

6. Materiali e strumenti utilizzati

- Lavagna e gessi
- Libro di testo

7. Controllo dell'apprendimento

L'andamento e l'efficacia della metodologia didattica utilizzata vengono controllate attraverso verifiche formative, discussioni in classe, svolgimento di esercizi in classe e a casa e attraverso verifiche sommative.

8. Misurazione

La misurazione si attua attraverso:

- Verifica per l'accertamento dei prerequisiti
- Prove orali individuali
- Verifica sommativa

9. Griglia per la misurazione

Per determinare gli esiti della verifica sommativa attribuiamo ad ogni esercizio un punteggio.
La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze e abilità per svolgerli.
Il punteggio finale ottenuto sarà poi trasformato in voto seguendo la griglia per la valutazione decisa in collegio docenti della relativa scuola. (Dipartimento di matematica)
Eventualmente, si seguiranno due griglie differenti: una per il biennio ed una per il triennio.

10. Recupero

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere, eventualmente, attività di recupero così articolate:

- Recupero da effettuare in classe durante le ore curricolari, attraverso la ripresa dei concetti non ben compresi e lo svolgimento di esercizi riguardanti tali argomenti.
- Attività pomeridiane con studenti carenti
- Assegnazione al singolo studente di esercizi mirati, in modo da risolvere i suoi problemi e superare le sue difficoltà

Per individuare gli argomenti che necessitano di recupero, sia a livello collettivo sia a livello individuale, ci si avvarrà di tutti i tipi di verifica.

11. Tempi dell' intervento didattico

Per l'U.D. sono previste circa 15 ore di lezione frontale più le ore dedicate ad esercizi in aula.

Sono escluse dal computo le ore necessarie per l' effettuazione e la correzione/discussione della verifica sommativa. I tempi per il raggiungimento degli obiettivi prefissati dipenderanno anche dal livello di apprendimento raggiunto dagli allievi.

Sviluppo dei contenuti

U.D. EQUAZIONI LINEARI

Dal problema all' equazione

Un problema è una proposizione con la quale, noti i valori di alcune grandezze (dati), si chiede di determinarne altri (valori incogniti), che abbiano con i dati determinate relazioni. Esempi:

a) Individuare il numero che addizionato a 21 dà come somma il doppio di 19.
b) Il perimetro di un rettangolo è 102 cm e l'altezza è 3/5 della base diminuiti di 17 cm. Calcolare l'area del rettangolo.

Se esistono valori dell' incognita (o delle incognite) che verificano le condizioni imposte dal problema, questo si dice possibile ; questo valore (o tale insieme di valori) si dice soluzione del problema.
L' enunciato del problema pone sempre tra i dati e l' incognita un legame, cioè una relazione,che si può scrivere sotto forma di uguaglianza. E' proprio attraverso tale uguaglianza che avviene la ricerca dei valori incogniti del problema.
Sotto opportune condizioni, tale uguaglianza viene detta equazione, la quale ha come obiettivo naturale, quello di " guidarci " verso la soluzione del problema.

Uguaglianze tra espressioni

Siano date le espressioni letterali (polinomi):

$X(a) = a^2 - 3a$ e $Y(a) = a(a-3)$,

dove la lettera a rappresenta un generico numero reale.
I valori numerici rappresentati dalle due espressioni dipendono dai valori che sono attribuiti alla lettera a.

$X(a) = Y(a)$, ossia:

$a^2 - 3a = a(a-3)$. (1)

La (1) rappresenta un'uguaglianza sempre vera ossia indipendentemente dai valori numerici che siano attribuiti alla lettera a. Si dice che essa è un'uguaglianza incondizionata, la quale è denominata identità.

L'espressione scritta prima del segno di uguaglianza rappresenta il primo membro dell'identità, quella scritta dopo tale segno ne rappresenta il secondo membro.

Siano dati i seguenti polinomi di primo grado in m : $P(m) = 2m - 7$ e $Q(m) = m + 4$.

Per $m = 4$, si ha $P(4) \neq Q(4)$.

Per $m = 11$, si ha $P(11) = Q(11)$.

Si può dire allora che $2m - 7 = m + 4$ è un'uguaglianza condizionata, la quale è denominata equazione.

Definizioni :

IDENTITA':L'identità è un' uguaglianza letterale verificata per qualsiasi valore attribuito alle lettere che vi compaiono.

EQUAZIONE :Un'equazione algebrica è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche che risulta verificata solo da particolari valori delle incognite in essa contenute.

(conviene dare alcuni esempi di identità)

Bisogna osservare, però, che esistono anche uguaglianze tra espressioni letterali che non sono verificate per alcun valore delle incognite in esse contenute. Tali uguaglianze vengono dette *impossibili* ; esempio $b^2 + 3 = 0$

<u>Equazioni.</u> <u>Classificazione</u>

Data un’ equazione, le lettere, dai valori delle quali dipende se l’ uguaglianza è verificata o no, sono dette <u>incognite</u> (meglio ancora <u>variabili</u>).

Gli eventuali valori della variabile, che fanno assumere valori uguali ai due membri dell’ equazione (ossia, la verificano),si dicono <u>soluzioni</u>, o <u>radici</u> dell’ equazione.

L’ insieme S di tutte le soluzioni si chiama <u>insieme delle soluzioni</u>. Occorre a questo punto fare la seguente osservazione:

un’ uguaglianza che può essere possibile in un certo insieme numerico, può essere impossibile in un insieme numerico diverso. Ad esempio, l’ equazione :

$2x+1=5x-3$

è verificata per $x=\frac{4}{3}$, e per nessun altro valore di x .Però, se si vuole che x assuma soltanto valori *interi*, allora tale uguaglianza risulta impossibile nei *numeri interi*.

Questo esempio mette in luce che l’insieme delle soluzioni di un’ equazione dipende dal <u>dominio</u> dei due membri dell’ equazione; In base a quanto detto, data l’ equazione $A(x)=B(x)$ in cui la variabile è x , se D è il dominio comune delle espressioni A(x) e B(x) , in generale si ha :

$S=\{r \mid r \in D \quad \text{e} \quad A(r)=B(r)\}$

D è detto dominio dell’ equazione.

In questi termini, se :

$S \subset D$, l’ equazione è <u>determinata</u>, (esempio, con $D=\square$, $x-2=6 \Rightarrow S=\{8\}$)

$S=D$, l’ equazione è un’ <u>identità</u>, (esempio, con $D=\square$, $x^2-x=x(x-1) \Rightarrow S=\square$)

$S=\varnothing$, l’ equazione è <u>impossibile</u> (esempio, con $D=\square$, $x-1=x+3 \Rightarrow S=\varnothing$)

Quando saranno consolidate le tecniche di risoluzione, è opportuno fornire esempi di equazioni le cui soluzioni sono di natura diversa in base al dominio scelto.
Un’equazione si dice <u>algebrica</u> se in essa compaiono soltanto operazioni di tipo algebrico: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza, estrazione di radice.

Un’equazione algebrica si dice <u>razionale</u> se in essa non compaiono operazioni di estrazione di radice.

Un’equazione razionale si dice <u>intera</u> se la variabile non compare al denominatore di qualche frazione.

Un’equazione razionale si dice <u>fratta</u> se la variabile è presente nel denominatore di qualche frazione.

Un’ equazione si dice:

<u>numerica</u>, se oltre all’ incognita vi figurano solo numeri,

letterale, se contiene anche altre lettere da considerare costanti

Un'equazione algebrica intera si dice ridotta in forma normale se è del tipo $A(x) = 0,$ dove il primo membro è rappresentato da un polinomio in cui è stata fatta la riduzione dei termini simili.

(Fornire ESEMPI DI EQUAZIONI ALGEBRICHE INTERE A UNA INCOGNITA RIDOTTE IN FORMA NORMALE)

Si dice grado di un'equazione algebrica con una incognita ridotta a forma normale il massimo esponente che l'incognita presenta nell'equazione.

Si dimostra che il numero massimo delle radici di un'equazione algebrica è espresso dal grado dell'equazione.

Per riconoscere il grado di un' equazione intera occorre ridurla a forma normale.

Due equazioni algebriche si dicono equivalenti se sono dello stesso grado e ammettono le stesse radici.

Per risolvere un' equazione, si cerca di sostituirla con un' altra equivalente, ma di forma più semplice, applicando opportune trasformazioni, si arriverà a dover esaminare l'equazione equivalente alle precedenti della forma più semplice possibile, stabilendo se l'equazione di partenza (equivalente a quella trovata), è identica, impossibile, o determinata, e, in quest' ultimo caso, determinandone la soluzione.
Tali trasformazioni derivano da due teoremi detti Principi di equivalenza delle equazioni.

Primo principio di equivalenza delle equazioni:
se si addiziona o si sottrae ai due membri di dominio D di un'equazione, uno stesso numero o una stessa espressione letterale, anch' essa di dominio D, si ottiene un'equazione equivalente alla data.
(fare esempi, partendo da casi numerici,per poi considerare il caso letterale)
E' importante sottolineare il fatto che l' espressione letterale che si aggiunge (o si toglie) ad ambo i membri dell' equazione, deve avere lo stesso dominio dell'equazione. In caso contrario le equazioni potrebbero non essere equivalenti.

Vediamo ora alcune conseguenze di questo principio:

TRASPORTO DEI TERMINI DA UN MEMBRO ALL'ALTRO DI UN'EQUAZIONE

In generale vale **la regola del trasporto:**
in ogni equazione un termine qualsiasi può essere trasportato da un membro all'altro, purchè sia cambiato di segno. In questo modo si ottiene un'equazione equivalente a quella iniziale.
(fare esempi, prima numerici,poi letterali)

ELIMINAZIONE DEI TERMINI UGUALI NEI DUE MEMBRI DI UN'EQUAZIONE

In generale vale la regola:

se due termini uguali figurano uno nel primo membro, l'altro nel secondo membro di un'equazione, possono essere eliminati.
Osserviamo in questo caso la possibilità che vengano considerate, in conseguenza di tale procedimento,soluzioni che facciano perdere di significato ai termini dell' altra. Ad esempio:

$x+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ non è equivalente a $x=1$

in quanto la soluzione della seconda equazione fa perdere di significato al termine soppresso.

Consideriamo adesso l' equazione
$2x-3=5$

moltiplicando i due membri per x , diventa:
$2x^2-3x=5x$

Tali equazioni non sono equivalenti, perché la prima ha l' unica soluzione *x = 4* , mentre la seconda (si può vedere che..) ha le due soluzioni *x = 4* e *x = 0* .
Perciò, quando si moltiplicano i due membri per un fattore contenente la variabile , si possono introdurre delle soluzioni estranee. Occorre, in tal caso, discutere ogni soluzione dell' equazione risultante per escludere quelle estranee. <u>Tali soluzioni sono quelle che annullano il termine moltiplicato, senza verificare l' equazione proposta</u>.
<u>Diventa necessaria la condizione che il termine moltiplicatore non si annulli, se si vuole ottenere un' equazione equivalente a quella data</u>.

Il discorso è in un certo qual modo opposto, se si vuole dividere entrambi i membri di un' equazione per un termine *M(x)* contenente la variabile *x* . Per esempio, l' equazione:

$x^2-20=x$, dividendone i due membri per x + 4 , diventa

$$\frac{x^2-20}{x+4}=\frac{x}{x+4}\Rightarrow\frac{x^2-20-x}{x+4}=0\Rightarrow\frac{(x+4)(x-5)}{x+4}=0\Rightarrow x-5=0$$

Quest' ultima equazione ammette la soluzione x = 5 , che è anche la soluzione dell' equazione di partenza.
Però, l' equazione proposta ammette anche la soluzione x = - 4 , che è proprio la soluzione di x + 4 =0 , ottenuta uguagliando a zero il polinomio per cui sono stati divisi entrambi i membri.
L' equazione ottenuta non è equivalente a quella data.
Perciò, quando si dividono i due membri per un termine M(x) contenente la variabile, si possono sopprimere delle soluzioni dell' equazione di partenza, e precisamente quelle dell' equazione *M(x) = 0*. Occorre, in tal caso, aggiungere alle soluzioni dell' equazione trasformata, anche le eventuali soluzioni dell' equazione *M(x) = 0* che verificano anche l' equazione data.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema, chiamato **secondo principio di equivalenza delle equazioni:**
se si moltiplicano o si dividono i due membri di un'equazione $A(x)=B(x)$ *di dominio D per uno stesso numero diverso da zero, oppure per una stessa espressione algebrica M(x) , anch' essa di dominio D e che non si annulli mai (fatta salva l' osservazione precedente), si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

Dal **secondo principio di equivalenza delle equazioni** derivano alcune importanti conseguenze.

<u>Divisore comune</u>

Se tutti i termini dei due membri dell' equazione sono divisibili per uno stesso numero, si può sostituire all' equazione data, quella equivalente, ottenuta dividendo tutti i termini per tale divisore comune.

Eliminazione dei denominatori

In generale:
un'equazione con coefficienti o termini noti frazionari si può trasformare in una equazione equivalente senza frazioni se si riducono i due membri al minimo comune denominatore e si moltiplicano poi per esso.

<u>Cambio dei segni di un' equazione</u>

In generale:
Se si cambia il segno a tutti i termini di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente alla data.

Osservazione : è importante rimarcare il fatto che le tecniche di calcolo viste, come il trasporto e l'eliminazione dei denominatori (e come tutte le altre) sono <u>conseguenze dei principi di equivalenza</u> delle equazioni.

<u>Equazioni lineari</u>

Un'<u>equazione lineare</u> (nella variabile x) è un'equazione che si riduce in forma normale ad un binomio di primo grado nella variabile x , uguagliato a zero :

$$Ax + B = 0$$

dove A e B sono costanti. Le equazioni lineari si chiamano anche <u>equazioni di primo grado</u>**.**

A è detta *coefficiente dell' incognita*.
B è detta *termine noto*.

Esempi di equazioni lineari:

- $3x + 2 = x - 1$
- $x + 3 = x$
- $x - 1 = 0$

Data un' equazione lineare di dominio D = $\mathbb{R}$ nella variabile x , $Ax + B = 0$ si ha che :

Se $A = 0$ e $B = 0$, allora $S = \mathbb{R}$ (equazione identica). (1)

Se $A = 0$ e $B \neq 0$, allora $S = \{\ \}$ (non ammette soluzione). (2)

Se $A \neq 0$, allora $S = \{- B/A\}$ (ammette l'unica soluzione $x = - B/A$). (3)

<u>Occorre fare esempi di equazioni identiche, impossibili, indeterminate.</u>

Osservazione : se l' equazione è determinata, e l' insieme soluzione è

$$S = \left\{ -\frac{2}{7} \right\}$$

si dice anche che l' equazione è VERIFICATA per $x = -\frac{2}{7}$. Questo perché è possibile VERIFICARE che l' uguaglianza sia soddisfatta da tale valore, semplicemente andando a sostituire nell' equazione di partenza (o in una qualsiasi delle uguaglianze equivalenti) alla variabile x la soluzione da noi trovata. Se si arriva,svolgendo i calcoli, ad un' uguaglianza tra i due membri, l' equazione è *verificata* per tale valore, e la soluzione trovata è appropriata. In caso contrario, invece, l' equazione *non* è *verificata* per tale valore.

Equazioni frazionarie

Si ricorda che " un'equazione razionale si dice *fratta* se l'incognita è presente nel denominatore di qualche frazione ".
Facciamo vedere ora come la risoluzione di un'equazione frazionaria, si possa far dipendere dalla risoluzione di un' equazione intera.

In generale, un' equazione frazionaria si può presentare nella seguente forma:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$$

dove *A(x)* , *B(x)* , *C(x)* , *D(x)* sono polinomi nella variabile x e *B(x)* e *D(x)* non sono polinomi nulli ed almeno uno di loro non è costante.
Diciamo subito che :
se un' equazione frazionaria è determinata, nessuno dei valori della variabile che rendono nulli i denominatori può essere soluzione dell' equazione stessa.

<u>Esclusi quindi tali valori per la variabile dall' insieme di definizione</u>, si può, nel caso più generale, applicare il *secondo principio d' equivalenza*, come segue:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = C(x)B(x)$$

eliminando dalle soluzioni di quest'ultima, quelle eventuali che rendono nullo il prodotto $B(x)D(x)$

<u>Fare esempi in cui le C.E. sono rispettate, e casi in cui non lo sono.</u>

<u>Equazioni letterali</u>

Finora si sono considerate solo equazioni a coefficienti numerici, in cui appunto non figurano altre lettere oltre alla variabile.
In un' equazione possono figurare, oltre alla variabile, altre lettere *a,b,c,d,….* Dette *parametri* che si suppone rappresentino valori numerici noti.
In tal caso l'equazione assume una forma più generale,e diventa una particolare equazione numerica quando si assegna ad ogni lettera un determinato valore numerico.
Queste equazioni sono dette *equazioni letterali*.
Risolvere un' equazione letterale significa risolvere le infinite equazioni numeriche che essa rappresenta. Se l'equazione è *determinata* ed è di primo grado, la sua soluzione è in generale data da un'espressione contenente i parametri, ma può anche ridursi, in particolari casi, ad un numero determinato.
Anche queste equazioni si risolvono applicando le regole già esposte per le equazioni numeriche.

E' importante osservare che i valori numerici che le lettere possono assumere devono essere tali da non far perdere di significato a qualche termine dell' equazione.
Inoltre, può accadere che per particolari valori dei parametri, l'equazione risulti impossibile o identica; in tal caso occorre precisare i valori di tali parametri.
Fare queste osservazioni su di un'equazione, significa *discutere l'equazione*.
<u>Fare qualche esempio</u>

<u>Applicazioni</u>

E' molto vasto il panorama applicativo delle equazioni lineari. Oltre alla risoluzione di problemi di primo grado (ed alla loro discussione), le equazioni lineari trovano utilizzo intenso nella fisica: in particolare, nell' ultima unità didattica sviluppata (terzo anno del liceo), verrà evidenziato il modo con il quale l' equazione lineare diventa uno strumento per indicare le relazioni tra grandezze fisiche della meccanica.
Soprattutto nel biennio, le equazioni di primo e secondo grado vengono spesso impiegate nella risoluzione di problemi di geometria piana.