

U. D. 3 LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

1. Destinatari questa unità didattica è destinata a studenti del IV[^] anno del liceo scientifico tradizionale. Le ore settimanali di matematica previste sono 3. nei programmi ministeriali questo argomento viene trattato nell'ambito delle funzioni goniometriche:
“Funzioni goniometriche. Curve dei seni e delle tangenti. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. **Qualche semplice equazione goniometrica**. Risoluzione dei triangoli rettilinei”.

2. Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere le equazioni goniometriche elementari;
- Conoscere i vari tipi di equazioni goniometriche;
- Conoscere le disequazioni goniometriche elementari;
- Conoscere le disequazioni lineari in seno e coseno;
- Conoscere le disequazioni omogenee in seno e coseno.

Abilità

- Saper risolvere equazioni goniometriche elementari;
- Saper risolvere equazioni goniometriche di vari tipi;
- Saper risolvere disequazioni goniometriche elementari;
- Saper risolvere disequazioni goniometriche di vari tipi.
- Saper discutere le soluzioni delle equazioni goniometriche;
- Saper ricondurre equazioni goniometriche a equazioni goniometriche elementari;
- Saper discutere le soluzioni delle disequazioni goniometriche;
- Saper ricondurre disequazioni goniometriche a disequazioni goniometriche elementari.

3. Contenuti

- Equazioni goniometriche elementari
- Vari tipi di equazioni goniometriche
- Equazioni riducibili a omogenee
- Particolari equazioni goniometriche elementari
- Disequazioni goniometriche elementari
- Disequazioni riconducibili a disequazioni elementari
- Disequazioni lineari in seno e coseno
- Disequazioni omogenee in seno e coseno
- Risoluzione grafica di equazioni omogenee o riducibili

4. Prerequisiti

- Funzioni goniometriche e relativi grafici;
- Concetto di funzione inversa;
- Formule goniometriche.
- Equazioni e disequazioni di 1° e 2° grado

5. Metodologie didattiche

E' preferibile, oltre al metodo algebrico, utilizzare anche quello grafico, in quanto consente di verificare in modo molto intuitivo la correttezza della soluzione algebrica. Le strategie didattiche che si intendono adottare sono: lezioni frontali, lettura guidata del libro di testo, discussione in classe per dar luogo a lezioni di tipo dialogico, si farà attenzione a fare molti esempi una volta che si è introdotto un nuovo concetto perché esso possa essere più chiaro. Si assegneranno esercizi per

casa, facendo attenzione a correggere in classe quelli che hanno dato maggiore difficoltà. L'utilizzo dei software didattici come Cabri e Derive saranno utili per la risoluzione grafica.

6. Tempi previsti

Equazioni goniometriche	4 ore
Disequazioni goniometriche	4 ore
Attività in laboratorio	2 ore
Verifica sommativa	2 ore
Consegna e correzione	1 ora
Totale	13 ore (circa un mese di lezione)

7. Sviluppo dei contenuti

1 Equazioni goniometriche

1.1 Generalità sulle equazioni goniometriche

Definizione. Un'espressione letterale si dice **goniometrica** se contiene delle funzioni goniometriche di variabili angolari.

Definizione. Una uguaglianza tra due espressioni goniometriche viene detta **equazione** se risulta verificata per particolari valori delle variabili angolari che in essa figurano (le variabili vengono dette **incognite**).

Si chiama **soluzione** dell'equazione ogni valore che, sostituito all'incognita, rende il primo membro uguale al secondo.

Un'equazione si dice **impossibile** se non ha soluzioni.

1.2 Equazioni goniometriche elementari

La risoluzione delle equazioni goniometriche verrà ricondotta ad una dei seguenti tipi di equazione:

a) $\sin x = m$,

b) $\cos x = m$,

c) $\tan x = m$ oppure $\cot x = m$

Dove x è l'ampiezza di un angolo incognito ed m un dato numero reale. Equazioni di questo tipo vengono dette **elementari**.

a) L'equazione $\sin x = m$ ha soluzioni solo se $-1 \leq m \leq 1$. Se vale questa condizione esiste certamente un angolo α la cui misura soddisfa l'equazione proposta (cioè tale che per esso sia $\sin \alpha = m$); ma allora anche l'angolo $\pi - \alpha$ soddisferà la medesima equazione, essendo $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Soddisferanno inoltre l'equazione data tutti gli angoli che differiscono da α e da $\pi - \alpha$ di multipli interi di 2π . L'equazione $\sin x = m$ ha quindi infinite soluzioni, date dalle formule:

$$x = \alpha + 2k\pi$$

■

$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

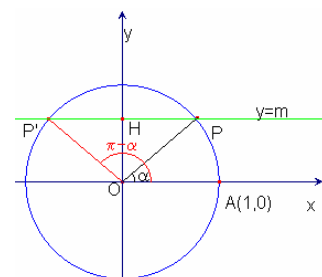
nelle quali k rappresenta un qualunque numero intero (positivo, negativo o nullo).

Metodo grafico

Tali soluzioni possono essere ottenute graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $y = m$.

La retta, se $|m| \leq 1$, interseca la circonferenza in due punti **P** e **P'**, che sono rispettivamente gli estremi degli archi di misura:

$$x = \alpha \quad x = \pi - \alpha$$



b) Anche l'equazione $\cos x = m$ ha soluzioni solo se $-1 \leq m \leq 1$. Se questa condizione è verificata esiste certamente un angolo α per il quale è $\cos \alpha = m$; ma se il valore α soddisfa l'uguaglianza data questa è soddisfatta anche dal valore $-\alpha$, essendo $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Sono pertanto soluzioni dell'equazione gli infiniti valori.

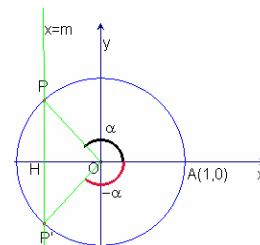
$$\blacksquare \quad x = \pm \alpha + 2k\pi$$

con k numero intero qualsiasi.

Metodo grafico

Graficamente tali soluzioni si possono ottenere intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $X = m$. I punti P e P' sono rispettivamente estremi degli archi:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad x = -\alpha + 2k\pi$$



c) L'equazione $\tan x = m$ ha soluzione per qualunque valore reale di m . Se α è uno dei valori che soddisfa l'uguaglianza, tutte le infinite soluzioni dell'equazione sono date dalla formula:

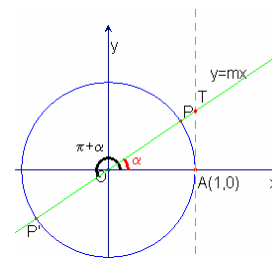
$$\blacksquare \quad x = \alpha + k\pi$$

con k numero intero qualsiasi.

Metodo grafico

Graficamente esse si ottengono intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $y = mx$ passante per il punto $T(1; m)$. I punti P e P' sono, rispettivamente, gli estremi degli archi:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad x = \pi + \alpha + 2k\pi$$



Lo stesso dicasi per l'equazione: $\cot x = m$

1.3 Vari tipi di equazioni goniometriche.

Equazioni risolubili mediante l'applicazione delle varie relazioni goniometriche

Molte equazioni goniometriche possono venir ricondotte ad equazioni goniometriche elementari mediante l'applicazione delle relazioni che intercorrono tra funzioni goniometriche di uno stesso angolo o di angoli associati, oppure mediante le formule che abbiamo visto precedentemente.

Equazioni goniometriche omogenee in seno e coseno.

L'equazione $a \sin x + b \cos x = 0$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$ è omogenea di primo grado in $\sin x$ e $\cos x$.

I valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni di questa equazione in quanto per tali valori il coseno si

annulla mentre il seno vale $+1$ o -1 . Possiamo pertanto supporre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (e pertanto

$\cos x \neq 0$) e dividere entrambi i membri dell'equazione per $\cos x$, senza perdere delle soluzioni. Così facendo otteniamo l'equazione equivalente alla data:

$$a \tan x + b = 0$$

di semplice soluzione.

Possiamo distinguere diverse equazioni di questo tipo secondo il loro grado.

L'equazione

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

è omogenea di secondo grado in $\sin x$ e $\cos x$.

Se $a \neq 0$ l'equazione non ha per soluzioni i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Pertanto possiamo dividere i due membri dell'equazione per $\cos^2 x$, senza perdere delle soluzioni ottenendo un'equazione algebrica di II° grado in $\tan x$.

Al contrario se $a = 0$ dividendo per $\cos^2 x$ si perdono delle soluzioni (i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$); in tal caso si deve raccogliere il fattore $\cos^2 x$, comune a tutti i termini del membro di sinistra e applicare la legge di annullamento del prodotto.

Se $a = 0$ e $c \neq 0$, non ha per soluzioni i valori $x = k\pi$. In questo caso si dividono entrambi i membri per $\sin^2 x \neq 0$, ottenendo un'equazione algebrica di II° grado in $\cot x$.

Se $a = 0$ e $c = 0$ si procederà operando opportuni raccoglimenti a fattor comune.

Si risolvono nel modo descritto anche le equazioni omogenee in seno e coseno di grado superiore al 2° e le equazioni non omogenee ma riducibili a tali.

Equazioni lineari in seno e coseno.

Sono chiamate così le equazioni nella forma:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Con a, b, c , numeri reali assegnati tutti diversi da zero.

Per risolvere l'equazione lineare con i tre coefficienti diversi da zero conviene sostituire al posto di

$\sin x$ e di $\cos x$ le loro espressioni razionali in $\tan \frac{x}{2}$, date dalle formule:

$$\blacksquare \quad \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

valide, come s'è detto, per $x \neq \pi + 2k\pi$.

Con questa sostituzione l'equazione lineare si trasforma nella seguente:

$$\frac{2a \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = c$$

e quindi in un'equazione di 2° grado nell'incognita $\tan \frac{x}{2}$:

$$(b + c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2a \tan \frac{x}{2} + c - b = 0$$

Se quest'ultima ha due soluzioni reali, che indicheremo con r_1 ed r_2 , si ottengono le due equazioni elementari:

$$\tan \frac{x}{2} = r_1 \quad \tan \frac{x}{2} = r_2$$

di semplice soluzione

L'equazione lineare proposta potrebbe avere come soluzioni anche i valori $x = \pi + 2k\pi$. Questo succede quando $b+c=0$ e pertanto quando l'equazione trasformata, intera in $tg \frac{x}{2}$, è di 1° grado.

Osservazione questo metodo, presentato in tutti i testi di trigonometria, è tuttavia un po' laborioso e, di conseguenza, può facilmente generare errori di calcolo. Più pratico risulta essere il **metodo di sostituzione** utilizzato più avanti nella risoluzione delle **disequazioni lineari in seno e coseno**.

Equazioni riducibili a omogenee

L'espressione

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0$$

non è omogenea, essendo presente il termine noto d di grado 0. Essa però può essere trasformata in omogenea di 2° grado moltiplicando tale termine per la somma $\sin^2 x + \cos^2 x$, uguale a 1 per ogni valore di x .

Particolari equazioni goniometriche elementari

➤ L'equazione $\sin \alpha = \sin \alpha'$

Si risolve tenendo conto della definizione della funzione seno e della sua periodicità. Osserviamo che:

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' + 2k\pi \vee \alpha + \alpha' = \pi + 2k\pi$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché due angoli abbiano lo stesso seno è che siano congruenti o supplementari, a meno di un numero intero di angoli giro.

Analogamente, sfruttando le proprietà degli archi associati, si risolvono tutte le altre equazioni di questo tipo.

Altre equazioni goniometriche elementari

In generale: quando siamo in presenza di equazioni che contengono più funzioni goniometriche, si deve:

1. esprimere le funzioni mediante una sola di esse, utilizzando eventualmente le formule goniometriche;
2. risolvere l'equazione ottenuta rispetto a tale funzione considerata come incognita;
3. risolvere le equazioni elementari che si ottengono.

2 DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Definizione. Una disequazione si dice goniometrica se contiene almeno una funzione goniometrica.

2.1 Disequazioni goniometriche elementari

Vengono chiamate così le disequazioni del tipo:

1. $\sin x > m$ ($\sin x \geq m$) oppure $\sin x < m$ ($\sin x \leq m$)
2. $\cos x > m$ ($\cos x \geq m$) oppure $\cos x < m$ ($\cos x \leq m$)
3. $\tan x > m$ ($\tan x \geq m$) oppure $\tan x < m$ ($\tan x \leq m$)
4. $\cot x > m$ ($\cot x \geq m$) oppure $\cot x < m$ ($\cot x \leq m$)

Nelle quali m rappresenta un qualsiasi numero reale.

Risolvere queste disequazioni significa ricercare tutti i valori dell'incognita x per i quali la funzione goniometrica in esame risulta maggiore o minore del numero m .

È possibile risolvere tali disequazioni in due modi:

- Utilizzando il grafico della relativa funzione goniometrica;
- Utilizzando la circonferenza goniometrica.

Disequazioni lineari in seno e coseno

Forniamo un metodo grafico per la risoluzione della disequazione:

$$asenx + b \cos x + c > 0 \quad (\text{oppure } asenx + b \cos x + c < 0)$$

Posto: $\sin x = Y$ e $\cos x = X$

Risolvere la disequazione data equivale a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} aY + bX + c > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè a determinare i punti della circonferenza goniometrica appartenenti al semipiano:

$$aY + bX + c > 0$$

Tali punti sono estremi degli archi soluzioni della disequazione lineare data.

Disequazioni omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

Per risolvere un'equazione di grado n in $\sin x$ e $\cos x$ dobbiamo distinguere due casi:

- n dispari:** possiamo ad esempio considerare una disequazione di primo grado, essa si può risolvere graficamente considerando un sistema come sopra.

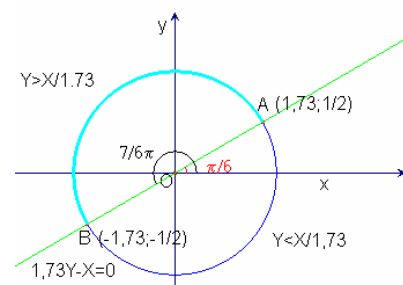
Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{3}Y - X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Ottenuto sostituendo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$.

La disequazione è soddisfatta per $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$



- n pari:** con opportune semplificazioni si cerca di ricondursi ad una disequazione espressa con una sola funzione goniometrica.

Esempio: $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x > 0$.

Poiché, per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos^2 x$ è positivo, possiamo dividere per $\cos^2 x$ ottenendo la disequazione:

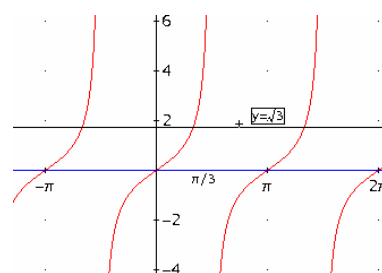
$$tg^2 x - \sqrt{3}tgx > 0$$

Le radici dell'equazione associata sono

$$tgx = 0 \quad e \quad tgx = \sqrt{3}$$

Quindi la disequazione è verificata per gli archi per i quali:

$$tgx < 0 \quad o \quad tgx > \sqrt{3}$$



cioè per $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < k\pi$ o $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

a questi valori occorre aggiungere:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

per i quali la disequazione data risulta verificata. In definitiva, unendo le soluzioni, la disequazione è soddisfatta per

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \pi + k\pi.$$

12. Griglia per la misurazione

Per determinare gli esiti della verifica sommativa attribuiamo a ciascun esercizio che ne fa parte un punteggio. Il punteggio di un esercizio rispetto al punteggio di un altro rispecchia le differenze in termini di conoscenze, competenze e capacità che sono coinvolte dagli esercizi.

Nell'attribuire il punteggio completo, nullo o una frazione intermedia del punteggio teniamo conto dei seguenti indicatori (sono quelli suggeriti dal Ministero della Pubblica Istruzione per la correzione della prova scritta di matematica):

- conoscenze specifiche;
- competenze nell'applicare le procedure e i concetti acquisiti;
- capacità logiche ed argomentative;
- completezza della risoluzione;
- correttezza della risoluzione e dell'esposizione.

La necessità di attribuire una parte del punteggio totale di un esercizio si presenta di frequente ed è una procedura delicata. Per evitare disparità di trattamento, ravvisati gli errori che intervengono, si decide quanto farli pesare, di quanto calare il punteggio di fronte a tali errori, e la stessa diminuzione di punteggio è applicata ad ogni studente che incorra nello stesso errore.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.