Sistemi lineari

1. Destinatari e Contenuti

[Questo percorso didattico (*Sistemi lineari*) si rivolge a studenti del Liceo Scientifico di ordinamento]. Per i licei di ordinamento, tale argomento è previsto al 3° anno, per il classico (3 ore settimanali a disposizione), ed al 2° anno per lo scientifico (5 ore settimanali a disposizione).
Nel P.N.I. l'argomento dei *Sistemi lineari* è inserito nel Tema 2 (*Insiemi numerici e calcolo*), al *punto e)* : *Equazioni, disequazioni e sistemi di primo grado*. Nel caso del PNI vi sono 5 ore settimanali a disposizione. Solitamente, l'argomento è previsto al II° anno di corso. Per quanto riguarda i programmi "Brocca", si vedano i programmi PNI.

2. Prerequisiti

- Scomposizione di polinomi in fattori
- Calcolo algebrico con monomi, polinomi
- Frazioni algebriche
- Prodotti notevoli
- Ridurre a forma normale equazioni
- Utilizzare il linguaggio degli insiemi
- Risoluzione di equazioni lineari

3. Accertamento dei prerequisiti

Per la comprensione del seguente percorso didattico è indispensabile la conoscenza dei prerequisiti sopra elencati, il cui accertamento avverrà mediante una verifica. Se necessario si provvederà quindi al recupero dei prerequisiti mancanti. Si cercherà comunque di richiamare concetti e proprietà ogni volta che questi verranno utilizzati.

4. Obiettivi

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, competenze e abilità previste dall'unità didattica
- Comprendere le finalità e acquisire la competenza del calcolo algebrico
- Condurre ad un appropriato utilizzo del linguaggio matematico
- Individuare la strategia di soluzione più adeguata di un problema, in base alle indicazioni ricevute
- Condurre ad un appropriato utilizzo del lessico matematico
- Acquisizione e consapevolezza dei vari collegamenti logici che partono dai sistemi lineari
- Riconoscere il contributo dato dalla matematica allo sviluppo delle scienze sperimentali

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi
- Ampliare ulteriormente il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative

- Sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite
- Sviluppare la capacità di sistemare logicamente le conoscenze acquisite

OBIETTIVI SPECIFICI

Conoscenze

- Conoscere come si presenta un sistema lineare
- Conoscere la classificazione dei sistemi lineari
- Conoscere i metodi di risoluzione dei sistemi lineari

Abilità

- Classificare i sistemi di equazioni
- Risolvere un sistema di equazioni
- Applicare il concetto di sistema lineare alla risoluzione di problemi

5. Metodologie didattiche

Durante lo svolgimento delle lezioni si cercherà di richiamare i concetti fondamentali. Al termine di ogni lezione si fisseranno le nuove nozioni attraverso lo svolgimento di esercizi.

6. Materiali e strumenti utilizzati

- Lavagna e gessi
- Libro di testo

7. Controllo dell'apprendimento

L'andamento e l'efficacia della metodologia didattica utilizzata vengono controllate attraverso verifiche formative, discussioni in classe, svolgimento di esercizi in classe e a casa e attraverso verifiche sommative.

8. Misurazione

La misurazione si attua attraverso:

- Verifica per l'accertamento dei prerequisiti
- Prove orali individuali
- Verifica sommativa

9. Griglia per la misurazione

Per determinare gli esiti della verifica sommativa attribuiamo ad ogni esercizio un punteggio.

La diversità di punteggio tra i vari esercizi rispecchia i livelli diversi di difficoltà in termini di conoscenze e abilità per svolgerli.
Il punteggio finale ottenuto sarà poi trasformato in voto seguendo la griglia per la valutazione decisa in collegio docenti della relativa scuola. (Dipartimento di matematica)
Eventualmente, si seguiranno due griglie differenti: una per il biennio ed una per il triennio.

10. Recupero

Affinché l'attività didattica risulti efficace e completa, si prevede di svolgere, eventualmente, attività di recupero così articolate:

- Recupero da effettuare in classe durante le ore curricolari, attraverso la ripresa dei concetti non ben compresi e lo svolgimento di esercizi riguardanti tali argomenti.
- Attività pomeridiane con studenti carenti
- Assegnazione al singolo studente di esercizi mirati, in modo da risolvere i suoi problemi e superare le sue difficoltà

Per individuare gli argomenti che necessitano di recupero, sia a livello collettivo sia a livello individuale, ci si avvarrà di tutti i tipi di verifica.

11. Tempi dell' intervento didattico

Per l'U.D. sono previste circa 10 ore di lezione frontale più le ore dedicate ad esercizi.

Sono escluse dal computo le ore necessarie per l' effettuazione e la correzione/discussione della verifica sommativa. I tempi per il raggiungimento degli obiettivi prefissati dipenderanno anche dal livello di apprendimento raggiunto dagli allievi.

U.D. SISTEMI LINEARI

EQUAZIONI CON PIU' VARIABILI.

Esistono problemi che portano a considerare equazioni a due o più variabili.

Esempi:

- Determinare due numeri sapendo che la loro somma è 7.
- Determinare due numeri sapendo che la somma del quadrato del primo, e del secondo è 1 .
- Determinare tre numeri sapendo che la loro somma è 10.

Se indichiamo con x , y , z i tre numeri cercati negli esempi, possiamo impostare l'equazione che ci permette di discutere l'esistenza e la ricerca di tali valori.

Prendiamo a titolo esemplificativo il primo problema.

L’ equazione che occorre considerare è :
$x+y=7$

Si tratta di un’ equazione a due variabili la cui soluzione consiste nel determinare tutte le coppie di numeri che sostituiti alle incognite $x,\ y$ trasformino l’uguaglianza data in una identità. In questo
L’equazione data ha infinite soluzioni.
Per determinare una soluzione particolare dell’equazione data, si può procedere nel modo seguente:

Si supponga di conoscere una delle due incognite. Si ponga, ad esempio
$x = 2$.
Sostituendo nell’equazione, si ha: $2+y=7$
Così facendo, si arriva ad un’ equazione ad una variabile, la cui soluzione è $y = 5$.
Una soluzione dell’equazione data è rappresentata dalla coppia $x = 2$ e $y = 5$.

Tutte le coppie di numeri che riusciamo a trovare (infinite coppie) con tale semplice metodo, sono le soluzioni del problema.

Definizione
Date due espressioni algebriche A e B ,delle quali almeno una contenga almeno due lettere, dette *variabili*, si dice *equazione in più variabili* , l’ uguaglianza :

$$A=B$$

scritta allo scopo di stabilire se esistono valori delle variabili per le quali le due espressioni assumono lo stesso valore, e di determinare tali valori nel caso che esistano.

Le eventuali coppie ordinate di valori delle variabili, che fanno assumere valori uguali ai membri dell’ equazione, si dicono soluzioni dell’ equazione.
L’ insieme S di tutte le soluzioni si chiama insieme delle soluzioni.

Classificazione,equazione: algebrica, razionale, intera, fratta, numerica, letterale, (si veda equazioni in una variabile)

Anche per le equazioni in due variabili valgono i principi di equivalenza già considerati per le equazioni in una variabile.
In base a tali principi, si può ottenere un’ equazione del tipo $P(x,y)=0$ dove P(x,y) è un polinomio nelle variabili x e y ,a coefficienti interi e ridotto a forma normale.

In tal caso l’ equazione si dice ridotta a forma normale.
Il grado di P(x,y) si dice grado dell’ equazione.

Esempio :
l’ equazione $3xy-x^2=3x^2-y^2+1$ ridotta a forma normale è $4x^2-y^2-3xy+1=0$
ed è di 2° grado.

Equazioni algebriche lineari in due variabili

Un'equazione lineare ridotta a forma normale, si può scrivere

$$ax + by = c$$

dove a,b,c sono tre numeri dati.
Osserviamo subito che:
- se abbiamo $0x + 0y = c$ con $c \neq 0$, allora è impossibile
- se abbiamo $0x + 0y = 0$ allora è un' identità.

Negli altri casi, un' equazione di questo tipo è verificata da infinite coppie ordinate di numeri. Tali coppie rappresentano le infinite soluzioni dell' equazione . Nel nostro esempio iniziale

$$x + y = 7$$

si può scrivere $S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, \quad x + y = 7\}$.
Osserviamo che l' equazione $x + y = 7$, pur ammettendo infinite soluzioni, non è un'identità. Essa non è verificata da tutte le possibili coppie di numeri, ma solo da quelle per le quali la somma di tali numeri dà come risultato 7. Una tale equazione è detta indeterminata.

Sistemi di due equazioni in due variabili

Se due o più equazioni sono considerate insieme allo scopo di trovare le soluzioni comuni, si dice che l'insieme di tali equazioni costituisce un SISTEMA DI EQUAZIONI.
Per specificare, ad esempio, che le due equazioni seguenti: $3x + y = 8$ e $4x - 3y = 1$ formano un sistema, si scrive :

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}.$$

Ogni eventuale soluzione comune a tutte le equazioni di un sistema, si chiama soluzione del sistema.

Se S_1 ed S_2 sono rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda equazione, risolvere il sistema significa determinare l' insieme

$$S = S_1 \cap S_2$$

Analoghe considerazioni si possono fare per sistemi di tre o più equazioni.
Un sistema si dice :

- determinato, se ammette un numero finito di soluzioni
- indeterminato, se ammette infinite soluzioni
- impossibile, se non ammette soluzioni.

<u>Sistemi equivalenti</u>

Due sistemi si dicono e*quivalenti*, quando hanno lo stesso insieme soluzione.

Si osserva che

- Due sistemi equivalenti ad un terzo, sono equivalenti tra loro.
- Se a tutte o ad alcune equazioni di un sistema si sostituiscono altrettante equazioni, rispettivamente equivalenti a quelle sostituite, si ottiene un sistema equivalente al dato.

Occorrerà procedere, quindi , in modo analogo a quello visto per le equazioni, cercando di ottenere sistemi equivalenti di forma più semplice tramite opportune trasformazioni, fino a giungere (sempre che sia possibile) ad un sistema equivalente, in ogni equazione del quale compaia una sola variabile.

Tali successive trasformazioni si possono effettuare applicando opportuni <u>metodi</u>, che verranno considerati in sede di risoluzione di alcuni esempi.

<u>Sistema di due equazioni lineari in due variabili</u>

E' un caso molto importante di sistema lineare. Esso può essere scritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad (1)$$

dove a, a', b , b' indicano numeri razionali noti. I numeri *a, a', b , b'* si chiamano *coefficienti* delle variabili, mentre *c , c'*, si chiamano *termini noti*.
Consideriamo ora il problema di decidere se il sistema (1) ammette soluzioni, ed in caso affermativo, quante ne ammette.
Vediamo prima due casi particolari:

- se tutti i coefficienti ed i termini noti sono nulli, allora il sistema (1) si scrive

$$\begin{cases} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

e allora ogni coppia (x,y) di numeri razionali è soluzione del sistema.

- se i coefficienti *a, a', b , b'* sono nulli, e almeno uno dei termini noti *c, c'*, non è nullo, allora il sistema (1) è impossibile.

Tralasciando i casi estremi, vediamo il caso più generale, in cui i coefficienti delle variabili sono tutti diversi da zero.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

in cui $a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ \ a' \neq 0,\ \ b' \neq 0$.

In tal caso, si può dimostrare che il sistema lineare è :

• determinato, se $ab'-a'b \neq 0$
• impossibile, se $ab'-a'b = 0$ e $cb'-c'b \neq 0$
• indeterminato, se $ab'-a'b = 0$ e $cb'-c'b = 0$
Tralasciamo la dimostrazione di tale teorema, per vederne subito alcune applicazioni.

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 10x-4y=5 \end{cases}$$

individuiamo $a=5, \quad b=-2, \quad c=1, \quad a'=10, \quad b'=-4, \quad c'=5$
si ha quindi $ab'-a'b = 5\cdot(-4)-10\cdot(-2)=0$ e $cb'-c'b = 3\cdot(-4)-5\cdot(-2)=-2$, condizioni

per le quali il teorema ci assicura che il sistema è <u>impossibile</u>.
Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per 2 si ottiene il sistema equivalente :

$$\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 5x-2y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Da cui è evidente che non esistono coppie ordinate del tipo (x,y) che soddisfano entrambe le equazioni.

Osserviamo che, in tal caso, <u>i coefficienti delle variabili sono tra loro proporzionali,senza esserlo ai termini noti.</u>

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$$

individuiamo $a=3, \quad b=1, \quad c=5, \quad a'=2, \quad b'=3, \quad c'=8$
I coefficienti soddisfano alla condizione $ab'-a'b \neq 0$,dunque , dal teorema, si ha che il sistema considerato è <u>determinato</u>, ed ammette una sola soluzione. La ricerca di tale soluzione avviene tramite metodi che verranno più avanti esposti.

Osserviamo che, in tal caso, i coefficienti delle variabili <u>non</u> sono tra loro proporzionali.

• Nel sistema :

$$\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 15x+6y=3 \end{cases}$$

individuiamo $a=5, \quad b=2, \quad c=1, \quad a'=15, \quad b'=6, \quad c'=3$
I coefficienti delle variabili ed i termini noti soddisfano alla condizione:

$$ab'-a'b=0 \quad \text{e} \quad cb'-c'b=0,$$

dunque il sistema è <u>indeterminato</u>. Dividendo entrambi i membri della seconda equazione per 3 si ottiene il sistema equivalente :

$$\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 5x+2y=1 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente ad un' equazione in due variabili ($5x+2y=1$) ed ha infinite soluzioni.
Tali soluzioni sono le infinite coppie ordinate del tipo $\left(x, \frac{1-5x}{2}\right)$,con $x \in \mathbb{R}$ (ad esempio).
<u>Osserviamo che i coefficienti delle incognite ed i termini noti sono tutti fra loro proporzionali</u>.

Da ciò che si è detto, il sistema si dovrà risolvere solo nell' ipotesi che sia $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

• Un caso particolare ma piuttosto importante di sistema lineare in due variabili, è quello comprendente equazioni lineari <u>omogenee</u>.
In tale sistema $c = c' = 0$ e quindi esso si presenta nella forma

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$$

Come si può facilmente intuire (e dimostrare), tale sistema ammette sempre la soluzione : $(0,0)$.
Da quanto detto prima segue che se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema ha l' <u>unica soluzione</u> $(0,0)$;
mentre se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, essendo anche $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, il sistema è <u>indeterminato</u>.

<u>Metodi di risoluzione</u>

Accanto ai metodi per determinare la natura del sistema e delle soluzioni,esistono metodi risolutivi che possono essere presi in considerazione, di volta in volta, a seconda del particolare tipo di sistema con cui abbiamo a che fare. E' opportuno fare esempi di sistemi indeterminati o impossibili.

Iniziamo col considerare il:

• <u>Metodo di sostituzione.</u>

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema e ridotto i monomi simili, consideriamo il sistema nella sua forma più generale

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \quad \text{nel quale si suppone} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Si esplicita una delle due equazioni, ossia si ricava una variabile in funzione dell'altra (conviene esplicitare la variabile più "comoda",se c'è questa possibilità) e la si sostituisce nella restante equazione che, riducendosi ad una sola variabile, si risolve facilmente.
Infine il valore della variabile così ottenuto lo sostituiamo nell'equazione in cui l'altra variabile era stata messa in evidenza.

Esempio :

$$\begin{cases}2(3x+y)=5(x-1)\\-2(y-3)=5(x+1)\end{cases}\quad\begin{cases}6x+2y=5x-5\\-2y+6=5x+5\end{cases}\quad\begin{cases}6x-5x=-2y-5\\-2y+6-5x-5=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2y-5\\-2y+1-5x=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2y-5\\-2y+1-5(-2y-5)=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2y-5\\-2y+1+10y+25=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2y-5\\8y+26=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2y-5\\8y=-26\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2y-5\\y=-\dfrac{26}{8}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2y-5\\y=-\dfrac{13}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2\cdot(-\dfrac{13}{4})-5\\y=-\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{13}{2}-5\\y=-\dfrac{13}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{13-10}{2}\\y=-\dfrac{13}{4}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=-\dfrac{13}{4}\end{cases}$$

• <u>Metodo del confronto</u>.

E’ una variante del metodo di sostituzione.
Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili,si ottiene il sistema nella forma più generale

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$$

Occorre poi esplicitare entrambe le equazioni rispetto alla stessa variabile ed uguagliarle.
Si ottiene così un’equazione in una sola variabile, facilmente risolvibile.
Il valore ottenuto si sostituisce in una delle due equazioni di partenza (indifferentemente).

Esempio :

$$\begin{cases}12x+y=9\\15x-y=18\end{cases}\quad\begin{cases}y=9-12x\\-y=18-15x\end{cases}$$ cambio segno nella seconda equazione

$$\begin{cases}y=9-12x\\y=-18+15x\end{cases}$$

uguaglio le due equazioni: $-18+15x=9-12x$ da cui $15x+12x=9+18$

che dà $27x=27\Rightarrow x=\dfrac{27}{27}\Rightarrow x=1$; tale valore viene riportato nel sistema

$$\begin{cases}x=1\\y=9-12x\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=9-12\cdot1\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=9-12\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$$

• <u>Metodo di riduzione</u>

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili e posto il sistema nella forma canonica,

- si individua il *minimo comune multiplo* dei coefficienti di *una variabile*
- si trova il fattore che consente di ottenere tale *m.c.m.* (e il suo opposto) per la variabile considerata
- si sommano algebricamente in colonna le due equazioni: in questo modo scompare una variabile
- si risolve l'equazione così ottenuta ad una sola variabile
- a scelta si può ripetere il procedimento per l'eliminazione dell'altra variabile oppure effettuare il metodo di sostituzione.

Esempio :

consideriamo il sistema ridotto in forma canonica :

$$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$$

Cerchiamo di eliminare la *x*: il *m.c.m.* tra 12 e 15 è 60, perciò si moltiplica nel modo seguente:

$$\begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix} \begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 60x + 5y = 45 \\ -60x + 4y = -72 \end{cases} \quad (+)$$

sommando le due equazioni, si ottiene:

$$9y = -27 \qquad \text{da cui } y = -3$$

A questo punto è facile sostituire quest'ultimo valore trovato in una delle equazioni equivalenti, per trovare x .
Analogamente (ed in questo caso particolare, più comodamente) è possibile cercare di eliminare la y , dal sistema iniziale :

$$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases}$$

per eliminare la *y* non sono necessarie altre operazioni.

Basta sommare algebricamente le due equazioni :

$$\begin{cases} 12x + y = 9 \\ 15x - y = 18 \end{cases} \quad (+)$$

$$27x = 27 \qquad \text{da cui } x = 1$$

Il valore di y è ricavabile con il metodo di sostituzione da una qualsiasi delle equazioni.

E quindi : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

• <u>Metodo di Cramer</u>

Si chiama matrice quadrata di ordine due una tabella con quattro numeri ordinati in due righe e due colonne, del tipo

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

in cui e, f, g, h sono numeri.

Per esempio: $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Si chiama **determinante** di una matrice quadrata di ordine due $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ e si indica con $\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$ il <u>numero</u> dato dall' espressione $e \cdot h - f \cdot g$. Si ha cioè:

$$\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = e \cdot h - f \cdot g$$

Per esempio :

Il determinante della matrice quadrata $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ è $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 1$

Dato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ si chiama matrice dei coefficienti del sistema lineare la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$. Ad esempio :

la matrice dei coefficienti del sistema lineare $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ è la matrice $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Risoluzione:

Dopo aver posto il sistema nella forma canonica $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Si definisce *delta, delta x, delta y*, rispettivamente, le seguenti espressioni:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\,b \\ a'b' \end{vmatrix} = a \cdot b' - a'b \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c\,b \\ c'b' \end{vmatrix} = c \cdot b' - c'b \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a\,c \\ a'c' \end{vmatrix} = a \cdot c' - a'c$$

La soluzione si trova ponendo

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad ; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Dovrà essere necessariamente $\Delta \neq 0$.

Esempio :

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 = -6 - 5 = -11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 13 & -2 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-2) - 13 \cdot 1 = -20 - 13 = -33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 3 \cdot 13 - 5 \cdot 10 = 39 - 50 = -11$$

E quindi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1$$

Sistemi fratti

I procedimenti indicati per risolvere i sistemi lineari in due variabili, si prestano anche per risolvere sistemi fratti (in cui ci sono denominatori contenenti almeno una variabile). Tali sistemi, ridotti a forma normale, diventano sistemi lineari.
Il metodo di riduzione è analogo a quello visto per le equazioni fratte in una variabile; per questo motivo ci sono gli stessi inconvenienti già visti per le equazioni : potrebbe accadere che il sistema ottenuto con tale riduzione, abbia come soluzione dei numeri che annullano qualche denominatore.
Occorre quindi verificare che le soluzioni trovate soddisfino anche il sistema di partenza.
Visto che la trattazione è analoga a quella delle equazioni fratte, forniamo solo un piccolo esempio:

consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-1} = 1 \\ \dfrac{3x+y}{y+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deve essere $y-1 \neq 0$ e $y+1 \neq 0$ quindi $y \neq \pm 1$

Applicando i principi di equivalenza, e riducendo a forma normale, si ha

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 6x+y=1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Poiché la soluzione (0,1) è contraria alle nostre condizioni (annulla il denominatore della prima equazione), il sistema risulta impossibile.

Sistemi letterali

Per risolvere i sistemi lineari letterali (cioè quelli che oltre alle variabili contengono altre lettere, che vengono considerate parametri) occorre :

• escludere per i parametri quei valori che, eventualmente, fanno perdere di significato ad una (almeno) delle equazioni del sistema.
• vedere, poi, se esistono particolari valori dei parametri per i quali il sistema diventa impossibile, o indeterminato.

In ciò consiste la discussione del sistema.

Risolviamo questo sistema, come esempio:

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$$

da cui si hanno i seguenti sistemi equivalenti:

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ x=-2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(-2-y)+by=1 \\ x=-2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-a)y=2a+1 \\ x=-2-y \end{cases}$$

Discussione:

• se $b-a \neq 0$, cioè se $b \neq a$: il sistema è determinato, ed ha come soluzione

$$x=\frac{2b+1}{a-b}, \qquad y=\frac{2a+1}{b-a}$$

• se $b=a$ e $2a+1 \neq 0$, cioè $a \neq -\frac{1}{2}$, allora $S=\emptyset$. Il sistema è impossibile

• se $b=a$ e $2a+1=0$, cioè $a=-\frac{1}{2}$, allora $S=\{(x,y) \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } x=-y-2\}$. Il sistema è indeterminato.

Applicazioni

Applicazioni di varia natura sono attribuibili alle equazioni lineari in due variabili, ed ai sistemi di due equazioni lineari in due variabili. Nell' unità didattica dedicata alla retta nel piano cartesiano si proverà a suggerire i collegamenti tra gli argomenti fino ad ora trattati, ed i temi di geometria analitica. Naturalmente abbiamo già citato i problemi in due ed in tre incognite, come applicazioni naturali dei sistemi lineari.

---------------------------------- **per me, sarebbe finita qui !** ---------------------------------------

Sistemi di tre equazioni lineari in tre variabili (qui ho lasciato quasi tutto. C'è da dire che i sistemi in 3 variabili non si fanno quasi mai! Conviene solo accennarli)

Nella risoluzione di problemi di varia natura, si presenta frequentemente il caso di dover risolvere sistemi con tre equazioni lineari, in tre variabili. Tali sistemi si possono risolvere con i metodi studiati per i sistemi di due equazioni lineari. Ridotti in forma canonica, essi sono del tipo

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

in cui $a,b,c,a',b',c',a'',b'',c''$ sono i coefficienti delle variabili, e d,d',d'' sono i termini noti.

Alcuni esempi di risoluzione :

• Metodo di sostituzione

Dopo aver effettuato tutte le operazioni presenti nel sistema, ridotto i monomi simili, e portato il sistema nella forma normale, si esplicita la prima delle tre equazioni, rispetto ad una qualsiasi delle tre variabili, ossia si ricava un'incognita in funzione delle altre due, e la si sostituisce nelle restanti equazioni che, riducendosi , si risolvono facilmente.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-10 \\ 3x-2y-z=-1 \\ x+4y+2z=16 \end{cases}$$ ricavo y nella prima equazione e la sostituisco nelle altre due

$$\begin{cases} y=-2x-10+3z \\ 3x-2(-2x-10+3z)-z=-1 \\ x+4(-2x-10+3z)+2z=16 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x-10+3z \\ 3x+4x+20-6z-z=-1 \\ x-8x-40+12z+2z=16 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x-10+3z \\ 7x-7z=-21 \\ -7x+14z=56 \end{cases}$$

divido per 7 la seconda e la terza equazione

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x - z = -3 \\ -x + 2z = 8 \end{cases}$$ ricavo x nella seconda equazione e lo sostituisco nella terza equazione

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 \\ -(z-3) + 2z = 8 \end{cases}$$ ricavo z nella terza equazione $$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ottenuto il valore di una variabile lo sostituiamo nella seconda
equazione nella quale l'altra variabile era stata messa in evidenza e poi risaliamo
fino alla prima equazione, ottenendo le tre soluzioni, ossia i valori delle tre variabili *x*, *y*, *z*.

$$\begin{cases} y = -2x - 10 + 3z \\ x = z - 3 = 5 - 2 = 2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \cdot 2 - 10 + 3 \cdot 5 = -4 - 10 + 15 \\ x = 2 \\ z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

• <u>Metodo di Cramer</u>

Si chiama *matrice quadrata di ordine tre* una tabella con nove numeri ordinati in tre righe e tre colonne, del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$ in cui *a ,b, c,a' ,b', c', a'', b'', c''* sono numeri

Si chiama determinante della matrice A , e si indica con $|A|$ oppure con $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, il <u>numero</u>

: $a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ in cui i determinanti delle matrici quadrate di ordine

due $\begin{bmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{bmatrix}$ si calcolano con il metodo già visto.

Esempio :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il determinante di tale matrice è:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2(-1-10) + 3(-15) = -20$$

Risoluzione:

dopo aver posto il sistema nella forma canonica $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$

Calcoliamo i quattro determinanti *Delta*, *Delta x*, *Delta y*, *Delta z*, rispettivamente, le seguenti espressioni :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = d\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d' & b' \\ d'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & d' \\ b'' & d'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & d' \\ a'' & d'' \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

La soluzione si trova ponendo:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Dovrà essere necessariamente $\Delta \neq 0$.

Esempio :

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -12 \\ x - 2y - z = -5 \\ x + y + 2z = 13 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[(-4) - (-1)] + 1[2 - (-1)] - 3[1 - (-2)] = -6 + 3 - 9 = -12$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -12 & -1 & -3 \\ -5 & -2 & -1 \\ 13 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -12[(-4) - (-1)] + 1[-10 - (-13)] - 3[-5 - (-26)] = 36 + 3 - 63 = -24$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -12 & -3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[-10 - (-13)] + 12[2 - (-1)] - 3[13 - (-5)] = 6 + 36 - 54 = -12$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -12 \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 13 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2[-26 - (-5)] + 1[13 - (-5)] - 12[1 - (-2)] = -42 + 18 - 36 = -60$$

E quindi:

$$x = \frac{-24}{-12} = 2 \qquad y = \frac{-12}{-12} = 1 \qquad z = \frac{-60}{-12} = 5.$$

Osserviamo il fatto che è essenziale che sia $\Delta \neq 0$.