UNITÀ DIDATTICA: **Geometria sintetica piana: Nozioni di base; triangoli, parallelogrammi, trapezi.**

CLASSE DESTINATARIA: tenendo conto dei piani di studio della scuola secondaria superiore e i programmi dei bienni della Commissione Brocca, il percorso didattico è rivolto al primo anno di un liceo scientifico in cui l'insegnamento della disciplina "Matematica e Informatica" è previsto con un monte di ore pari a 5 settimanali.

PROGRAMMI MINISTERIALI DEL PNI: La geometria sintetica piana fa parte del tema n.1 GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO.
Nei commenti al tema n.1 si afferma: "Lo studio della geometria nel biennio ha come finalità preminente quella di condurre progressivamente l'allievo dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente potrà pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dall'allievo nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzione; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si farà ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento.
Il docente potrà cioè condurre l'allievo a familiarizzarsi con il metodo ipotetico-deduttivo su parti circoscritte della geometria, senza la preoccupazione di pervenire alla costruzione di un sistema globale di assiomi. Ed è in questa prospettiva che egli programmerà in un quadro di riferimento organico, una scelta delle proprietà (teoremi) delle figure piane da dimostrare, utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale."
Nelle indicazioni metodologiche si afferma che: "Consapevole che il carattere fondamentale dell'educazione matematica è il porre e risolvere problemi, il docente riconoscerà l'utilità che l'insegnamento sia condotto per problemi e porterà l'allievo a scoprire le relazioni matematiche che sottostanno a ciascun problema e quindi a collegare razionalmente e a sistemare progressivamente le nozioni teoriche che avrà via via apprese. In questo itinerario didattico le nozioni più astratte non saranno proposte "a priori", ma si faranno scaturire come sintesi di situazioni incontrate in vari settori.
E' evidente che il termine "problema" va inteso nella sua accezione più ampia, riferito cioè non solo a problemi attinenti a fenomeni naturali, o dalla vita reale in genere, ma anche a quelli che scaturiscono dall'interno della stessa matematica. In questo caso potrà essere utile sviluppare l'argomento seguendone l'evoluzione storica: potrebbe essere buona occasione per far vedere agli allievi come il progresso della matematica sia stato spesse volte determinato dalla necessità di risolvere antinomie e difficoltà che man mano si presentavano nel suo interno e far loro percepire il gusto della ricerca storica, anche in ambito matematico.
Si sottolinea infine l'opportunità che il docente dia particolare importanza all'uso dell'elaboratore che via via potenzierà nei contesti matematici che verranno progressivamente sviluppati".

PREREQUISITI E LORO CONTROLLO:
- terminologia di base relativa agli insiemi;
- elementi di logica;
- le relazioni d'ordine e le relazioni d'equivalenza;
- nomenclatura geometrica di base;
- saper rappresentare la situazione attraverso un disegno;
- saper disegnare punti, segmenti, poligoni;
- saper disegnare circonferenze e archi di circonferenza;
- saper salvare e caricare un file in ambiente Cabri;
- conoscere le modalità per la costruzione degli oggetti base : punto, retta, segmento (in ambiente Cabri).

METODOLOGIE: I nuovi argomenti verranno affrontati utilizzando contemporaneamente lezioni frontali e dialogiche in modo da favorire una partecipazione attiva e un'attenzione continuativa degli alunni che potranno dare il loro contributo mediante osservazioni e domande e, magari, anticipazioni.

MATERIALI: i soliti (gessi lavagna, calcolatrice, software Cabri - géomètre)

Obiettivi di apprendimento:
- dimostrare proprietà di figure geometriche;
- comprendere il senso dei formalismi matematici introdotti;
- adoperare i metodi, i linguaggi e gli strumenti informatici introdotti;
- inquadrare storicamente l'evoluzione delle idee matematiche fondamentali.

Conoscenze
- I punti, le rette e i piani

- I segmenti e gli angoli
- I triangoli
- I parallelogrammi e i trapezi

Competenze
- Saper utilizzare strumenti informatici per la costruzione delle figure geometriche
- Saper utilizzare i concetti di base della geometria
- Saper dimostrare i teoremi sui triangoli
- Saper dimostrare i teoremi sui parallelogrammi e trapezi

TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO: Il percorso didattico realizzato per affrontare l'argomento della geometria sintetica piana è costituito da tre parti:
1. La geometria del piano
2. I triangoli
3. Le rette perpendicolari e parallele, i parallelogrammi e i trapezi

Si stimano all'incirca una quarantina di ore suddivise approssimativamente nel modo seguente:
- Parte I: 7 ore
- Parte II: 15 ore
- Parte III: 15 ore
- Verifica sommativa: 2 ore + 1 ora di correzione in classe

SVILUPPO DEI CONTENUTI:
Nota didattica: l'idea di partire col chiedere o mostrare agli studenti che il mondo che ci circonda mostra un'infinita varietà di forme geometriche, regolari o irregolari, semplici o complesse, simmetriche o asimmetriche, è finalizzata a far comprendere che la matematica, e in particolare la geometria, con le sue forme e regole fa parte della realtà che ci circonda e non è solo un ente astratto come potrebbe sembrare.

Il primo passo da fare per studiare le forme geometriche che ritroviamo negli oggetti che ci circondano è quello di eseguire un procedimento di astrazione. Questo procedimento di astrazione permette di individuare delle figure geometriche (per esempio, il triangolo, il rettangolo, il cerchio ecc.), cioè dei modelli matematici ideali che servono a descrivere le forme degli oggetti reali che ci circondano.
La branca della matematica che studia le figure geometriche, cioè i modelli matematici degli oggetti fisici, è la **geometria**.
Negli studi precedenti i concetti fondamentali della geometria sono stati affrontati con un approccio prevalentemente basato sul ragionamento induttivo che consente di scoprire nuove proprietà, cioè di formulare congetture, ma non ci permette di capire (nel caso in cui la congettura sia vera) perché vale la proprietà espressa nella congettura. Per fare questo ulteriore passo ci si affida al ragionamento deduttivo. La geometria razionale è detta anche "geometria euclidea".

Nota didattica: il breve cenno storico ha lo scopo di mettere in evidenza che il metodo deduttivo o, più precisamente, assiomatico–deduttivo, su cui baseremo il presente studio della geometria è stato introdotto dalla necessità di dare una sistematizzazione alla geometria, e che l'evoluzione nell'apprendimento dell'alunno avviene in analogia a quanto è successo nella storia.

La parola geometria deriva dal greco e significa "misura della Terra". Già dal nome puoi quindi intuire che la sua nascita è legata a problemi sostanzialmente pratici.
Le prime nozioni di geometria sono state sviluppate, già in tempi antichissimi, in Egitto, e da qui sono passate in Grecia. Non è più la geometria degli Egizi, legata a problemi di misurazione del terreno, ma una vera e propria scienza razionale, staccata da ogni esperienza applicativa e volta a studiare sistematicamente le proprietà delle figure del piano e dello spazio.
Fra gli studiosi che hanno contribuito allo sviluppo della geometria nell'antica Grecia spicca, su tutti, il nome di Euclide, matematico vissuto ad Alessandria nel 300 a.C., che raccoglie e sistema tutto il complesso delle conoscenze matematiche del tempo secondo uno schema assiomatico-deduttivo nella sua più famosa opera, Gli Elementi.
Assiomatico vuol dire indiscutibile, che non è possibile negare perché evidente, certamente vero.
Deduttivo è ciò che si può dedurre, cioè derivare con un ragionamento logico, a partire da alcune premesse vere (assiomi); se le premesse sono vere e il ragionamento logico e razionale (dimostrazione), le conclusioni che ne derivano saranno, conseguentemente, logiche e vere (teoremi).
Il metodo assiomatico-deduttivo non è poi così innaturale come può forse apparire a prima vista. Per esempio, si utilizza quando impariamo un nuovo gioco, come ad esempio quello del tris: Parole chiave del gioco: concetti primitivi, Regole del

gioco: gli assiomi. Poi, giocando, si imparano anche solo inconsciamente alcuni “trucchi” ed si elaborano strategie, conseguenze delle regole del gioco (i teoremi).
Sui cinque postulati Euclide costruisce tutta la geometria. Il più famoso è il V Postulato, detto, anche, “postulato di Euclide” (dati nel piano una retta r e un punto P esterno ad essa, esiste una e una sola retta s passante per P e non avente alcun punto in comune con la retta r).
La negazione di tale postulato ha dato la nascita alle geometrie non euclidee.

<u>I concetti primitivi</u>:
Nota didattica: è necessario far comprendere agli studenti che la necessità di assumere dei concetti primitivi deriva dal fatto che sarebbe impossibile definire ogni concetto senza cadere in un circolo vizioso: ogni definizione, infatti, deve contenere termini di cui si conosce già il significato, ossia termini di cui sono già state date le definizioni. Anche queste definizioni conterranno dei termini che devono essere a loro volta definiti e così via… Per interrompere questo procedimento è necessario fissare dei termini di cui si suppone noto il significato e di cui si accetta perciò di non dare alcuna definizione.

L’osservazione di un libro, o ancor meglio la sua astrazione attraverso un disegno, ci permette di introdurre tre enti fondamentali della geometria euclidea che sono:
- il punto (il nostro vertice);
- la retta (di cui il nostro spigolo ci dà un’immagine approssimata);
- il piano (di cui le superfici che delimitano il libro ci danno un’idea).

Questi tre enti fondamentali perché gli enti geometrici sono delle astrazioni, sono cioè privi di qualsiasi dimensione e sono caratterizzati solo dallo loro posizione.
Il punto è il primo ente fondamentale; esso è un concetto primitivo, privo di vera definizione; possiamo provare a immaginarlo come il segno lasciato da una matita ben appuntita su un foglio.
La retta è il secondo ente fondamentale; possiamo immaginarla come un insieme consecutivo e infinito di punti aventi sempre la stessa direzione (dall’osservazione degli spigoli di un tavolo vediamo l’immagine materiale della linea geometrica).
Osservando infine un foglio di quaderno abbiamo l’immagine materiale della superficie geometrica, che possiamo pensare come un insieme infinito e continuo di rette: **il piano, il terzo ente fondamentale**.

<u>Assiomi</u>:
Secondo la nostra intuizione noi possiamo segnare su una retta quanti punti vogliamo.
Inoltre, se fra due medesimi punti distinti tendiamo due fili, essi si adagiano esattamente l’uno sull’altro.
ASSIOMA DI APPARTENENZA DELLA RETTA
- Per due punti distinti di un piano passa una ed una sola retta.

Diciamo “una e una sola” per riassumere due concetti che incontreremo spesso:
a) esistenza: dati due punti siamo sicuri che esiste una retta che passa per quei punti;
b) unicità: la retta che passa per due punti è unica.

Precisiamo poi che la retta non può essere costituita da un solo punto.
- Su una retta ci sono almeno due punti.

In modo analogo, con il prossimo postulato, vogliamo evitare che si possa pensare che il piano sia costituito soltanto da una retta.
- Per ogni retta di un piano esiste almeno un punto, nel piano, che non le appartiene.

QUESITO: Questi tre postulati sono sufficienti per determinare una proprietà riguardante due rette distinte. Sapresti dire quale?
Due rette distinte possono avere in comune un solo punto (si dimostra per assurdo)

Anche sopra un piano noi riconosciamo intuitivamente la possibilità di segnare quanti punti vogliamo.
Inoltre se consideriamo una porta girevole attorno alla retta congiungente i suoi due cardini, essa non si può più muovere quando se ne fissa un terzo punto, fuori di tale congiungente.
Infine, se sul tavolo da disegno fissiamo, con due puntine, le estremità di un filo, in modo che sia completamente teso, vediamo che esso giace per intero sul piano del tavolo.
Ebbene, ispirandoci a questi dati intuitivi dell’esperienza comune, si ammette il seguente:
ASSIOMA DI APPARTENENZA DEL PIANO
- Per tre punti non allineati dello spazio passa un piano ed uno solo.
- La retta che ha due punti in comune con un piano, giace completamente sul piano.
- Il piano contiene infiniti punti e infinite rette.

Dall’assioma enunciato si deducono subito le conseguenze:

- Per una retta r e per un punto P non appartenente ad r, passa uno ed un solo piano, cui entrambi appartengono.
- Per due rette incidenti passa uno ed un solo piano.

Le rette incidenti danno infine origine alla seguente
DEFINIZIONE Si chiama fascio di rette incidenti l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto A.

La nostra esperienza quotidiana ci rende evidenti le seguenti proprietà:

a) Dati due punti qualsiasi A o B di una retta orientata r, si verifica sempre che:
   o i punti A e B coincidono;
   o il punto A precede il punto B, nel verso prefissato;
   o il punto B precede il punto A nel verso prefissato;
   l'una eventualità escludendo l'altra.

È questa la proprietà di tricotomia.

b) Se tre punti A, B, C di una retta sono tali che il punto A precede il punto B e, a sua volta, B precede C, allora A precede C.

È questa la proprietà transitiva.
In base a queste prime due proprietà si dice che la retta è una linea aperta.

c) Si dice che un punto B è compreso tra i punti A e C se esso segue A e precede C.

È allora intuitivo che fra due punti di una retta orientata è sempre compreso un terzo punto, e quindi infiniti.
Questa proprietà si esprime dicendo che la retta è densa.
Infine, se a partire da un punto qualsiasi di una retta orientata, procediamo in ciascuno dei due versi, è intuitivo che non incontreremo mai un ultimo punto.

d) Non esiste perciò sulla retta, in ciascun verso, né un primo né un ultimo punto.

Questa proprietà si esprime dicendo che la retta è illimitata nei due versi.
Riassumendo possiamo enunciare il seguente:
ASSIOMA DELL'ORDINE
Ogni retta è dotata di due versi naturali, uno opposto all'altro, rispetto ai quali è aperta, densa e illimitata.

Nota didattica: introduciamo mediante opportune definizioni, alcune figure geometriche che certamente già gli alunni conoscono, almeno a livello intuitivo, dai loro studi precedenti: i segmenti, le semirette, gli angoli, i poligoni… Iniziamo con il precisare che cosa si intende per figura geometrica.

Chiamiamo figura geometrica ogni sottoinsieme del piano.
Gli assiomi di ordine ci consentono di introdurre la definizione di semiretta.
Data una retta orientata e un suo punto A, chiamiamo semirette:

- L'insieme formato da A e dai punti che lo seguono;
- L'insieme formato da A e dai punti che lo precedono.

Anche la definizione di segmento è possibile in base a quanto assunto nell'assioma d'ordine.
Data una retta e dei suoi punti, A e B, diciamo segmento AB l'insieme dei punti della retta formato da A, da B e dai punti compresi tra A e B.
Si dice poligonale una figura costituita da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascun segmento e il successivo siano consecutivi.

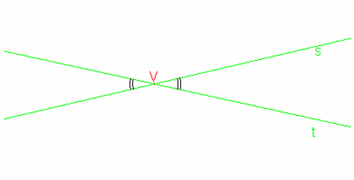
Se tagliamo un foglio lungo un tratto rettilineo che vada da un bordo ad un altro, il foglio si divide in due parti.
Siccome questa proprietà si conserva anche quando il foglio si estende comunque, possiamo attribuirla a tutto il piano.
Inoltre, finché un punto si muove nel piano, restando sempre da una parte della retta, non la attraversa mai; ma non può passare dall'altra parte senza incontrare tale retta.
È questo il contenuto intuitivo del seguente:
ASSIOMA DI PARTIZIONE DEL PIANO
Ogni retta r di un piano divide l'insieme degli ulteriori suoi punti in due parti non vuote, tali che:

1. Se i punti A e B appartengono a parti diverse, allora il segmento AB taglia la retta r in un punto.
2. Se i punti C e D appartengono alla stessa parte, allora anche il segmento CD è incluso in questa.

Si dà, allora, la seguente:
DEFINIZIONE Si chiama semipiano la figura costituita da una di queste due parti e dalla retta r.
Un angolo è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi la stessa origine, incluse le due semirette.
N. B. Un piano o un semipiano possono essere visti come particolari angoli.
Un angolo piatto coincide quindi con un semipiano.

DEFINIZIONE Una figura è convessa se due suoi punti qualsiasi sono estremi di un segmento che è contenuto interamente nella figura stessa. Se una figura non è convessa si dice concava.
Il piano, le rette, le semirette, i segmenti, i semipiani sono figure convesse.
Per decidere se un angolo è concavo o convesso, anziché ricorrere alla definizione precedente, possiamo considerare i prolungamenti dei suoi lati.
Se un angolo contiene al proprio interno i prolungamenti dei lati, allora è concavo. Infatti è possibile scegliere due punti in modo che il segmento che li unisce non sia contenuto interamente nell'angolo.
Se un angolo non contiene al proprio interno i prolungamenti dei lati, allora è convesso.
Infatti, comunque scegliamo due punti, il segmento che li unisce è contenuto sempre interamente nell'angolo.

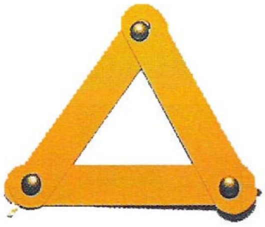
Quando parliamo di movimento rigido intendiamo dire che nella geometria euclidea si può pensare di spostare le figure senza deformarle.
In geometria utilizzeremo la parola uguaglianza soltanto per indicare la coincidenza punto a punto di due figure. Useremo invece la parola congruenza per indicare la sovrapponibilità punto a punto di una figura su un'altra mediante un movimento rigido.
DEFINIZIONE Due figure sono congruenti se sono sovrapponibili punto a punto l'una sull'altra mediante un movimento rigido.
La congruenza ha le seguenti proprietà:
Proprietà riflessiva: ogni figura è congruente a se stessa.
Proprietà simmetrica: dalla congruenza tra la figura A e la figura B, si deduce la congruenza tra B e A.
Proprietà transitiva: se la figura A è congruente a B e B è congruente a C, allora A è congruente a C.
Pertanto, la relazione di congruenza è una relazione di equivalenza
In particolare, la relazione di congruenza fra segmenti permette di ripartire l'insieme di tutti i segmenti del piano in classi di segmenti congruenti tra loro. La caratteristica comune ai segmenti appartenenti a una stessa classe si chiama lunghezza. Ogni classe, costituita da segmenti congruenti, individua una e una sola lunghezza. In altre parole due segmenti congruenti hanno lunghezza uguale.
DEFINIZIONE Il punto medio di un segmento è quel suo punto che lo divide in due segmenti congruenti.
Accetteremo come postulato che esiste sempre il punto medio di un segmento e che sia unico.
La relazione di congruenza fra angoli permette di ripartire l'insieme di tutti gli angoli del piano in classi di angoli congruenti tra loro. La caratteristica comune agli angoli appartenenti a una stessa classe si chiama ampiezza. Ogni classe, costituita da angoli congruenti, individua una e una sola ampiezza. In altre parole due angoli congruenti hanno ampiezza uguale.
DEFINIZIONE La bisettrice di un angolo è la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due angoli congruenti.
Anche per la bisettrice accetteremo, come postulato, che esiste per qualsiasi angolo e sia unica.
Vediamo ora di dimostrare il primo teorema:
TEOREMA Due angoli opposti al vertice sono congruenti
Nota didattica: si potrebbe abituare i ragazzi, ogni volta che si ha un teorema, a mettere l'enunciato nella forma se... allora....
Il teorema in questione dunque diventerebbe: Se due angoli sono opposti al vertice allora i due angoli sono congruenti
Con Cabri:



Con Misura_Misura dell'angolo determiniamo le loro ampiezze e notiamo che hanno lo stesso valore. Selezionato il puntatore, afferriamo, poi, una retta e la spostiamo. Osserviamo che essa continua a passare per il punto V (*) e che gli angoli variano, ma hanno ampiezze uguali tra loro.
Nonostante il carattere «tecnico» di questa attività vi sono alcuni spunti per la discussione; ne segnaliamo alcuni:
1. dati due punti distinti, esiste un'unica retta a cui essi appartengono;
2. muovendo uno dei due punti, si osserva che esistono infinite rette passanti per l'altro punto;
3. dati due punti distinti, esiste un unico segmento che li ha per estremi ed è contenuto nella retta a cui essi appartengono.

I TRIANGOLI
DEFINIZIONE: Un triangolo è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa di tre lati e dai suoi punti interni.

E a seguire definiamo le parti di un triangolo (vertici, angoli interni, angoli adiacenti, angoli esterni)
Classifichiamo i triangoli rispetto ai lati. Definiamo poi la mediana relativa a un lato, la bisettrice di un angolo (interno) e l'altezza relativa a un lato del triangolo. Da sottolineare che per ogni triangolo esistono tre bisettrici, tre mediane e tre altezze
Attraverso la costruzione di un triangolo con delle barrette di cartone. Foriamo gli estremi delle barrette di cartone e fissiamoli con delle viti.



Appoggiamo il triangolo su un lato cercando di deformarlo: IMPOSSIBILE!! La stessa attività può essere fatta con il software:

Operazioni con Cabri	Comandi utilizzati
1) disegnare tre punti che chiameremo A, B, C	• Punto • Nomi
2) disegnare il triangolo che ha per vertici i punti precedenti	• Retta_Triangolo
3) muovere a piacimento con il puntatore uno dei vertici	• Puntatore

Questa è una proprietà caratteristica del triangolo che viene definito una figura rigida o indeformabile. Questa proprietà viene sfruttata nelle costruzioni di ponti e tralicci, nei collegamenti di travi metalliche ecc. in quanto la figura rigida è capace di sopportare sforzi anche notevoli presentando maggiore resistenza alle diverse sollecitazioni a cui è esposta (forza del vento, carichi, terremoti ecc.).

Tra le proposizioni del I libro ritroviamo quelle sulla congruenza dei triangoli. In particolare il libro si chiude con il teorema di Pitagora (prop. 47) e il suo inverso (prop. 48).
Introduciamo la "Congruenza" tra figure:

Per quanto riguarda i triangoli abbiamo a disposizione tre criteri che ci permettono di stabilire quando due triangoli sono congruenti.
PRIMO CRITERIO
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono congruenti.
Dim. Io l'ho messa ma non la scriverei
(Chiamiamo ABC e A'B'C' i due triangoli. Supponiamo che AB □ A'B', AC □ A'C', e □ □ □' (□ , è l'angolo compreso tra AB e AC, mentre □' è l'angolo tra A'B' e A'C'). Muovendo (con un movimento rigido) il triangolo A'B'C' in modo da sovrapporre il lato A'B' al lato AB, (la sovrapposizione sarà punto per punto, poiché i due lati sono congruenti per ipotesi), quindi B si sovrappone a B'. Per ipotesi anche l'angolo □ si sovrappone ad □', quindi si sovrappongono le semirette che formano gli angoli di vertice A e A'. Sempre per ipotesi, il lato AC si sovrappone al lato A'C', e quindi C si sovrappone a C'. Ne segue che anche il terzo lato B'C' si sovrappone a BC)

Nota didattica: è necessario sottolineare che l'angolo congruente deve essere quello compreso tra i due lati congruenti. Infatti è opportuno mostrare un esempio di triangoli che hanno due lati congruenti e un angolo qualsiasi congruente, e far notare che i due triangoli non sono affatto congruenti.

Allo stesso modo si dimostra che:

SECONDO CRITERIO
Se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.
TERZO CRITERIO
Due triangoli che hanno ordinatamente i tre lati congruenti, sono congruenti.

Con il terzo criterio è possibile sottolineare che due triangoli che hanno i tre lati congruenti, sono congruenti. Ne segue che anche i tre angoli saranno congruenti.
Se invece due triangoli hanno tre angoli congruenti non è detto che siano congruenti (questa proprietà verrà ripresa nello studio dei criteri di similitudine).

I criteri di congruenza sono fondamentali per lo studio della geometria. Essi verranno richiamati un'infinità di volte.

In particolare con i criteri di congruenza si dimostrano le proprietà del triangolo isoscele:
TEOREMA
Se un triangolo è isoscele allora ha due angoli congruenti.
(Nella dimostrazione si vede che gli angoli congruenti sono gli angoli alla base).

Inoltre:
TEOREMA (inverso)
Se un triangolo ha due angoli congruenti allora è isoscele.

Possiamo quindi enunciare i due teoremi nel seguente modo:
TEOREMA
Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia isoscele è che abbia due angoli congruenti.

Possiamo usare il software Cabri per verificare graficamente i tre criteri.
Partiremo dall'assegnare un triangolo e sfruttando le ipotesi del primo criterio disegneremo un triangolo congruente a quello di partenza.
Faremo la stessa cosa sia per il secondo criterio che per il terzo. Inoltre possiamo verificare le proprietà del triangolo isoscele.

Punti notevoli di un triangolo.

Teorema fondamentale delle rette parallele: Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette del piano siano parallele è che, tagliate da una trasversale, formino:
o due angoli alterni (interni o esterni) congruenti;
o due angoli corrispondenti congruenti
o due angoli coniugati (alterni o interni) supplementari.

Servendoci di questo teorema e dei criteri di congruenza riusciamo a dimostrare i teoremi sui punti notevoli di un triangolo:

TEOREMA 1
Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in un punto detto CIRCOCENTRO
(La definizione di circocentro non è casuale, infatti tale punto coincide con il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Il punto potrà essere interno o esterno al triangolo, a secondo che è acutangolo o ottusangolo. Se invece il triangolo è rettangolo il punto si troverà sull'ipotenusa, o meglio coinciderà con il punto medio dell'ipotenusa).

TEOREMA 2
Le tre altezze di un triangolo, o i loro prolungamenti, si incontrano in un punto detto ORTOCENTRO.

(tale punto può essere interno o esterno al triangolo. In particolare sarà esterno se il triangolo è ottusangolo. Coinciderà con un vertice (quello dell'angolo retto) quando il triangolo è rettangolo)

TEOREMA 3
Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto detto INCENTRO.
(In questo caso il punto è sempre interno infatti l'incentro è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo)

TEOREMA 4
Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un punto detto BARICENTRO, che divide ciascuna di esse in due parti delle quali quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

(Il baricentro è sempre interno al triangolo).

Le proprietà elencate tra parentesi possono essere richieste in laboratorio direttamente agli studenti. Infatti, con Cabri è molto semplice verificare che le tre altezze si incontrano in un punto. Se facciamo variare il triangolo, si vede che il punto sarà interno fino a quando il triangolo è acutangolo. Dopodichè (quando il triangolo è ottusangolo) il punto si trova all'esterno. Se invece consideriamo il triangolo rettangolo, si vede (ma dovrebbe essere banale la risposta) che il punto coincide con il vertice dell'angolo retto.
La stessa cosa verrà fatta con gli altri punti.

Inoltre in laboratorio, possiamo far vedere come il Baricentro, l'Ortocentro e il Circocentro stanno sulla stessa retta, detta "Retta di Eulero"; e che l'Incentro appartiene alla retta di Eulero quando il triangolo è isoscele. A questo punto si possono introdurre le proprietà del triangolo isoscele:

TEOREMA
In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è anche altezza e mediana rispetto alla base.

Considerando il triangolo equilatero come un particolare triangolo isoscele su tre basi diverse, si ha che considerato un lato qualunque, l'altezza e la mediana relativa a quel lato e la bisettrice dell'angolo opposto a quel lato sono uguali e quindi i 4 punti coincidono.
Inoltre è ovvio che:
TEOREMA
Un triangolo equilatero è equiangolo.

DEFINIZIONE Un poligono è l'insieme dei punti del piano costituito da una poligonale chiusa non intrecciata e dai suoi punti interni.

DEFINIZIONE Un parallelogramma è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.
Condizione necessarie
Se un quadrilatero è un parallelogramma allora:
- ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
- i lati opposti sono congruenti;
- gli angoli opposti sono congruenti;
- gli angoli adiacenti a ogni lato sono supplementari;
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

Vale inoltre il seguente criterio per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma. Esso fornisce quattro condizioni sufficienti, e indipendenti tra loro, affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.
TEOREMA
Se un quadrilatero convesso ha:
- I lati opposti congruenti, oppure
- Gli angoli opposti congruenti, oppure
- Le diagonali che si incontrano nel loro punto medio, oppure
- Due lati opposti congruenti e paralleli,

allora è in parallelogramma.
DEFINIZIONE Un rettangolo è un parallelogramma con gli angoli congruenti.

Poiché gli angoli adiacenti a un lato di un parallelogramma sono supplementari, ogni angolo di un rettangolo è un angolo retto.

Di conseguenza per affermare che un parallelogramma è un rettangolo è sufficiente dimostrare che ha un angolo retto.
vale il seguente criterio per stabilire se un parallelogramma è un rettangolo.

TEOREMA Un parallelogramma con le diagonali congruenti è un rettangolo.

DEFINIZIONE Un rombo è un parallelogramma con i lai congruenti.

Per il rombo sono valide tutte le proprietà del parallelogramma.

LE PROPRIETÀ DEL ROMBO
TEOREMA Un rombo ha le diagonali che sono perpendicolari fra di loro e bisettrici degli angoli.

Vale anche il seguente criterio per stabilire se un parallelogramma è un rombo.

TEOREMA
Se un parallelogramma ha:
- Le diagonali perpendicolari, oppure
- Le diagonali che sono bisettrici degli angoli,

allora è un rombo.

DEFINIZIONE Un quadrato è un parallelogramma con gli angoli e i lati congruenti.

LE PROPRIETÀ DEL QUADRATO
TEOREMA Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari e bisettrici degli angoli.

Vale inoltre il seguente criterio per stabilire se u parallelogramma è un quadrato.

TEOREMA
Se un parallelogramma ha:
- Le diagonali congruenti e perpendicolari, oppure
- Le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo,

allora è un quadrato.

DEFINIZIONE Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.

E' possibile rappresentare graficamente la famiglia dei quadrilateri mediante la relazione di inclusione ricordando che un parallelogramma e' anche un trapezio e che un rombo e' un parallelogramma, eccetera.