# Unità didattica: <u>DERIVATE</u>

**<u>DESTINATARI:</u>** Allievi che frequentano il quarto anno di un Liceo Scientifico PNI. Si svolge nel corso del secondo quadrimestre. (Questo da programmi ministeriali, in realtà però di solito le derivate si studiano a inizio quinta, dato il notevole contenuto concettuale e data la corposa richiesta di prerequisiti; in tal modo si facilita anche il successivo passaggio all'argomento dell'integrazione al quale la derivazione è strettamente connessa.). Le ore settimanali di matematica previste sono 5(2[1]).

**<u>PROGRAMMI MINISTERIALI DEL PNI:</u>** Le derivate fanno parte del tema n.7 '*Analisi infinitesimale'*. Nei commenti al tema n.7 si afferma: "*L'introduzione del concetto di derivabilità sarà accompagnato da un ventaglio quanto più ampio possibile di loro impieghi in ambiti matematici ed extramatematici ed arricchita dalla presentazione di opportuni controesempi. Si può dare un'idea intuitiva del concetto di derivata, legato ai classici problemi della tangente ad una curva ed alla velocità".*

**<u>Gli argomenti che in genere precedono la teoria delle derivate sono : Limiti di una funzione e Funzione Continue</u>**

**<u>Argomento che segue la teoria della derivate: Teoremi fondamentali del calcolo differenziale e Integrali</u>**

**<u>PREREQUISITI:</u>**

- Numeri reali
- Calcolo algebrico
- Piano cartesiano e elementi di geometria analitica
- Nozioni di trigonometria (e relazioni tra lati e angoli di un triangolo rettangolo)
- Polinomi, grado di polinomi
- Binomio di Newton
- Rappresentazione di rette e coniche nel piano cartesiano e posizioni reciproche tra le medesime
- Definizione di funzione di una variabile
- Limite di una funzione, limiti notevoli
- Definizione di continuità di una funzione
- Punti di discontinuità
- Definizione di funzione composta e di funzione inversa
- Saper utilizzare il software *Derive* e il foglio elettronico *Excel*

**<u>METODOLOGIE DIDATTICHE:</u>** Due sono le principali metodologie che l'insegnante ha a disposizione per proporre un efficace sviluppo dell'argomento:
1) il riferimento alla sua evoluzione storica in quanto:*"spiega le origini delle idee, dei problemi, delle teorie ... infonde la certezza che questa disciplina non è una stantia raccolta di cose già fatte ... ma qualche cosa in perpetua evoluzione, fatta dall'uomo per l'uomo ...". In particolare* per mostrare che la definizione di derivata non è sempre stata rigorosa e astratta come è oggi, ma nasce da problemi meno generali di tipo geometrico (problema delle tangenti) e fisico (determinazione della velocità istantanea di un mobile).
*2)* l'utilizzo delle nuove tecnologie che consente: diverse rappresentazioni degli oggetti matematici, mette a disposizione alfabeti più ricchi e flessibili, offre possibilità di compiere vere e proprie esplorazioni di ambienti matematici.

Le lezioni saranno poi frontali-dialogiche.

**<u>MATERIALI:</u>** i soliti (gessi lavagna, calcolatrice, Derive ed Excel)

**OBIETTIVI SPECIFICI:**
***<u>Conoscenze</u>***
- Definizione di rapporto incrementale

[1] Le ore in parentesi sono di laboratorio.

- definizione di derivata di una funzione in un punto
- definizione di derivata destra e sinistra di una funzione in un punto
- significato di retta tangente ad una curva del piano cartesiano in un punto come retta “limite” delle rette secanti la curva e passanti per il punto dato (condizione di derivabilità di una funzione in un punto dal punto di vista geometrico)
- definizione di derivabilità di una funzione in un intervallo reale I;
- relazioni esistenti tra derivabilità e continuità di una funzione
- Conoscere le regole di derivazione di:somma di funzioni,prodotto di una costante per una funzione, prodotto di più funzioni, del quoziente, della funzione reciproca e inversa, della funzione composta
- definizione di funzione derivata di ordine n-esimo di una funzione
- concetto di differenziale di una funzione

**Abilità:**

- interpretare il rapporto incrementale come “pendenza” di una curva in un punto
- valutare, sulla base della definizione, se una funzione è derivabile o meno in un punto
- Saper ricavare l’equazione della retta tangente la curva data (curva che rappresenta una funzione) in un punto fissato e saperla riportare graficamente su un piano cartesiano
- Data una funzione individuare i punti nei quali essa è derivabile
- Comprendere il passaggio dalla derivata di una funzione in un punto alla funzione derivata
- Calcolare la derivata di funzioni elementari attraverso il limite del rapporto incrementale
- Saper applicare le regole di derivazione
- valutare le funzioni derivate successive a partire da una funzione derivabile in un intervallo reale.
- Saper applicare il concetto di derivata a varie situazioni geometriche e fisiche, In particolare:
- saper determinare il coefficiente angolare della tangente a una curva;
- conoscere e applicare i concetti di velocità istantanea e di accelerazione istantanea di un punto mobile in moto rettilineo e di un punto che si muove di moto armonico semplice;
- Saper applicare il concetto di derivata nel calcolo dell’intensità di corrente elettrica.
- Saper applicare alla fisica il concetto di differenziale.

**CONTENUTI**

- Problemi che conducono al concetto di derivata: le tangenti ad una curva e la velocità istantanea
- Introduzione storico-epistemologica (metodo di Fermat, Leibniz e Newton)
- Definizione di rapporto incrementale
- Definizione di derivata in un punto, derivata destra e sinistra
- Derivata come tasso di variazione istantanea
- Definizione di funzione derivata in un intervallo
- Passaggio dalla derivata di una funzione in un punto alla funzione derivata
- Relazione fra continuità e derivabilità
- Derivata delle funzioni elementari tramite definizione
- Regole di derivazione.
- Funzione derivata seconda e derivate successive
- Differenziale di una funzione
- Applicazione del concetto di derivata alla fisica, all’economia (INTERDISCIPLINARIETA’)

**TEMPI DELL’INTERVENTO DIDATTICO**

Accertamento prerequisiti: 1 ora
Attività con *Derive* e *Excel*: 3 h
Lezione frontale e dialogica in classe (sono compresi anche gli esercizi alla lavagna): 16-18 h
Verifica sommativa: 2h
Consegna e correzione della verifica sommativa: 1h
Totale: 25 ore circa (per circa un mese e mezzo di lezione)

**SVILUPPO DEI CONTENUTI:**

## 1. INTRODUZIONE STORICO-EPISTEMOLOGICA

Sottolineare che il procedimento infinitesimale scaturì da due problemi principali: quello della *determinazione della velocità istantanea di un mobile* e quello della *determinazione della tangente a una curva in un suo punto*, problemi che aprirono la via al calcolo differenziale.

- il problema della determinazione delle tangenti a una curva, fu affrontato già dai Greci nell'antichità. Questi, avevano un modo di procedere prevalentemente "geometrico". La definizione di retta tangente che essi fornivano, non suggeriva un modo di procedere per determinarla, non si aveva cioè un metodo generale, ma tanti casi particolari. In classe si può fare riferimento alle tangenti alle coniche viste al terzo anno. Quando si spiegano le coniche, si può mostrare con Cabri come si traccia la tangente a una conica in un punto e far notare ai ragazzi che non esiste un metodo generale per tracciare la tangente, ma il metodo varia in base al tipo di conica. Se si ha tempo si possono riprendere queste costruzioni all'inizio dello studio delle derivate.
- I fondatori del calcolo differenziale furono **Newton** e **Leibniz**. Essi, pressoché contemporaneamente (sulla paternità del calcolo differenziale ci fu una grossa disputa), definirono un metodo generale per trovare le tangenti a una curva, cioè indipendentemente dalla curva presa in considerazione. La notazione che utilizziamo oggi è quella di Leibniz.
- Le teorie di Leibniz e Newton (da cui nacquero due scuole antagoniste, una continentale e una inglese) diedero adito a molte critiche in quanto mancavano di un supporto analitico: la loro definizione di derivata non si fonda sul concetto di limite. Il concetto di limite è stato introdotto soltanto più tardi. La prima definizione è stata data da D'Alembert nel 1700.

**Storicamente il concetto di derivata è nato prima del concetto di limite**.

Anche noi siamo partiti da un approccio più geometrico per avere un'idea più intuitiva di derivata e per ricalcare il percorso storico.

## 2. DEFINIZIONE DI RAPPORTO INCREMENTALE DI UNA FUNZIONE E SUO SIGNIFICATO GEOMETRICO

Non si parte dalla definizione di rapporto incrementale, ma da un esempio di funzione lineare f(x) e di una quadratica g(x): fare compilare agli studenti una tabella di questo tipo con x = 0, 1, 2, 3,….(Δx deve essere costante)

| | f(x)=5x + 3 | g(x)=x ² | Δx | Δf | Δg | Δf/Δx | Δg/Δx |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 0 | | | | | |
| 1 | 8 | 1 | 1 | 5 | 1 | 5 | 1 |
| 2 | 13 | 4 | 1 | 5 | 3 | 5 | 3 |

I rapporti Δf/Δx e Δg/Δx ci danno la pendenza dei relativi grafici. Impostando una lezione dialogica, arrivare a dire che in un caso la pendenza è sempre uguale e nell'altro invece varia.

Si può poi procedere e far calcolare ai ragazzi anche $\Delta^2 f / \Delta x$, $\Delta^2 g / \Delta x$ e commentare i risultati ottenuti. Questa tabella si può compilare con *Excel*, considerando anche funzioni polinomiali di grado superiore a 2 e poi si può costruire il grafico a partire dai valori delle colonne Δf/Δx, Δg/Δx, $\Delta^2 f / \Delta x$, ecc. Si può poi commentare in classe il risultato ottenuto.

**Cos'è la pendenza di un grafico curvo in un punto $x_0$?**

Se prendiamo due punti abbastanza vicini sulla retta reale, $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0+h}$, la "pendenza" del grafico di **f** in $\mathbf{x_0}$ è vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico, ($x_0$; f($x_0$)) e ($x_0$ + h; f($x_0$ + h)). Tale pendenza è data dall'espressione :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ detta "**rapporto incrementale".**

Ricordiamo che il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P_0$ e $P$ è : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Quindi **il rapporto incrementale della funzione f relativo al punto $x_0$ e all'incremento h è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P_0$ ($x_0$, $f(x_0)$) e $P$ ($x_0+h$, $f(x_0+h)$).**

**3.DEFINIZIONE DI DERIVATA**

Consideriamo una generica funzione $f : x \rightarrow f(x)$ definita in un intervallo aperto.
Sia $P_0$ ($x_0$, $f(x_0)$ ) appartenente alla curva.

- Vediamo la variazione di $x$ in un intorno di $x_0$ cioè consideriamo $\Delta x = x - x_0$.
 Al variare di $\Delta x$ varia il coefficiente angolare della retta secante la curva data nei punti $P_0\,(x_0, f(x_0))$ e $P\,(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.
- Consideriamo $\Delta x$ sempre più piccoli:la retta secante la curva nei punti $P_0\,(x_0, f(x_0))$ e $P(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ tende ad approssimare in maniera sempre più accurata la funzione nell'intorno del punto $x_0$.
- Al tendere di $\Delta x$ a zero, il punto $P(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ si avvicina sempre più al punto $P_0\,(x_0, f(x_0))$, fino a coincidere, al limite, con il punto $P_0$ stesso: la retta secante può essere considerata come il limite delle posizioni delle rette secanti la curva condotte per i punti $P_0\,(x_0, f(x_0))$ e $P\,(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Tale retta limite viene chiamata **retta tangente** la curva data nel punto $P_0\,(x_0, f(x_0))$.

Si generalizza così il concetto di retta tangente introdotta al terzo anno limitatamente al caso delle coniche.

<u>Nota importante:</u> non esistono altri strumenti, se non la derivata, per definire la retta tangente, e tuttavia quest'ente geometrico è stato utilizzato in tutti gli anni scolastici precedenti. Il rischio di presentare dapprima la definizione formale di derivata di una funzione in un punto e poi esplicitare il suo significato geometrico è quello di separare eccessivamente l'argomento derivata dalle conoscenze già possedute dagli studenti; l'approccio al concetto di derivata tramite il suo significato geometrico può aiutare gli allievi nel processo di ristrutturazione delle proprie conoscenze in una prospettiva di sempre maggior organizzazione formale e rigorosa.

Il coefficiente angolare della tangente **così definita** è $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

=> l'equazione della retta tangente la curva nel punto $P_0\,(x_0, f(x_0)\,)$ è espressa dall'equazione:
$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Quindi si da la definizione di derivata: *Una funzione f definita in un intorno del punto* $x_0$ *si dice* ***derivabile*** *in* $x_0$ *se* ***esiste*** *ed è* ***finito*** *il limite del rapporto incrementale:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Il valore di tale limite si chiama **derivata** della funzione nel punto $x_0$ e verrà indicato con $f'(x_0)$.

Si introducono poi le definizioni di **derivata destra** e **sinistra** e si arriva a dire:

**-** Dal punto di vista analitico: **Condizione necessaria e sufficiente** affinché la funzione ***f*** sia derivabile in $\boldsymbol{x_0}$ è che $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistano e siano finiti e che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

- Dal punto di vista geometrico: deve esistere ed essere unica la retta tangente alla curva rappresentativa di f in $P_0$ e non è parallela all'asse y.

Se tale condizione non viene rispettata allora tale funzione **non** è derivabile in $\boldsymbol{x_0}$ ed il punto $\boldsymbol{P_0\,(x_0, f(x_0)\,)}$ si dice **punto angoloso**.

<u>Esempio</u> in cui non vale uguaglianza:f(x) = |x| <=funzione che torna sempre utile in questa ud.
Si possono proporre dei Laboratori con *Derive* ed *Excel*:

- Tracciare funzioni con *Derive* e tracciare le tangenti nei punti in cui la funzione non è derivabile: vedere casi in cui la tangente non è unica e casi in cui è parallela all'asse y.
- possiamo pensare di costruire un foglio elettronico che determini l'equazione della tangente al grafico di una funzione (ad es. la funzione $f(x) = \dfrac{6 - 3x}{3 + x}$ in un suo punto *T* e che tracci i grafici della funzione e della tangente trovata.)

- Si fa poi l’Estensione del concetto di derivabilità da un punto a un intervallo reale, prima aperto e poi chiuso.
4. Si può pensare anche di sottolineare l’importanza dello strumento derivata in varie scienze come *tasso di variazione istantaneo*. Data una grandezza $y = f(x)$, il *tasso di variazione medio* in un intervallo $\Delta x$ è il rapporto tra la variazione della variabile dipendente, indicata con $\Delta y$, e la corrispondente variazione della variabile indipendente, ovvero:

$$\textit{tasso di variazione medio} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Il tasso di variazione medio è quindi il rapporto incrementale. Nelle applicazioni economiche e statistiche si considerano in generale, tassi di variazioni medi (ad esempio il tasso di inflazione medio mensile, che esprime la variazione del costo della vita nell’arco di un mese). Sottolineando l'utilità di un'informazione su come una grandezza varia in un certo istante può tuttavia essere interessante conoscere il *tasso di variazione istantaneo* di una grandezza. In questo caso occorre calcolare un limite del tipo:

$$\textit{tasso di variazione istantanea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Perciò, l’andamento di un fenomeno (espresso da una funzione) è regolato da due aspetti distinti:

- *il suo stato* (dove sta): qual è cioè il valore della funzione in un punto;
- *la sua tendenza* (dove va): qual è la variazione della funzione in un punto, se i suoi valori stanno aumentando o diminuendo o sono stazionari;

Il primo aspetto è descritto dalla funzione stessa e dal valore che essa assume in corrispondenza di un valore assegnato alla variabile indipendente. Il secondo aspetto è descritto dal tasso di variazione istantanea, cioè dal limite del rapporto incrementale della funzione in quel punto.
Si possono proporre alcuni esempi tratti dalla quotidianità

5. Il passaggio da derivata in un punto alla funzione derivata non è di solito di immediata comprensione per gli studenti (e molti libri non la esplicitano bene)

- Sia f: x $\rightarrow$ f(x) funzione definita nell’intervallo reale I= **]a,b[** si dice derivabile in I se è derivabile in ogni punto di I.

Si dice **funzione derivata** della funzione *f*, la funzione *f’*, definita nell’intervallo *I* aperto in cui la *f* è derivabile, che associa ad ogni punto *x* dell’intervallo il numero *f’*(*x*), cioè la derivata di *f* in *x*.

- Se la funzione è definita in un intervallo reale **[a,b]**, si dice che la funzione f è derivabile nell’estremo inferiore a se esiste la derivata destra della funzione in a; si dice che la funzione f è derivabile nell’estremo superiore b se esiste la derivata sinistra della funzione in b.

Si dice che la funzione f è derivabile nell’intervallo [a,b] se è derivabile in ogni punto di [a,b], estremi compresi.

### 4. CONTINUITA’ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Gli studenti devono capire è che è lecito chiedersi se una funzione derivabile è sempre continua e se viceversa, una funzione continua è sempre derivabile.
Lezione dialogica partendo da esempi di funzioni continue ma non derivabili e di funzioni sia continue che derivabili.
Ad esempio: f(x)=|x| (è continua ma non derivabile in x=0 perché limite destro e sinistro del rapporto incrementale sono finiti ma diversi (punto angoloso)), $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (il limite del rapporto incrementale è infinito questo implica che in x=0 la funz. non è derivabile nonostante sia continua(la tangente al grafico è // all’asse y, in questo caso coincide))

**Teorema: Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0$ allora è anche continua in $x_0$.**

Osservazione**: non vale il viceversa!**

### 5. DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI TRAMITE LA DEF. DI DERIVATA

Vedere insieme in classe le derivate di alcune funzioni elementari:

$\frac{d}{dx}(k)=0$; $\frac{d}{dx}(x)=1$; $\frac{d}{dx}(x^2)=2x$; $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$; $\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$; $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$; $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

Altre si possono lasciare per esercizio ai ragazzi: $\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2$, $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

**6.REGOLE DI DERIVAZIONE:** Sottolineare con gli studenti che, fino a questo momento, abbiamo concentrato le energie per derivare funzioni di vario genere, trasformando opportunamente i rapporti incrementali per poi eseguire il passaggio al limite. Una conquista determinante fu compiuta quando, grazie a Leibniz, a Newton e ai loro successori, si sostituirono questi artifici individuali con efficaci metodi generali. Con essi, si può derivare quasi meccanicamente ogni funzione che si presenta in matematica, evitando così l'ostico e talvolta difficile passaggio al limite; la derivazione, in questo modo acquisisce il carattere di un algoritmo di calcolo, ed è proprio questo aspetto della teoria che ci permette di utilizzare il termine "calcolo".
Perciò vedere in classe le regole di derivazione: della somma, del prodotto, del prodotto tra una costante e una funzione, della funzione reciproca, del quoziente di funzioni, della composizione di funzioni, della potenza ad esponente qualsiasi, ecc. Non fare in classe la dimostrazione di tutte le regole, ma solo di quelle più semplici. Dopo l'esposizione di ogni regola fare esercizi chiamando i ragazzi alla lavagna.
Osservazione: la regola dei derivazione del prodotto viene ripresa quando si studia la regola di integrazione per parti.

### 6. FUNZIONE DERIVATA PRIMA E DERIVATE SUCCESSIVE

Sia *f* definita in un intervallo I di R e ivi derivabile. Consideriamo la sua derivata *f'*.
Se anche la funzione *f'* è derivabile in I, possiamo definire una nuova funzione detta derivata prima di **f'** o **funzione derivata seconda di f**:
In generale, supponendo che la funzione derivata *n-esima* di ***f*** sia derivabile è possibile costruire la **funzione derivata n+1-esima della funzione f**.
Osservare che:
- o se una funzione è pari, allora la sua derivata è dispari;
- o se una funzione è dispari, allora la sua derivata è pari.

Osservare che le funzioni polinomiali di grado n ammettono derivate non nulle fino all'ordine *n*, mentre tutte le derivate di ordine superiore risultano essere nulle (fare riferimento a quanto visto con *Excel* al paragrafo 3).
- Con Derive si può proporre un'esercitazione che dal grafico di f si deduca il grafico di f' e viceversa noto il grafico di f' dedurre il grafico di f.

### 7. DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e siano $x_0$ e $x_0+\Delta x$ due punti interni a *I*. Si dice **differenziale della funzione *f*** relativo al punto $x_0$ la funzione lineare $df : R \to R \mid \Delta x \to f'(x_0)\Delta x$.
Il differenziale $f'(x_0)\Delta x$ viene spesso indicato con il simbolo $df$ oppure $dy$ .Sostituire l'incremento $\Delta f$ della funzione con il differenziale significa, geometricamente, approssimare, nell'intorno di $x_0$, la curva con la tangente alla curva in $x_0$.
$f(x) = f(x_0+\Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ :approssimazione lineare della funzione *f* in un intorno di $x_0$.

### APPLICAZIONI ALLA FISICA (ARGOMENTI GIA' TRATTATI IN FISICA)

Applicazione fisica del differenziale: determinazione della variazione della forza elettrostatica al variare della distanza fra le cariche

Applicazioni fisiche della derivata:

- velocità e accelerazione in funzione del tempo nel moto rettilineo

- Intensità di corrente elettrica: $i(t) = q'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}$ dove q indica la carica e t indica il tempo
- Velocità e accelerazione nel moto armonico semplice

**APPLICAZIONI ALL'ECONOMIA:** Si possono fare tanti esempi, uno di questi è quello sul costo marginale che è la derivata di una certa funzione *C*(*x*), e viene proprio usata per calcolare il costo aggiuntivo di un'ipotetica ulteriore unità in produzione.

Esempio: Il costo, in euro, della produzione di *x* motorini, è dato dalla funzione

$$C(x) = 2000 + 300x - x^2 / 2 .$$

Supponendo che ne possano essere prodotti 50 al giorno, si chiede il costo di un eventuale 51-mo.

**Verifica sommativa**:

- Calcolo di derivate con limite del rapporto incrementale
- Calcolo di derivate utilizzando le regole di derivazione
- Determinazione dell'equazione della retta tangente
- Studiare continuità e derivabilità in un punto di una funzione
- Dal grafico di f a quello di f'