Unità didattica: <u>TEOREMI FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE</u>

DESTINATARI: Allievi che frequentano il quarto anno di un Liceo Scientifico PNI. Si svolge nel corso del secondo quadrimestre. (questo da programmi ministeriali, in realtà però di solito questi teoremi si studiano a inizio quinta). Le ore settimanali di matematica previste sono 5 (2[1]).

PROGRAMMI MINISTERIALI DEL PNI: I teoremi del calcolo differenziale fanno parte del tema n.7 '*Analisi infinitesimale'* in cui si afferma di sviluppare i Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange, De L'Hopital.

L'argomento che in genere precede I teoremi fondamentali del calcolo differenziali è: La teoria delle derivate.

Gli argomenti che seguono "I teoremi fondamentali del calcolo differenziale" sono: Studio di funzione reale di variabile reale e problemi di massimo e di minimo (anche per via elementare) e Gli Integrali.

PREREQUISITI

- Definizione di funzione di una variabile reale
- Intersezione di una funzione con gli assi e studio del segno di una funzione
- Limite di una funzione
- Asintoti di una funzione
- Definizione di continuità di una funzione
- Teoremi sulla continuità (in particolare Weierstrass)
- Derivata in un punto e suo significato geometrico
- Funzione derivata in un intervallo, funzione derivata prima e di derivate successive
- Derivate delle funzioni elementari
- Rapporto fra continuità e derivabilità
- Operazioni con le derivate, derivata della funzione composta e della funzione inversa
- Saper utilizzare il software *Derive*

METODOLOGIE DIDATTICHE: Metodo frontale e dialogico; utilizzo di *Derive* per presentare nuovi concetti, per vedere il significato dei teoremi studiati e per vedere esempi.

OBIETTIVI SPECIFICI:

Conoscenze

- definizioni di massimo, minimo, punto di massimo, punto di minimo
- differenza fra minimo (massimo) relativo ed assoluto
- teorema di Fermat e il suo significato geometrico
- teorema di Rolle e il suo significato geometrico
- teorema di Cauchy
- teorema di Lagrange e il suo significato geometrico
- corollari del teorema di Lagrange
- legame tra crescenza e decrescenza di una funzione e la sua derivata
- teorema di De L'Hospital

Abilità

- applicare in modo corretto i teoremi di Rolle e Lagrange
- individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza di una funzione
- determinare i massimi e minimi relativi di una funzione nel caso in cui la derivata prima cambi segno in un intorno dei punti di massimo e minimo.
- calcolare il limite, se esiste, di forme indeterminate con il teorema di De L'Hospital

[1] Le ore in parentesi sono di laboratorio.

• Iniziare ad utilizzare le conoscenze acquisite per risolvere i primi problemi di massimo e minimo (in questa ud non viene trattato lo studio della derivata seconda, che si vedrà nella ud relativa a massimi e minimi,)

<u>CONTENUTI</u>

- Definizione di massimo e minimo assoluto, di punto di massimo e minimo relativo
- Teorema di Fermat
- Teorema di Rolle, Cauchy, Lagrange e corollari del teorema di Lagrange
- Teorema di De L'Hospital

<u>TEMPI DELL'INTERVENTO DIDATTICO</u>

Lezione frontale e dialogica in classe (sono compresi anche gli esercizi alla lavagna): 10 h
Attività con il laboratorio (*Derive*): 2 h
Verifica sommativa: 2h
Consegna e correzione della verifica sommativa: 1h
<u>Totale:</u> 15 ore circa, che corrisponde a 3 settimane di lezione.

<u>SVILUPPO DEI CONTENUTI</u>:

<u>INTRODUZIONE:</u> Si analizzano e studiano alcuni teoremi che utilizzano il concetto di derivata. Tali teoremi sono molto importanti, perché permetteranno di studiare l'andamento delle funzioni. In particolare vedremo i teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange e i loro corollari. Non ci soffermeremo molto sulle applicazioni di questi teoremi allo studio di funzioni e ai problemi di massimo e minimo, in quanto saranno trattati in modo più specifico in una delle unità didattiche successive e dedicate alle applicazioni del calcolo differenziale: "studio di funzione reale di variabile reale"e problemi di massimo e di minimo (anche per via elementare)". Vedremo poi il teorema di De L'Hospital, che permette di risolvere limiti che si presentano in forma indeterminata utilizzando le derivate. Soltanto di qualcuno di questi teoremi verrà riportata la dimostrazione: nella maggior parte dei casi non vedremo la dimostrazione, ma vedremo soltanto l'interpretazione geometrica, utilizzando anche Derive.

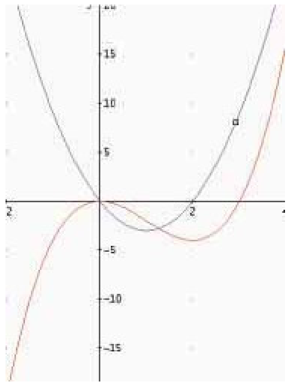
1. <u>MASSIMI E MINIMI</u>: Si possono ripetere le definizioni di massimo e minimo assoluto, già date quando sono state studiate le funzioni.

- I concetti di **minimo, punto di minimo**, **massimo** e **punto di massimo** (intendendo essi **assoluti**) spesso non sono chiari per gli studenti, che fanno confusione fra punti di minimo e massimo, che si trovano nel dominio della funzione, e valore minimo e massimo, che si trovano nel condominio della funzione. Per chiarire questa differenza si può fare in classe un esempio di una funzione che ammette minimo (o massimo) e vedere quale è il minimo e quale è il punto di minimo.

(es. $f(x) = x^2 - 10x + 26$,→$f(x) = (x - 5)^2 + 1$,→il minimo è 1, il punto di minimo è 5; infatti perché $f(x_0)=1$ occorre che $x_0=5$).

- Si deve inoltre ricordare il <u>teorema di Weierstrass</u>: se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato I = I=[a,b], allora assume in esso un valore massimo M e un valore minimo m (assoluti).

- Si deve dare la definizione di punto di massimo relativo (o locale) e di punto di minimo relativo (o locale).



Occorre precisare che **massimo** e **minimo relativi**, si riferiscono a un intervallo contenuto nel dominio, ed esprimono condizioni che valgono solo localmente. Il **massimo** e **minimo assoluti** sono, invece, il più grande e il più piccolo dei valori che la funzione assume nell'intero insieme di definizione. Si ha quindi che, se una funzione ammette massimo (minimo), questo è unico; mentre possono esistere più massimi (minimi) relativi e può anche accadere che un minimo relativo sia maggiore di un massimo relativo. Tracciare Con *Derive* una funzione e la sua derivata prima insieme. Ad esempio prendere come funzione iniziale una funzione polinomiale di grado 3. Dall'analisi dei due grafici si dovrebbe intuire sia il legame fra il segno della derivata prima con la crescenza e decrescenza della funzione, sia la presenza di un massimo e di un mimino relativi all'annullarsi della derivata prima.

2. <u>TEOREMA DI FERMAT</u>: Nei punti di massimo o minimo locali di una funzione derivabile, **interni** al dominio la derivata vale zero.

<u>Sottolineare subito che:</u> 1)questo teorema non fornisce un metodo per determinare massimo e minimo locali per una funzione, ma fornisce soltanto un criterio per sapere se essi esistono.
2) Il teorema di Fermat fornisce una **condizione necessaria ma non sufficiente** per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo locale (errore comune). (L'annullarsi della derivata prima indica solo che nel punto x_0 la retta tangente al grafico è orizzontale ma non è detto che sia un punto di max o min.)

Fornire esempi: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ nel punto (0,0) ($f'(0)=0$ ma $x=0$ non è punto di max ne min)

3) Il teorema per valere richiede che la funzione sia derivabile x_0. Ma non è detto che una funzione non derivabile in x_0 non abbia proprio in quel punto un minimo o un massimo, come ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ nel punto 0.

Si deve mostrare l'interpretazione geometrica vedendo esempi con *Derive.* Con Derive si nota che se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale interno al dominio e la funzione è derivabile in x_0, la retta tangente al grafico nel punto (x_0, $f(x_0)$) è parallela all'asse x.

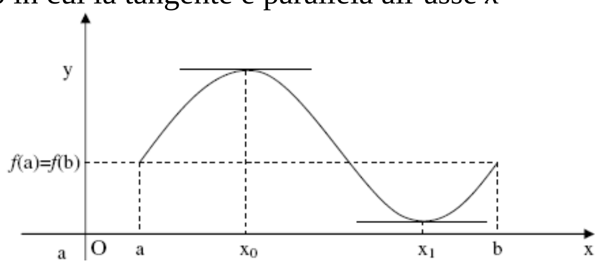
<u>3. TEOREMI DI ROLLE, CAUCHY E LAGRANGE E COROLLARI</u>

I tre teoremi che seguono valgono per funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato $I = [a,b]$ e derivabili almeno in $]a,b[$.

<u>a. Teorema di Rolle</u>: Se $f(x):[a,b]\to R$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e assume valori uguali agli estremi *f(a)= f(b).* Allora esiste almeno un punto x_0 interno all'intervallo tale che $f'(x_0)=0$.

<u>Nota:</u> Per il teorema si può dare la dimostrazione che fa uso del teorema di Weierstrass (sottolineare con gli studenti che tuttavia la dimostrazione che fa uso di tale teorema non è quella originaria fatta da Rolle dal momento che il matematico Weierstrass è successivo)

Occorre mostrare interpretazione geometrica: considerata una funzione continua e derivabile in un intervallo. Dalla figura seguente si vede che, se gli estremi hanno la stessa ordinata, allora esiste almeno un punto del grafico in cui la tangente è parallela all'asse x



<u>Osservazione</u>: Se la funzione non è derivabile anche in un solo punto interno all'intervallo $[a,b]$, non è detto in generale che si possa trovare un punto della curva in cui la tangente sia parallela all'asse x. Come esempio possiamo pensare ancora alla funzione f(x) = |x| ristretta ad un intervallo $[-a,a]$ che non è derivabile nello 0: non esiste alcun punto in cui la derivata si annulla.

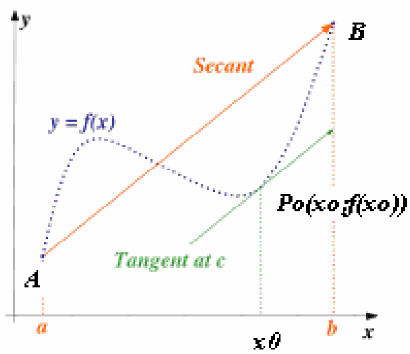
- Un'applicazione del teorema di Rolle è il suo **corollario**: Sia $f(x)$ una funzione indefinitamente derivabile nell'intervallo I; se tale funzione si annulla in m punti di I, allora $f'(x)$ si annulla in almeno (m-1) punti, $f''(x)$ si annulla in almeno (m- 2) punti, … , $f^{m-1}(x)$ si annulla in almeno un punto. (Per questo corollario si può proporre l'interpretazione geometrica con Derive)

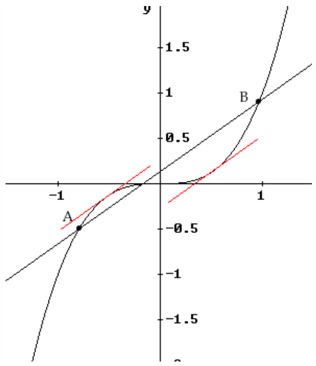
b) Sul teorema di Rolle si fonda il **teorema di Cauchy**: Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo chiuso [a,b], derivabili in ogni punto interno a tale intervallo, e sia inoltre $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in]a;b[$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in]a;b[$ tale che: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Nota: In genere tale teorema non viene dimostrato ma si fanno subito degli esempi di applicazione. (Es. $f(x)= x^2 +5$ e $g(x) = 2x +3$ in I=[0;2]. Vedere se sono soddisfatte le ipotesi del teorema)

c) Il teorema di Cauchy è la base a sua volta del **teorema del valor medio (o di Lagrange)**:
Se f è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, esiste almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che $f'(x_0) = \frac{f(b)- f(a)}{b-a}$.
Si può facilmente dare la dimostrazione del teorema in quanto essa fa uso del teorema di Cauchy: infatti basta porre $g(x)=x$. In tal caso si ha: $g'(x)=1$, $g(b)=b$ e $g(a)=a$. Dal teorema di Cauchy, segue l'asserto.

Nota: Perché si chiama del valore medio? Per dare questa spiegazione occorre riferirsi alla interpretazione cinematica di una funzione $y = f(x)$ in cui x viene pensato come istante di tempo e y come ascissa di un punto mobile su una retta. La funzione deve essere continua in [a, b] e derivabile almeno nei punti interni. Occorre quindi riferirsi al "diagramma orario" e pensare la derivata prima della funzione come velocità istantanea. Con questa interpretazione cinematica l'enunciato del quesito diventa chiaro, perché se per un certo intervallo di tempo ci muoviamo alla velocità media di 60 km/h, vi sarà almeno un istante in cui la velocità è stata esattamente di 60 km/h. Questo si traduce geometricamente nel ben noto grafico relativo al significato geometrico del teorema di Lagrange.
Significato geometrico: il teorema di Lagrange assicura che esista almeno un punto $x_0 \in]a;b[$ tale he la tangente al grafico nel punto $P(x_0; f(x_0))$ sia parallela alla retta AB congiungente i punti $A(a$; f(a)), B(b; f(b)). E' bene sottolineare che, come il teorema di Rolle, anche il teorema di Lagrange esprime l'esistenza di qualche punto del grafico in cui la tangente è parallela alla retta passante per gli estremi.



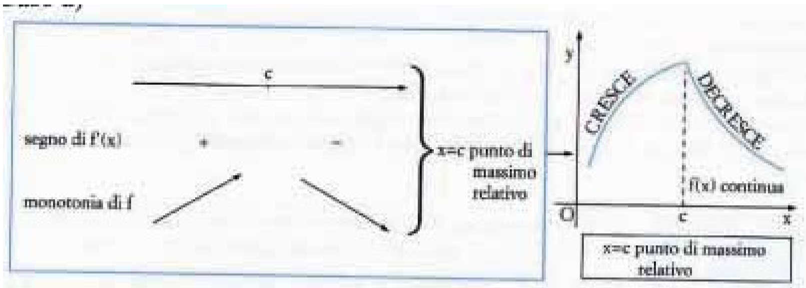


Osservazione 1: possono esistere più punti che verificano il teorema, come illustrato nella seconda figura.
Osservazione 2: questi teoremi parlano dell'esistenza di un punto x_0 nel quale si verificano alcune circostanze, si tratta cioè di affermazioni di esistenza, non costruttive nel senso che non forniscono in alcun modo, un procedimento per individuare il punto x_0 di cui si afferma l'esistenza.
Occorre far veder dei controesempi in cui non valgono le ipotesi dei vari teoremi che abbiamo spiegato.
- L'applicazione di questi teoremi permette di enunciare alcuni teoremi relativi all'andamento delle funzioni:
Occorre prima di tutto ricordare la definizione di funzione strettamente crescente e decrescente.
Teorema 1: Una funzione f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, derivabile in ogni punto interno a tale intervallo e tale che sia $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora è strettamente crescente in $[a, b]$; Se si ha $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[$ allora la funzione è strettamente decrescente in $[a, b]$.

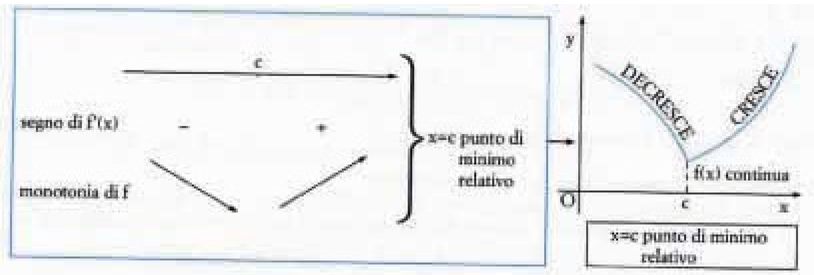
Osservazione: non vale il viceversa:esistono cioé funzioni strettamente crescenti (o decrescenti) in un intervallo senza che risulti sempre in tale intervallo $f'(x)>0$ [$f'(x)<0$]. (es. $y=x^3$ in $[-a, a]$ è strettamente crescente, eppure la sua derivata $f'(x)=3x^2$ si annulla per $x=0$).

Interpretazione geometrica: Se la curva grafico della funzione ha in ogni suo punto una tangente di coefficiente angolare positivo, allora la funzione è necessariamente strettamente crescente. Analogamente se la tangente ha in ogni punto coefficiente angolare negativo….

Come conseguenza del teorema precedente, si ricava un metodo per la ricerca dei massimi e dei minimi relativi con lo studio della derivata prima. Si possono analizzare in classe le seguenti situazioni:



Supposto che la funzione *f(x)* soddisfi i requisiti del teorema precedente in un intorno di *c*, si può osservare che nell'intorno sinistro di *c* la funzione è crescente, mentre è decrescente nell'intorno destro di *c*. Questo porta a concludere che *c* è un punto di massimo relativo.



Supposto che la funzione *f(x)* soddisfi i requisiti del teorema precedente in un intorno di *c*, si può osservare che nell'intorno sinistro di *c* la funzione è **decrescente**, mentre è **crescente** nell'intorno destro di *c*. Questo porta a concludere che *c* è un punto di massimo relativo.

Teorema 2: Una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, con derivata uguale a zero in ogni punto interno all'intervallo, è costante nell'intervallo.

Osservazione: Una funzione f (x) è costante in un intervallo se e soltanto se ha derivata nulla in quell'intervallo (gli alunni hanno già visto nella ud sulle derivate che la derivata di una costante è nulla).

4. TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Prima di tutto ricordiamo quali sono le forme indeterminate dei limiti: $0/0, \infty/\infty, 0*\infty, +\infty-\infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$. Ricordiamo poi che, la denominazione "forme indeterminate" non vuol dire che tali espressioni non possono avere limite, ma semplicemente che il loro eventuale limite non dipende esclusivamente dai limiti delle due funzioni di cui si considera il quoziente, il prodotto o la somma.

Si vedranno ora dei teoremi che riguardano forme del tipo $0/0$ e ∞/∞.

Teorema di De L'Hospital: Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$, derivabili in $]a, b[$, escluso al più nel punto $x_0 \in]a, b[$**.** Siano:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0 \ \ \forall x \in]a, b[, x\neq x_0$
3. esiste (finito o infinito) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste pure il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e coincide con il precedente: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Interpretazione geometrica: Partiamo da un esempio: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{\ln x}$

C'è un "conflitto" fra la funzione al denominatore, che col suo tendere a zero vorrebbe far impennare la frazione verso l'infinito, e la funzione al numeratore, che col suo tendere a zero vorrebbe schiacciare la frazione verso lo zero. Il valore del limite dipenderà dalla rapidità con cui tendono a zero, rispettivamente, numeratore f(x) e denominatore g(x). Ma la rapidità nel tendere a zero di f(x) e, rispettivamente, g(x), è legata alla pendenza con cui il grafico di ciascuna funzione confluisce verso lo zero. Tale pendenza non è altro che la pendenza della retta tangente a ciascuna curva in (1;0) (legata, a sua volta, al coefficiente angolare della tangente ossia alla derivata della funzione). Si devono, pertanto, chiamare in causa le rette tangenti alle due curve.

1) E' bene osservare che, un risultato analogo si ottiene sotto le stesse ipotesi anche nel caso in cui il quoziente delle derivate abbia limite infinito (anziché finito) come richiesto dal teorema.
2) Inoltre, nel caso di forme indeterminate del tipo ∞/∞ vale un analogo teorema

3) I due **teoremi sono validi anche quando *x* tende all'infinito ($+\infty$ oppure $-\infty$)**
Osservazione:
Se il $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non esiste, **nulla si può dire**.

Esempi (importanti): $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$, Qualunque sia $n \in IN$, si ha: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, ovvero la funzione $y = e^x$ è un infinito di ordine superiore della funzione $y = x^n$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \ \forall x \in IR^+ \ e \forall \alpha > 0$ ovvero la funzione $y = \ln x$ è un infinito di ordine inferiore della funzione x^α.
Osservazione: Se dobbiamo risolvere un limite che non si presenta nella forma indeterminata $0/0$ e ∞/∞ ,ma in una delle altre cerchiamo di ricondurci ad una di queste due forme. (Es. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$).
Occorre svolgere alcuni esempi in classe (di applicazione) e poi fare in classe alcune riflessioni, in modo che il teorema di **De L'Hospital non venga utilizzato meccanicamente**, come spesso fanno gli studenti

- **non sempre la sua applicazione semplifica il calcolo del limite:** ad esempio per $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1/x}$ se continuiamo a derivare le funzioni otteniamo forme indeterminate con scritture algebriche sempre più complicate; occorre quindi valutare quale tipo di risultato otteniamo calcolando le derivate e agire nel modo più conveniente, eventualmente scrivendo la funzione data in un altro modo .
- **non è detto che sia necessario applicarlo o che la sua applicazione costituisca il modo più semplice per calcolare il limite:** in particolare, se la funzione data è una funzione razionale fratta, il limite si può calcolare anche con mezzi più semplici.
- **occorre verificare con attenzione che siano soddisfatte le condizioni sotto le quali il teorema è valido:** l'esempio $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ (dopo aver derivato una prima volta) mostra quali errori si possano compiere se, per esempio, si applica il teorema quando non vale l'ipotesi che il limite della funzione di partenza sia della forma 0/0 (oppure ∞/∞).

Osservazione didattica:

Alla fine di questa unità didattica si hanno dei nuovi strumenti per lo studio di funzione: utilizzo della derivata per determinare i massimi e i minimi; utilizzo di De L'Hospital per studiare asintoti delle funzioni che prima erano indeterminati.
Lo studio di funzione dovrebbe essere una costruzione iniziata già nel primo biennio (richiesto nei programmi), essendo molti elementi trasversali a diversi argomenti (equazioni, sistemi lineari e non, disequazioni, campo di esistenza etc.), per cui gli studenti dovrebbero essere in grado già in questa fase di determinare per una funzione:
a) Il campo di esistenza
b) Eventuali simmetrie (funzione pari o dispari)
c) Intersezioni con gli assi
d) Il segno della funzione
e) Gli eventuali asintoti verticali
f) Gli eventuali asintoti orizzontali
g) Gli eventuali asintoti obliqui destro e sinistro.
h) Crescenza e decrescenza, massimi e minimi con la derivata prima

Svolgere in classe studi di funzione, inserendo anche i punti g) e h).

Note didattiche:

- nella risoluzione degli esercizi si insisterà in continuazione nel richiamo dei teoremi sviluppati in modo da rafforzare il legame fra teoria e pratica.

- Negli esercizi proposti si osserverà che esistono casi in cui la derivata prima, pur annullandosi, non cambia di segno nell'intorno del punto (es. $f(x)=(x-3)^3+3$ e $g(x)=(3-x)^3$) e quindi non si tratta di punti di massimo o minimo; si può così anticipare l'idea di punto di flesso.

__**Verifica sommativa**__:

- Esercizio teorico: Sappiamo che non è possibile invertire il teorema di Fermat. Fornisci un esempio che supporti questa affermazione.
- Vedere se alcune funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle, o Cauchy o Lagrange.
- Dato un intervallo di tempo, calcolare velocità media e trovare punto in cui la velocità istantanea ha lo stesso valore (applicazione del teorema di Lagrange)
- Limiti con De L'Hospital (metterne uno in cui non sono verificate le ipotesi)
- Studio di funzione