Osservazioni dei supervisori di cui tenere conto (dall'autore precedente)

la previsione sui tempi è stata ridotta nei limiti del possibile

proprietà dei coefficienti binomiali, è stato suggerito di fare precedere a questa sezione quella sul triangolo di Tartaglia che in questa u.d. è alla fine. Le proprietà dei coefficienti binomiali si deducono dalle corrispondenti proprietà del triangolo di Tartaglia.

proprietà dei coefficienti binomiali, citare la regola di Stifel e la legge dei tre fattoriali.

Potenza di un binomio, alla verifica del binomio di Newton su $(2+3)^5$ va preferita la dimostrazione tradizionale della formula che si trova nei libri di testo

triangolo di Tartaglia, osservare che è più noto in tutto il mondo con il nome di "Triangolo di Pascal".

Come al solito è stato osservato che pur essendo una u.d. in un liceo di ordinamento sarebbe opportuno inserire attività didattiche con software didattici, ad esempio con Excel.

Destinatari

Studenti della Classe V del Liceo Scientifico di ordinamento.

n.b.: nella mia ud l'avevo inserito in III Liceo Scientifico PNI visto che dovevo fare anche probabilità e statistica che nei programmi di ordinamento non sono citate.

Inquadramento nei programmi

Per quanto riguarda i programmi ministeriali del Liceo Scientifico l'argomento è trattato in quinta: "... Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton....."

Nei programmi PNI invece lo troviamo sia nel biennio che nel triennio.

Biennio PNI: "TEMA 3. RELAZIONI E FUNZIONI

a) *Insiemi ed operazioni su di essi. Insiemi finiti: prime nozioni di calcolo combinatorio.....*"

Triennio PNI: "Tema n. 2 - Insiemi numerici e strutture

2.a Calcolo combinatorio: disposizioni, permutazioni, combinazioni

....

Suddivisione per anno

Classe terza: 2.a ..."

Prerequisiti

- Insiemistica.
- Prodotti notevoli.
- Equazioni di grado superiore al primo.
- Progressioni aritmetiche e geometriche.
- Principio di Induzione.

Obbiettivi generali

- Acquisire le conoscenze, competenze e capacità previste dall'U.D.
- Affinare le capacità logiche
- Educare ai procedimenti di astrazione e di formalizzazione dei concetti
- Educare a ragionare induttivamente e deduttivamente
- Sviluppare le attitudini sia logiche che sintetiche
- Abituare alla precisione del linguaggio e alla coerenza argomentativa

OBIETTIVI TRASVERSALI

- Sviluppare attitudine alla comunicazione e ai rapporti interpersonali favorendo lo scambio di opinioni tra docente e allievo e tra gli allievi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche ed argomentative
- Acquisire abilità di studio.
- Comunicare in modo efficace

OBIETTIVI SPECIFICI

CONOSCENZE

- Conoscere le nozioni di permutazione, disposizione, combinazione (semplici e con ripetizione)
- Conoscere la funzione fattoriale.
- Conoscere i coefficienti binomiali e loro proprietà.
- Conoscere la relazione tra triangolo di Tartaglia e coefficienti binomiali.
- Conoscere lo sviluppo della potenza di un binomio nella forma data dal binomio di Newton.

COMPETENZE

- Sapere calcolare il numero di permutazioni, disposizioni, combinazioni.
- Saper calcolare la funzione fattoriale
- Saper calcolare i coefficienti binomiali
- Saper giustificare la relazione tra triangolo di Tartaglia e i coefficienti binomiali
- Saper utilizzare lo sviluppo della potenza di un binomio

CAPACITÀ

- Discriminare il ruolo di permutazioni e combinazioni nel descrivere raggruppamenti ordinati o non ordinati.
- Formulare semplici problemi in termini delle nozioni del calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni) e risolverli discutendo le soluzioni trovate.

Valenze disciplinari

I contenuti del modulo sul calcolo combinatorio costituiscono un argomento con legami con tutte le aree del corso matematica. Elencando alcuni legami possiamo citare il ruolo delle permutazioni in algebra lineare nel calcolo dei determinanti e nei gruppi finiti (simmetrie), il ruolo del binomio di Newton in analisi nella definizione di e e le generalizzazioni del binomio nelle serie di potenze. Inoltre il calcolo combinatorio è la premessa necessaria all'introduzione di modelli probabilistici in spazi di probabilità finiti (prove ripetute di Bernoulli). Applicazioni si trovano poi in meccanica statistica: modelli di occupazione (statistiche di Fermi-Dirac, Bose-Einstein; Maxwell-Boltzmann)

FINALITÀ: *Matematizzare la realtà esterna/ Simbologgiare e formalizzare, attraverso la costruzione di modelli interpretativi, gli strumenti di lettura dei fenomeni/ Esercitare al ragionamento induttivo e deduttivo/ Cogliere l'utilità del confronto di idee e della organizzazione del lavoro di gruppo/ Acquisire conoscenze a livelli più elevati di astrazione e di formalizzazione.*

Contenuti

Permutazioni
Disposizioni
Combinazioni
Triangolo di Tartaglia
Coefficienti binomiali
Potenza di un binomio

Metodologia

Gli obiettivi indicati per questo modulo vengono conseguiti attraverso delle forme di insegnamento-apprendimento che procedono dal concreto all'astratto, dal particolare al generale. Lo sviluppo dei contenuti descritto nel seguito intende evidenziare questi intenti tramite l'illustrazione di casi concreti e semplici per motivare la successiva introduzione dei concetti del calcolo combinatorio. In particolare si usano come situazioni stimolo gli anagrammi per introdurre le permutazioni semplici e ripetute, la generazione di numeri con vincoli o senza vincoli per introdurre le disposizioni semplici e ripetute.

Sempre con l'intento delineato, per la dimostrazioni delle proprietà si preferisce quanto più possibile usare argomentazioni combinatorie che deduzioni formali di difficile interpretazione. In particolare tale criterio viene adottato per le proprietà dei coefficienti binomiali e del binomio di Newton. Vengono comunque fatti riferimenti alle dimostrazioni contenute nel libro di testo per "garantire" l'adeguata correttezza formale.

Le lezioni devono essere svolte garantendo la massima partecipazione degli studenti, stimolando il dialogo con domande e accogliendo gli interventi convergenti verso le conclusioni poste come obiettivo.

*Per rendere più comprensibile l'U.D. che spesso è rappresentata sui libri di testo in maniera complessa e molto frettolosa, e per facilitare l'acquisizione dei contenuti, potrò ricorrere alla tecnica del *problem solving*. La lezione sarà condotta sotto forma di *lezione frontale dialogata* che porta ad un coinvolgimento attivo degli alunni e che accresce la loro partecipazione e la *lezione frontale partecipata* che permette la sistemazione di concetti, definizioni e proprietà. Invece, di introdurre subito definizioni, mostrerò l'argomento come un gioco.*

Verifiche

Sono previste una verifica formativa di metà modulo e una sommativa alla fine. Oltre a questi momenti formali la verifica degli apprendimenti deve essere svolta in modo continuato, per tale scopo vengono assegnati degli esercizi da svolgere il cui svolgimento e correzione deve essere una prassi continuata durante tutto il percorso didattico. Non è prevista una verifica in ingresso sui prerequisiti per la loro esiguità in rapporto alla preparazione di una classe quinta del liceo scientifico.

Strumenti

Lavagna, Calcolatrice, Libro di testo, laboratorio di informatica.

Tempi

Lezioni frontali e svolgimento degli esercizi	3h
Verifica formativa + discussione	1h
Attività di laboratorio	2h
Verifica sommativa + discussione	3h
TOTALE	9h

Per un totale di 9 ore che, tenuto conto delle 3 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa tre settimane di lavoro. La previsione è da intendersi elastica, perché occorre tener conto dell'andamento e dei processi di apprendimento della classe.

n.b.: nella mia ud avevo messo 12 ore e mi hanno detto che era troppo...

Sviluppo dei contenuti

Il calcolo combinatorio studia i modi di raggruppare, secondo certi criteri, gli elementi di un dato insieme. Introdurrò il **calcolo combinatorio** come la disciplina che si occupa dei problemi connessi ai diversi modi di ordinare o di raccogliere oggetti. Per esempio, le estrazioni al Lotto, costituiscono un problema di calcolo combinatorio. Ci si può chiedere “Quanti sono i terni possibili al Lotto?”, “E quante sono le quaterne?”. Oppure se devo sistemare dei commensali a tavola mi chiederò: “In quanti modi diversi si possono sedere?”. Quindi, i ragazzi potranno osservare come il calcolo combinatorio coinvolge ogni passaggio della vita quotidiana, dal gioco alle scelte pratiche, all'organizzazione di una cena. In questa U.D., proporrò ai ragazzi due soli problemi: la ricerca della “lunghezza fissa” che si può costruire con gli oggetti di un certo insieme, che sarà detto *problema delle disposizioni semplici*, e il calcolo dei sottoinsiemi contenuti in un numero assegnato di elementi estraibili di un insieme dato, detto *problema delle combinazioni semplici*.

Come problemi relativi a questi due argomenti potrò considerare:

- Trovare tutte le parole di 4 lettere che si possono costruire utilizzando le lettere della parola Tavolo;
- Calcolare quanti sono i possibili terni al Lotto.

Prima di introdurre permutazioni, combinazioni ecc. ecc. introdurrei con un semplice esempio quello che è il metodo “base” per affrontare i problemi del calcolo combinatorio.

Un ragazzo ha a disposizione due paia di pantaloni e quattro magliette. Ci domandiamo in quanti modi diversi può vestirsi. Fissato un paio di pantaloni, a questo può accostare, una alla volta, ognuna delle quattro magliette e quindi sono quattro possibilità. Ma a questo numero di possibilità dobbiamo aggiungere ancora le possibilità che si ottengono con il secondo paio di pantaloni e di nuovo ognuna delle quattro magliette. Quindi le possibilità sono in totale otto.

Per visualizzare la situazione possiamo utilizzare diverse rappresentazioni grafiche

diagramma sagittale, diagramma cartesiano, diagramma ad albero

Il diagramma ad albero suggerisce un metodo per determinare il numero di tutti i gruppi che è possibile formare.

Le 2 possibilità corrispondenti ai rami dei pantaloni indicano quante volte vengono ripetute le 4 possibilità corrispondenti ai rami delle magliette.

Quindi in totale abbiamo $2 \cdot 4 = 8$ gruppi.

Quando si prendono in esame gruppi di più di due oggetti, il diagramma ad albero è lo strumento di rappresentazione più efficace. Inoltre esso fornisce un metodo per essere sicuri di elencare tutti i raggruppamenti. È possibile e pratico disegnare il diagramma solo se le possibilità non sono molte, altrimenti si può pensare di percorrerne i rami solo mentalmente.

In generale per determinare quanti gruppi si possono formare assegnando il primo posto a un elemento di un insieme A con n elementi, il secondo a uno di un insieme B con m elementi, il terzo a uno di un insieme C con k elementi, ... occorre calcolare il prodotto $n \cdot m \cdot k \dots$

Possiamo chiamare “metodo delle possibilità” il metodo usato in questo esempio per il calcolo dei raggruppamenti.

Stimoleremo i ragazzi nel fare alcune osservazioni e a tal fini faremo loro delle domande mirate per stimolare la riflessione. *Ci sono analogie con il metodo precedente? In cosa differisce?*

Osserveremo che il problema ora risolto assomiglia ai problemi di permutazione affrontati in precedenza con la differenza che nel caso delle permutazioni si devono scegliere tutti gli elementi di un insieme dato, mentre in questo caso si richiede di considerare le disposizioni di solo due elementi scelti nell'insieme {1; 3; 5; 7; 9} che ha cinque elementi: si richiede, cioè, di determinare le disposizioni di quei 5 elementi a 2 a 2, cioè quelle che vengono chiamate le disposizioni di 5 elementi di classe 2.

A questo punto potremo dare la seguente **Definizione** *Dati n elementi e un numero $k \leq n$, si dicono disposizioni semplici, o anche solo disposizioni, di classe k tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni raggruppamento ne contenga k e che due raggruppamenti differiscano tra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi si susseguono.*

Il numero delle disposizioni di classe k di n elementi dipende solo dai numeri naturali n e k , si indica con il simbolo $D_{n;k}$.

Per calcolare tale numero si può immaginare di dover riempire k caselle con altrettanti elementi scelti da un dato insieme di n elementi (naturalmente dovrà sempre essere $k \leq n$). L'elemento da inserire nella prima casella può essere scelto in n modi diversi; quello da inserire nella seconda casella si può scegliere in $n - 1$ modi diversi (perché un elemento dell'insieme dato si trova già nella prima casella); l'elemento da inserire nella terza casella si può scegliere in $n - 2$ modi diversi e così via.

Quando si deve scegliere l'elemento con cui riempire l'ultima casella, ossia la k -esima, $k - 1$ elementi dell'insieme sono già stati posti nelle precedenti caselle, perciò tale scelta si può fare in $n - (k - 1) = n - k + 1$ modi diversi.

Pertanto il numero di possibili scelte per riempire le k caselle, ossia il numero $D_{n;k}$ delle disposizioni di classe k degli n elementi dell'insieme dato, è $D_{n;k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - k + 1)$

Cioè il numero delle disposizioni di classe k di n elementi è eguale al prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n .

Proporrei un particolare esercizio per arrivare a concludere che *Le disposizioni di n elementi di classe n coincidono con le permutazioni di n elementi, allora $D_{n;n} = P_n$. Si può verificare altresì sostituendo k in $D_{n;k}$ con n e verificando che coincide con $n!$ cioè P_n .*

Permutazioni con ripetizione

Per introdurre il concetto di permutazione abbiamo calcolato il numero di anagrammi della parola ROMA. Le lettere che formano tale parola sono tutte diverse tra loro: tale circostanza ha reso relativamente semplice l'analisi. Ci proponiamo ora di calcolare il numero di anagrammi (come per ROMA prescindendo dal loro significato) di una parola come ESSERE, in cui non tutte le lettere sono diverse. Per ricondurre tale problema al caso precedentemente analizzato, poniamo degli indici alle tre E e alle due S che formano la parola, in modo da poterle distinguere, consideriamo cioè i sei simboli $E_1 S_1, S_2, E_2, R, E_3$,

Essendo ora tali simboli tutti distinti tra loro, per quanto visto al paragrafo sulle permutazioni, vi sono $6! = 720$ diverse permutazioni di essi. **È però evidente che queste permutazioni non corrispondono a 720 diversi anagrammi della parola ESSERE**; infatti ad esempio le due permutazioni $E_1 R E_2 S_1 S_2 E_3$ e $E_2 R E_3 S_2 S_1 E_1$ corrispondono entrambe al medesimo anagramma ERESSE. In qualunque modo si permutino le tre E, a condizione di mantenerle nella prima, terza e sesta posto, si ottiene sempre lo stesso anagramma ERESSE. Dunque per contare più volte gli anagrammi in cui le E occupano gli stessi posti dobbiamo dividere 720 per il numero di modi di permutare le tre E che è, per quanto già visto, $3! = 6$.

Dopo aver scelto una qualsiasi di queste sei disposizioni delle tre E possiamo ancora permutare le due S, a condizione di mantenerle nel quarto e quinto posto ad abbiamo sempre lo stesso anagramma.

In definitiva gli anagrammi della parola ESSERE sono $60 (= 720/3!.2!)$

GENERALIZZANDO: Consideriamo n oggetti, di cui k_1 uguali ad a , k_2 uguali a b , ..., k_m uguali a z :

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_{k_1}, \underbrace{b, b, \dots, b}_{k_2}, \dots, \underbrace{z, z, \dots, z}_{k_m} \quad (1)$$

$$\text{Avremo che } P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Disposizioni con ripetizione

Anche per le disposizioni è interessante chiederci come dobbiamo calcolare il loro numero quando gli oggetti che vogliamo raggruppare contengano elementi che si ripetono. Dalla definizione data di disposizione è evidente che si sottointendeva che di n oggetti distinti a k a k (che si dicono anche disposizioni semplici), ogni elemento è contenuto in ciascun gruppo una volta sola. Supponiamo ora che ogni raggruppamento possa contenere elementi non tutti distinti, cioè che

possa contenere uno stesso elemento non una sola volta, ma 2, 3, ..., k volte. Si parla in tal caso di disposizioni con ripetizione e si formula così la seguente definizione.

Definizione *Dati n elementi distinti, si dicono disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni gruppo ne contenga k , ma ogni elemento possa trovarsi ripetuto nel gruppo 1, 2, 3, ..., k volte e in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per qualche elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono disposti.*

Si concluderà osservando che il numero di possibili scelte per riempire le k caselle, ossia il numero $D'_{n;k}$ delle disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k , è il prodotto di k fattori uguali a n .

$$D'_{n;k} = n^k$$

Osservazione didattica: osserviamo confrontando con analogo esempio per le disposizioni semplici che il numero in questo caso è maggiore, come è logico.

Combinazioni semplici

I problemi di raggruppamento di oggetti che abbiamo analizzato fino ad ora avevano un assunto importante: raggruppamenti che avevano gli stessi oggetti con ordine diverso erano considerati diversi. Ad esempio nel gioco del lotto si estraggono cinque numeri ciascuno imbussolato in una piccola sfera (da 1 a 90). In tale gioco importa sapere quali sono i cinque numeri estratti, ma non conta l'ordine in cui essi si presentano. Estrarre questi cinque numeri equivale a scegliere un sottoinsieme di 5 elementi dell'insieme $\{1; 2; 3; \dots; 89; 90\}$: si parla, in tal caso, di combinazioni dei 90 elementi presi a 5 a 5 (o di classe 5). Si ha quindi la seguente definizione.

Definizione *Si chiama combinazione, o anche combinazione semplice, di classe k di n elementi (con $k \leq n$), o anche combinazione di n elementi presi a k a k , un qualunque sottoinsieme di k elementi, di un dato insieme di n elementi, tutti distinti tra loro.*

Quindi, dati n elementi distinti e un numero $k \leq n$, si dicono combinazioni di n elementi di classe k (o a k a k) tutti i raggruppamenti che si possono formare con k degli n elementi in modo che i diversi raggruppamenti differiscano tra loro almeno per un elemento. Il numero di combinazioni di classe k di n elementi dipende solo da k e da n , e si indica con $C_{n;k}$.

Per calcolare $C_{n;k}$ consideriamo un esempio e solo in seguito daremo la formula generale:

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;k}}{P_k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ovvero: *il numero delle combinazioni di classe k che si possono formare con n elementi distinti è uguale al prodotto di k numeri interi decrescenti a partire da n , diviso per il prodotto dei primi k numeri interi, cioè per il fattoriale di k .*

Potremo far osservare che equivalentemente, utilizzando esclusivamente i fattoriali, potremo scrivere:

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

A questo punto chiariremo un po' di terminologia e quindi che i numeri $C_{n;k}$

sono detti coefficienti binomiali e vengono indicati con il simbolo $\binom{n}{k}$ che si legge “n su k”. Possiamo

allora definire
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Si decide per comodità di definire anche $\binom{0}{0} = 1$

Proprietà dei coefficienti binomiali:

Utilizzando la formula per le disposizioni semplici espressa come rapporto di fattoriali si ottiene la formula seguente, detta Legge dei tre fattoriali.

$$C_{n;k} = \frac{D_{n;k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad \text{Legge dei tre fattoriali}$$

Osservazione: si tratta della stessa formula usata per le permutazioni con ripetizione di n elementi dei quali k e n-k sono ripetuti:

$$P_n^{(k,n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Generalizzando il risultato

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \binom{n}{n-k} = C_{n,n-k}$$

Ovvero si ha la seguente proprietà detta **Legge delle classi complementari:**

$$C_{n,k} = C_{n,n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Osservazione didattica: la verità di questa relazione è evidente perché $\binom{n}{k}$ è il numero di modi in cui si possono scegliere k elementi tra n dati, ma questo equivale a sceglierne n-k tra gli stessi n, il che si può fare in $\binom{n}{n-k}$ modi.

Osservazione didattica: La legge delle classi complementari è utile nel calcolo delle combinazioni quando $k \geq n/2$. Ad esempio invece di calcolare $C_{10,8} = \binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 3}{8 \cdots 2 \cdot 1}$ è più rapido calcolare

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2}$$

Altra importante proprietà dei coefficienti binomiali è la cosiddetta **formula di ricorrenza:**

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}, \text{ facile da verificare con la def di coefficiente binomiale.}$$

A questo punto sarà opportuno introdurre il triangolo di Tartaglia (più noto all'estero come triangolo di Pascal) grazie al quale potremo in seguito dedurre le proprietà dei coefficienti binomiali.

Triangolo di Tartaglia

Il triangolo di Tartaglia è stato già visto negli anni precedenti, quindi faremo in modo che gli studenti lo ricostruiscano. Esso è stato sostanzialmente utilizzato per determinare i coefficienti numerici del polinomio $(a+b)^n$ con $n \geq 1$. Faremo notare come i coefficienti del triangolo di Tartaglia possono essere visti come coefficienti binomiali, per esempio se prendiamo in considerazione la quarta riga del triangolo di Tartaglia

che da i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^4$, ci accorgiamo che $\binom{4}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{4}{3} = 4$;

$$\binom{4}{4} = 1.$$

Quindi potremo scrivere lo sviluppo di $(a+b)^4$ in questo modo:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}ab^4$$

In generale avremo pertanto che: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

Con il binomio di Newton si riesce ad esprimere ogni potenza intera positiva di un binomio come somma di prodotti di potenze dei due termini del binomio. I termini hanno tutti lo stesso grado n anche se decresce la potenza in un termine aumenta nell'altro.

La formula del binomio di Newton giustifica il termine coefficienti binomiali attribuito ai numeri $\binom{n}{k}$.

Proprietà dei coefficienti binomiali e Combinazioni con ripetizione

Osservando il triangolo di Tartaglia potremo fare delle osservazioni e dedurre in parte le proprietà dei coefficienti binomiali che abbiamo prima anticipato.

Osserveremo che:

- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ **legge delle classi complementari** dalla simmetria delle righe

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ **Formula di Stifel** dalla regola di formazione del triangolo (E' comunque facile verificarne la validità usando la legge dei tre fattoriali)

Combinazioni con ripetizione

Nelle combinazioni di n oggetti presi k volte, così come sono state definite, ogni oggetto è contenuto in ciascun gruppo una volta sola; può accadere, però, che i k elementi formanti un raggruppamento non siano tutti distinti tra loro. Può, cioè, accadere che uno o più dei k elementi scelti siano contenuti in uno stesso gruppo non una sola volta, ma 2, 3, ... k volte. Si hanno, in tal caso combinazioni con ripetizione degli n elementi a k a k.

Definizione

Le combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono i raggruppamenti che si possono formare con gli n elementi di un insieme dato, in modo che ogni gruppo ne contenga k, ma ogni elemento possa trovarsi ripetuto nel gruppo 1, 2, ..., k volte e in modo che ogni gruppo differisca dall'altro per almeno un elemento.

Il calcolo combinatorio con Derive: Con Derive è possibile calcolare il numero delle disposizioni e delle combinazioni semplici mentre non possiede funzioni predefinite per calcolare il numero delle disposizioni e delle combinazioni con ripetizione, inviteremo allora gli studenti, partendo dalle formule, a creare una funzione che permetta tale calcolo. Una volta definita tale funzione sarà possibile calcolare il numero delle disposizioni sostituendo al posto di n e k i valori desiderati.

Altro utilizzo del software potrebbe essere quello della verifica delle proprietà dei coefficienti binomiali. Verranno calcolati separatamente I due membri dell'equazione e confrontati tra loro I risultati ottenuti, in questo modo I ragazzi si convinceranno che tale relazione è sempre vera anche considerando valori elevati di n e k. Per n e k piccoli è sufficiente un confronto con il triangolo di Tartaglia.

Excel

Anche Excel possiede delle funzioni di calcolo per determinare il numero delle disposizioni e delle combinazioni di n elementi di classe k; vediamo la sintassi:

- PERMUTAZIONE(n;k)

Per calcolare il numero delle disposizioni. Se n e k sono uguali viene calcolato il numero delle permutazioni di n elementi

- COMBINAZIONE($n;k$)

Per calcolare il numero delle combinazioni

Come Derive anche excel non possiede funzioni predefinite per calcolare il numero delle disposizioni o di combinazioni con ripetizione; occorre quindi costruire di volta in volta una formula appropriata.

(Altre possibili applicazioni per chi conosce il linguaggio pascal)

Il modo migliore per realizzare dei programmi semplici relativi al calcolo combinatorio è quello di utilizzare il linguaggio Pascal sfruttando il comando Random(M). Pertanto potrei portare i ragazzi in laboratorio e cercare di creare semplici programmi come il gioco Testa o Croce, estrazioni da un'urna.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.