

TRIGONOMETRIA E RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

Destinatari questa unità didattica è rivolta a studenti del 4° anno di liceo scientifico tradizionale. Le ore di matematica previste sono 3.

Programmi ministeriali: lo studio delle funzioni goniometriche, curve dei seni e delle tangenti, formule per l'addizione la sottrazione, la duplicazione, la bisezione degli argomenti, semplici equazioni goniometriche, **risoluzione dei triangoli rettilinei**, sono previsti nella classe IV.

Programmi Brocca: prevedono la dimostrazione dei teoremi dei seni e del coseno, la risoluzione dei triangoli al 3 anno, mentre lo studio delle funzioni circolari e delle relative formule di addizione e sue principali conseguenze è rimandato al 4°. Nei commenti si trova:

Lo studio della trigonometria, ridotto all'essenziale, è finalizzata alla risoluzione dei triangoli; esso risponde anche alle necessità proprie delle altre scienze.

Piano Nazionale per l'informatica: lo studio della trigonometria è previsto nel tema 1: **”coseno e seno degli angoli convessi. Relazione tra lati ed angoli nei triangoli rettangoli”** da svolgersi nella classe terza.

Da notare: funzioni circolari e formule varie relative sono nel tema 3.

Obiettivi specifici

Conoscenze

- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo utilizzando le funzioni seno, coseno, tangente.
- Conoscere il teorema della corda.
- Conoscere le relazioni tra i lati e gli angoli di triangoli qualunque.
- Conoscere il teorema dei seni
- Conoscere il teorema delle proiezioni.
- Conoscere il teorema del coseno.

Abilità

- Saper risolvere i triangoli rettangoli.
- Saper risolvere i triangoli qualunque
- Saper risolvere i problemi di trigonometria, usando i teoremi principali e utilizzando equazioni goniometriche.
- Saper risolvere i problemi in cui è necessario utilizzare le applicazioni della trigonometria alla geometria analitica e alla geometria euclidea.

Prerequisiti

- Funzioni goniometriche;
- Relazioni tra le funzioni goniometriche;
- Formule goniometriche.
- Equazioni e disequazioni goniometriche.
- Principali concetti di Geometria Euclidea
- Proprietà fondamentali delle figure geometriche.

Metodologie didattiche

Per un produttivo intervento didattico suddividiamolo in tre principali fasi e definiamo per ciascuna di esse i principali attori. Immaginiamo di aver suddiviso la classe in gruppi di lavoro (la scelta dei gruppi è pilotata con discrezione dall'insegnante al fine di creare gruppi abbastanza eterogenei):

1ª fase: in questa fase l'insegnante ha un ruolo molto delicato; egli deve riuscire a:

- evitare che i suoi interventi chiudano il problema;
- evitare che i suoi interventi sopprimano l'autonomia dell'alunno;

incoraggiare la ricerca;

- non classificare un risultato in ‘giusto’ o ‘sbagliato’, ma far capire agli allievi che qualunque tentativo può farli progredire nella loro ricerca;
- non stabilire a priori che cosa si può fare e che cosa non si può fare;
- interagire con i vari gruppi senza che i suoi interventi orientino in modo determinante l’attività degli studenti.

2^ fase questa fase è collettiva, in essa sono presentate e discusse le decisioni e le soluzioni di ogni gruppo. Questa discussione di bilancio consiste nell’interazione del gruppo-classe orchestrata dall’insegnante.

3^ fase l’ultima fase viene svolta a casa singolarmente dagli studenti, che consegnano poi all’insegnante il lavoro svolto.

Materiali e strumenti utilizzati

Il software CABRI è usato come strumento adatto ad un passaggio intermedio relativo all’apprendimento dei concetti geometrici, cioè a quella fase di sperimentazione concettuale che sta fra la definizione e la dimostrazione dei teoremi. E’ usato anche per impostare e risolvere graficamente i problemi.

Il software Derive il grafico delle funzioni goniometriche e altre che si incontrano durante la risoluzione dei problemi.

Infine la storia della Matematica come strumento metodologico per inquadrare da un punto di vista storico le nozioni e i concetti introdotti.

Tempi previsti

Accertamento dei prerequisiti	1h
Teoremi relativi al triangolo rettangolo	1h
Risoluzione del triangolo rettangolo	1h
Teorema della corda, seni, proiezioni, coseno	1h
Risoluzione dei triangoli qualunque e applicazioni varie	9h
Verifica formativa	1h
Verifica sommativa	2h
Consegna e correzione verifica	1h
Totale	17h

Sviluppo dei contenuti

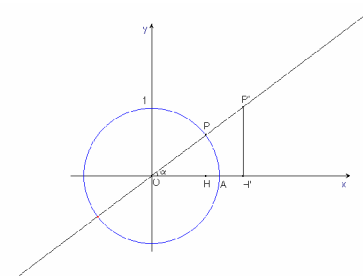
Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettangolo in funzione delle funzioni seno, coseno, tangente di un angolo:

Le funzioni goniometriche sono state definite come coordinate di particolari punti. Ora definiamo le relazioni che intercorrono tra i lati e gli angoli di triangoli rettangoli proprio attraverso tali funzioni. Si considera la circonferenza goniometrica di raggio unitario(per comodità).

$$\sin \alpha = \frac{b}{a} \quad \tan \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} \quad \cot \alpha = \frac{c}{b}$$

Dove $OP' = a$, $P'H' = b$, $OH' = c$



In generale possiamo affermare che:

In un triangolo rettangolo il seno di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto ad esso opposto e l’ipotenusa; il coseno dello stesso angolo invece si può definire come il rapporto tra il cateto ad esso adiacente e l’ipotenusa.

Essendo $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$, possiamo scrivere $tg\alpha = \frac{b}{c}$
 Quindi :

In un triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente ad α .

Essendo $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$, possiamo scrivere $ctg\alpha = \frac{c}{b}$.
 Quindi:

In un triangolo rettangolo la cotangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto adiacente e quello opposto ad α .

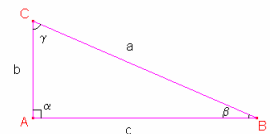
RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Relazioni che intercorrono tra gli elementi di un triangolo rettangolo (lati e angoli).

$$\begin{aligned} sen\gamma &= c/a, & cos\gamma &= b/a, & tg\gamma &= c/b, & ctg\gamma &= b/c. \\ sen\beta &= b/a, & cos\beta &= c/a, & tg\beta &= b/c, & ctg\beta &= c/b. \end{aligned}$$

$$c = a sen\gamma, \quad b = a cos\gamma, \quad c = b tg\gamma, \quad b = c ctg\gamma$$

$$b = a sen\beta, \quad c = a cos\beta, \quad b = c tg\beta, \quad c = b ctg\beta.$$



Ognuna di queste uguaglianze si può leggere come teorema.

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare tutti i suoi elementi; per fare ciò, è sufficiente conoscere oltre all'angolo retto altri due elementi. Ricordiamo infatti che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \\ sen\beta = \frac{b}{a} \dots oppure \dots cos\beta = \frac{c}{a} \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$$

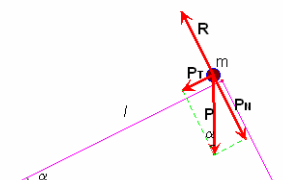
Poiché questo è un sistema di quattro equazioni in sei incognite, è sufficiente conoscere due elementi per risolverlo. **Di tali elementi almeno uno deve essere un lato poiché esistono infiniti triangoli con gli angoli uguali e ma le misure dei lati diverse.**

APPLICAZIONI GEOMETRICHE E FISICHE. QUALCHE CONSIDERAZIONE SUL CALCOLO VETTORIALE.

La risoluzione del triangolo rettangolo trova numerose applicazioni sia nella geometria che nella fisica. Ne vediamo qualche esempio.

1. Nella semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ è inscritto il triangolo ABC di perimetro $r(2+\sqrt{6})$. Risolvere il triangolo

2. In figura viene rappresentato un piano inclinato liscio, di lunghezza l e inclinazione α ; sulla sua sommità è collocato un punto materiale di massa m . Si determini l'accelerazione con cui il corpo scivola lungo il piano, il lavoro compiuto dalla forza peso durante la caduta e la reazione vincolare del piano.



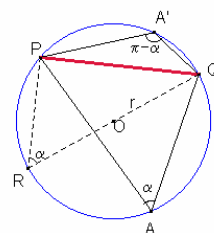
RELAZIONI TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Una conseguenza delle relazioni esistenti tra gli elementi di un triangolo rettangolo è il teorema della corda.

Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi alla corda.

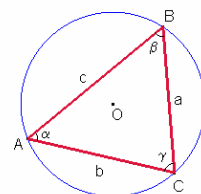
$$\overline{PQ} = 2r \operatorname{sen}(\pi - \alpha).$$



Teorema dei seni

In un triangolo qualunque il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$



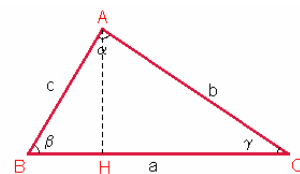
Teorema delle proiezioni

In un qualunque triangolo la misura di un lato è uguale alla somma dei prodotti di quelle degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ciascuno di questi forma con il lato in questione.

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

$$b = a \cos \gamma + c \cos \alpha$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$



Osservazione: nel caso in cui il triangolo sia rettangolo la tesi segue immediatamente dalle relazioni valide per i triangoli rettangoli.

Teorema del coseno (o di Carnot)

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Osservazione: nel caso in cui il triangolo sia rettangolo il teorema del coseno si riduce a quello di Pitagora.

Osservazione Importante: possiamo utilizzare il teorema di Carnot per trovare una condizione che ci permetta di stabilire se un triangolo, date le misure dei suoi lati, è acutangolo, ottusangolo o rettangolo.

Consideriamo un triangolo di cui conosciamo le misure dei lati, siano esse : a, b, c . Supponiamo ad esempio che c sia il lato maggiore. Dal teorema di Carnot sappiamo che :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{da cui possiamo ricavare } 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2, \text{ ora:}$$

➤ Se $c^2 > a^2 + b^2$ allora $\cos \gamma < 0$ perciò $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ cioè il triangolo è ottusangolo.

➤ Se $c^2 < a^2 + b^2$ allora $\cos \gamma > 0$ perciò $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ cioè il triangolo è acutangolo.

➤ Se $c^2 = a^2 + b^2$ allora $\cos \gamma = 0$ perciò $\gamma = \frac{\pi}{2}$ cioè il triangolo è rettangolo.

Tale proprietà dei triangoli è probabilmente già stata vista nella trattazione della geometria sintetica, ora ne viene fornita una dimostrazione dal punto di vista goniometrico.

APPLICAZIONI ALLA GEOMETRIA EUCLIDEA

- Area di un triangolo di cui sono note le misure di due lati e dell'angolo tra essi compreso.

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA} \sin \hat{CAB}}{2}$$

- Area di un parallelogramma di cui sono note le misure dei lati e dell'angolo compreso tra essi.
L'area di un parallelogramma è data dal prodotto delle misure di due lati consecutivi per il seno di uno qualunque dei suoi angoli.
- Area di un quadrilatero convesso di cui sono note le misure delle diagonali e di un angolo tra esse compreso.
L'area di un quadrilatero convesso è data dal semiprodotto delle misure delle sue diagonali per il seno di un angolo tra esse compreso

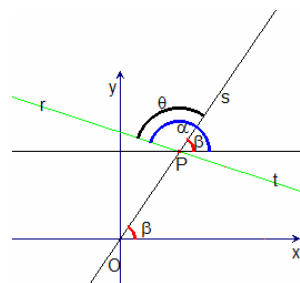
UNA APPLICAZIONE DELLA TRIGONOMETRIA ALLA GEOMETRIA ANALITICA

Angolo formato da due rette

$$|\operatorname{tg} \theta| = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \right| = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

Osservazioni

1. Questa formula non si può applicare nel caso in cui le due rette siano perpendicolari, perché in tal caso, il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1 ed il denominatore $1 + mm'$ diventerebbe uguale a 0 rendendo priva di significato l'espressione al secondo membro.
2. Quando invece le rette sono parallele $\theta = 0$ quindi $m = m'$ e $\operatorname{tg} \theta = 0$.
3. Se la retta r è parallela all'asse delle ascisse, $\theta = \beta$.
4. Se la retta r è parallela all'asse delle ordinate, $\theta = \pi/2 - \beta$.



APPLICAZIONI ALLA FISICA

- Calcolo del raggio terrestre
- La risultante di due forze

APPLICAZIONI TOPOGRAFICHE

- Distanza tra due punti accessibili, ma separati da un ostacolo
- Distanza tra un punto accessibile e uno non accessibile (A titolo d'esempio si può mostrare come si calcola la distanza Terra- Luna)
- Distanza tra due punti entrambi non accessibili

PROBLEMI RISOLUBILI CON METODI GONIOMETRICI

Convienne, a volte, nella risoluzione di problemi geometrici, scegliere come incognita l'ampiezza di un angolo. Le relazioni tra l'incognita e i dati che individuiamo dall'analisi del problema si traducono, allora, in equazioni o disequazioni goniometriche. Le relazioni che si utilizzano sono quelle che si ricavano dai teoremi della geometria euclidea: questi costituiscono delle relazioni tra gli elementi di una figura, che possono essere espresse algebricamente mediante equazioni e disequazioni

VERIFICA SOMMATIVA

1. Determinare le misure dei lati e le ampiezze degli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è $\frac{1}{4}$ dell'altro e che la loro somma è 30 cm. (4)

2. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O e raggio r si traccino le due tangenti

$$\cos \hat{APB} = \frac{4}{5},$$

alla circonferenza stessa e siano A e B i punti di contatto. Sapendo che determinare le lunghezze dei segmenti di tangenza PA e PB e la distanza di P dal centro O (6)

3. Calcolare l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80m si vede la cima del campanile secondo un angolo di 42° . (5)

4. Nel triangolo ABC si sa che: (8)

$$\cos \hat{A} = \cos \alpha = \frac{4}{5}; \quad \hat{B} = 2\alpha; \quad \overline{AB} = 10$$

Determinare:

- a) gli elementi incogniti del triangolo (4)

- b) le misure delle tre altezze (2)

c) l'area del triangolo e il raggio della circonferenza ad esso circoscritta. (2)

5. In una circonferenza di centro O e raggio r la corda AB è il lato del quadrato inscritto. Da B si conduce una semiretta tangente alla circonferenza e che giace, rispetto alla retta per AB, nel semipiano contenente O. Determinare su questa semiretta un punto P tale che, indicato con M l'ulteriore punto in cui il segmento AP interseca la circonferenza, si abbia la relazione:

$$\frac{BM + 2\sqrt{2}MP}{PB} = k$$

con k numero reale.

(8)

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

Punteggio Grezzo (Totale 31)	Voto in Decimi (ottenuto con la proporzione)	Voto in decimi (una proposta)
0	0-1	3
1		
2		
3		
4	1-2	
5		
6		
7	2-3	
8		
9		
10	3-4	
11		
12		
13	4-5	5
14		
15		
16	5-6	6
17		
18		
19	6-7	7
20		
21		
22	7-8	

23		
24		
25	8-9	8
26		
27		
28	9-10	9
29		
30		
31		10

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.