UNITA' DIDATTICA: **FORMULE GONIOMETRICHE**

Destinatari, e programmi sono gli stessi dell'u.d. Funzioni goniometriche.

Obiettivi specifici

- Conoscenze
  - Conoscere le formule di addizione;
  - Conoscere le formule di sottrazione;
  - Conoscere le formule di duplicazione
  - Conoscere le formule di bisezione
  - Conoscere le formule di prostaferesi
  - Conoscere le formule di Werner;

- Abilità
  - Saper applicare le formule di addizione;
  - Saper applicare le formule di sottrazione;
  - Saper applicare le formule di duplicazione;
  - Saper applicare le formule di bisezione;
  - Saper applicare le formule di Werner;
  - Saper applicare le formule di prostaferesi.
  - Saper operare semplificazioni sulle espressioni utilizzando le formule goniometriche;

Contenuti

- Formule di sottrazione, addizione, duplicazione, bisezione, prostaferesi e Werner.

Prerequisiti

- Funzioni goniometriche;
- Relazioni tra le funzioni goniometriche;

Sviluppo dei contenuti

Facciamo subito osservare ai ragazzi che tra le funzioni goniometriche di un angolo orientato e l'angolo stesso non esistono proporzionalità. Ne consegue che, ad esempio, $sen2\alpha \neq 2sen\alpha$, che $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, e così via. Per convinceli di questo basta fissare l'attenzione su alcuni semplici esempi:

$$sen\,30° = \frac{1}{2} \quad mentre \quad sen\,60° = sen(2 \cdot 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

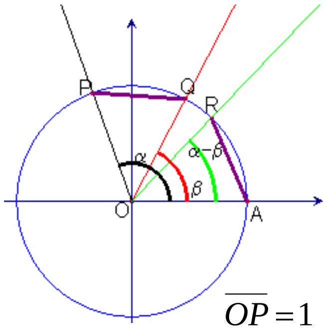
analogamente

$$\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad mentre \quad \cos 30° = \frac{1}{2}$$

Da queste considerazioni consegue la necessità di trovare delle formule che permettano di determinare $sen2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg2\alpha,\ ctg2\alpha,\ sen\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2},\ ecc.,$ conoscendo le funzioni goniometriche dell'angolo α; altre formule che permettano di determinare $sen(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, ecc., conoscendo le funzioni goniometriche dell'angolo α e β; e così via.

Andiamo , quindi, a determinare tutte queste formule a partire da quella che dà il coseno della differenza di due angoli e da questa si potranno dedurre tutte le altre.

Formule di sottrazione



$\overline{OP}=1$

Disegnata la circonferenza goniometrica e i tre angoli α, β e α - β,
A(1; 0)
P($\cos\alpha; sen\alpha$),
Q($\cos\beta, sen\beta$),
$R\left[\cos(\alpha-\beta); sen(\alpha-\beta)\right]$.

Poiché gli angoli $R\hat{O}A$ e $P\hat{O}Q$ sono uguali (perché entrambi di ampiezza $\alpha-\beta$), sarà:

$\overline{RA}=\overline{PQ}$ e quindi anche: $\overline{RA}^2=\overline{PQ}^2$. Ricordando la formula della distanza tra due punti e applicandola alle coordinate dei punti R e A, P e Q si ottiene

$$\left[\cos(\alpha-\beta)-1\right]^2+sen^2(\alpha-\beta)=\left[\cos\alpha-\cos\beta\right]^2+\left[sen\alpha-sen\beta\right]^2$$

che, sviluppata e semplificata tenendo presente la prima relazione fondamentale della trigonometria, dà la formula di sottrazione per il coseno: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta$, valida per ogni coppia di angoli α e β, sia che essi siano positivi o negativi, sia che il primo sia maggiore, minore o uguale al secondo. Per ottenere la **formula di sottrazione del seno**, si ricordano le relazioni tra le funzioni goniometriche degli angoli associati e si applica la formula appena ricavata:

$$sen(\alpha-\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)-\alpha\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos\alpha+sen\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)sen\alpha=$$

$=-sen\beta\cos\alpha+\cos\beta sen\alpha$, da cui: $sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$

valida per ogni coppia di angoli α e β.

Possiamo ora determinare la **formula di sottrazione della tangente**; questa si deduce dalle formule di sottrazione del seno e del coseno:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha sen\beta}$$

Supponendo $\cos\alpha\neq0$ e $\cos\beta\neq0$ (e pertanto $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ e $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, con $k=0;\pm1;\pm2;...$) dividendo numeratore e denominatore dell'ultima frazione per $\cos\alpha\cos\beta$, si ottiene infine:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$$

Essa è valida sotto le condizioni già enunciate e supponendo che sia $(\alpha-\beta)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

In modo analogo si può dedurre la **formula di sottrazione per la cotangente**:

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

Essa è valida sotto le condizioni $\alpha\neq k\pi,\quad \beta\neq k\pi,\quad \alpha-\beta\neq k\pi$.

Formule di addizione

Le formule di addizione si ricavano sostituendo all'espressione $\alpha+\beta$ l'espressione equivalente $\alpha-(-\beta)$ e applicando poi le corrispondenti formule di sottrazione.

Le formule ricavate sono pertanto:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

valida per ogni coppia di angoli α e β;

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta$$

valida per ogni coppia di angoli α e β;

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

valida per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\, ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}$$

valida per $\alpha \neq k\pi,\quad \beta \neq k\pi,\quad \alpha+\beta \neq k\pi$;

Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione permettono di calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo 2α, note quelle dell'angolo α

Queste formule si ricavano dalle formule di addizione ponendo in esse $\beta = \alpha$.

Si ottengono così:

$$sen2\alpha = sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha\cos\alpha + \cos\alpha sen\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

$$tg2\alpha = tg(\alpha+\alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\, tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg2\alpha = ctg(\alpha+\alpha) = \frac{ctg\alpha\, ctg\alpha - 1}{ctg\alpha + ctg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

Osservazione 1

La formula di duplicazione del coseno può venir messa sotto altre due forme equivalenti, e precisamente:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - sen^2\alpha - sen^2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 2\cos^2\alpha - 1$$

Valide, come pure quelle del seno, per ogni angolo α.

Le formule di duplicazione della tangente valgono per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$;

le formule di duplicazione della cotangente valgono per $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$

Formule di bisezione

Le formule di bisezione permettono di determinare i valori di $sen\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\alpha}{2}$, $ctg\frac{\alpha}{2}$, noti i valori delle funzioni goniometriche dell'angolo α.

Queste formule si ricavano dalle due formule di duplicazione del coseno

$\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$ e $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

e ponendo in esse α al posto di 2α e quindi $\frac{\alpha}{2}$ al posto di α; si ottiene così:

$$sen\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$ per $\alpha\neq\pi+2k\pi$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$ per $\alpha\neq 2k\pi$

Formule di Werner e prostaferesi

Consideriamo le seguenti identità, ottenute mediante le formule di somma e sottrazione:

$$sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)=2sen\alpha\cos\beta$$

$$sen(\alpha+\beta)-sen(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\, sen\beta \qquad (*)$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2sen\alpha\, sen\beta$$

Queste relazioni scritte nella forma:

- $sen\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$
- $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$
- $sen\alpha\, sen\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

Prendono il nome di **formule di Werner**

Posto ora:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=p\\ \alpha-\beta=q\end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases}\alpha=\frac{p+q}{2}\\ \beta=\frac{p-q}{2}\end{cases}$$

Dalle identità (*) sopra scritte si ottengono le nuove identità, dette **formule di prostaferesi.**

$$sen\,p+sen\,q=2sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\mathit{sen}\ p - \mathit{sen}\ q = 2\mathit{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos\ p + \cos\ q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\cos\frac{p+q}{2}\mathit{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\mathit{tg}\ p \pm \mathit{tg}\ q = \frac{\mathit{sen}(p \pm q)}{\cos p \cos q} \qquad \text{con } p \quad e \quad q \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\mathit{ctg}\ p \pm \mathit{ctg}\ q = \frac{\mathit{sen}(q \pm p)}{\mathit{senp}\ \mathit{senq}} \qquad \text{con } p \quad e \quad q \neq k\pi$$

Le formule di prostaferesi permettono di trasformare la somma o la differenza di due seni, di due coseni, di due tangenti e di due cotangenti in prodotti o quozienti di seni e coseni.

Verifica:

- calcolare il valore di particolari espressioni in cui compaiano somme o differenze, per esempio: Sapendo che è senx =3/5 e 0°< x < 90° calcolare: $\mathit{sen}(x - 45°)$, $\cos(x + 45°)$
- semplificare semplici espressioni.