

UNITÀ DIDATTICA: LA PARABOLA

DESTINATARI:

Questo percorso didattico è rivolto ad una classe terza di un liceo scientifico sperimentale PNI dove le ore settimanali di matematica previste sono 5 e comprendono anche il laboratorio di informatica. Nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento delle coniche è inserito al terzo anno nel tema intitolato "Geometria" al punto 1.a:

"Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole nel piano cartesiano".

Si propone di introdurre le coniche prima **come luoghi geometrici** e successivamente di **scrivere le equazioni con riferimento a sistemi di assi cartesiani**, svolti in modo opportuno. Le abilità richieste, in questo ambito, riguardano la risoluzione analitica di problemi sulle coniche, la loro rappresentazione analitica e le proprietà geometrica del luogo.

Infine si richiede di acquisire la capacità di realizzare costruzioni di luoghi geometrici mediante strumenti diversi.

TEMPI DI SVOLGIMENTO:

12 ore (4 di spiegazione, 3 di laboratorio, 2 di esercizi in classe e 3 di verifica)

PREREQUISITI:

Lo studente deve possedere le seguenti nozioni:

- Geometria sintetica;
- Elementi fondamentali del piano cartesiano, retta e fasci di rette
- Simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione e rototraslazione;
- Concetto di funzione e di grafico di funzione;
- Equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado; equazioni parametriche;
- Risoluzione di sistemi di primo e di secondo grado;
- Conoscenze minime dei software didattici Cabri-géomètre e Derive sufficiente per le applicazioni in laboratorio di informatica.

ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI: Sarà opportuno per mezzo di lezioni dialogiche richiamare i concetti e i metodi risolutivi acquisiti nel biennio precedente nel momento in cui questi serviranno per introdurre e spiegare i nuovi argomenti.

Si provvederà a svolgere in classe esercizi di ripasso, pertanto gli studenti verranno chiamati alla lavagna per dimostrare le conoscenze su tali prerequisiti. Inoltre verranno assegnati esercizi per casa.

OBIETTIVI GENERALI:

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI :

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.

- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI :

Conoscenze:

- Parabola come luogo di punti
- rappresentazione analitica della parabola in un ben preciso sistema di riferimento cartesiano (equazione canonica, significato dei coefficienti)
- elementi caratterizzanti della parabola
- Posizione di una retta rispetto alla parabola
- Rette tangenti ad una parabola
- Parabole traslate

Competenze:

- Saper utilizzare strumenti informatici per la costruzione della parabola come luoghi geometrici
- Saper rappresentare analiticamente la parabola riconoscere dagli aspetti formali dell'equazione le proprietà geometriche del luogo e viceversa
- Saper risolvere analiticamente problemi riguardanti la parabola

Capacità:

- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi
- saper risolvere problemi di geometria dando un'interpretazione analitica
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite in contesti diversi.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.

Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).

Verranno discussi e confrontati in classe gli esercizi e i problemi che hanno creato più difficoltà negli allievi e problemi. Infine si svolgeranno attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Cabri-géomètre e Derive.

CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite semplici verifiche orali, esercitazioni in classe, correzione degli esercizi assegnati per casa e valutazione delle relazioni di laboratorio.

Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l'acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva. La verifica sommativa, nella quale vengono proposti esercizi simili a quelli esaminati in classe, ma non solo, permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l'autonomia nella risoluzione degli esercizi.

STRUMENTI UTILIZZATI:

- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gessi
- ✓ Calcolatrice scientifica
- ✓ Fotocopie
- ✓ Software didattici come Cabri-géomètre e Derive

SVILUPPO DEI CONTENUTI:

1. LE CONICHE COME SEZIONI DI UN CONO

E' importante prima di trattare separatamente le coniche come luoghi geometrici introdurle in modo unitario. Trattare direttamente e in modo separato circonferenza, ellisse, parabola ed iperbole potrebbe dare l'idea ai ragazzi che queste quattro figure non abbiano una origine comune. Invece possono tutte essere considerate come intersezione di un cono con un piano.

a) Si può raccontare o fare direttamente l'esperienza di illuminare un muro con una torcia elettrica tenuta perpendicolarmente alla parete: la parte illuminata è all'incirca circolare. Se si inclina sempre di più la torcia verso l'alto il cerchio si deforma e assume una forma allungata: è un'ellisse. Continuando a inclinare la torcia, l'ellisse si allunga sempre di più. La figura così ottenuta è una parabola. Se poi si usa una lampada con paralume di forma conica, aperto da entrambe le parti, l'ombra che proietta sulla parete vicina è una iperbole completa.

b) Si può chiedere agli allievi quali conclusione si possono trarre: cioè che le figure sono state ottenute come intersezione di un cono (il cono di luce della torcia) e un piano (piano del muro).

c) a questo punto si possono fare i riferimenti storici necessari: una adeguata introduzione storica ed epistemologica infatti potrebbe rappresentare proprio un anello di congiunzione tra i diversi modi di affrontare l'argomento: dalle sezioni coniche di Apollonio ottenute come intersezioni nello spazio di un cono con un piano alla geometria analitica nel piano di Cartesio. Quindi nel corso dei secoli le coniche sono state studiate in modi differenti e il primo approccio a tale argomento è stato di natura puramente sintetica. Si può accennare che sono state scoperte da **Menecmo** e che il loro studio fu approfondito e consolidato da **Apollonio** conosciuto come il Grande Geometra, nell'opera "Le Coniche" formata da otto libri, nella quale espose la maggior parte delle proprietà tuttora note delle coniche e introdusse i nomi di ellipsis (mancanza), hyperbola (lanciare al di là), parabola (porre accanto o confrontare). Apollonio fu il primo a considerare una superficie conica a due falde e a dimostrare che era possibile ottenere tutte le coniche intersecando una unica superficie conica con un piano e al variare dell'inclinazione di quest'ultimo: per tale motivo vengono dette **sezioni coniche** (o coniche). In particolare se β è l'angolo acuto che il piano forma con l'asse del cono e

α è la semiapertura del cono a seconda di come varia l'angolo β otteniamo delle curve diverse.

2. LA PARABOLA COME LUOGO GEOMETRICO

Si farà realizzare agli alunni la costruzione della parabola con Cabri da cui dovranno trarre le opportune considerazioni geometriche. Da qui ricaveranno, formalizzando, la definizione di parabola come luogo geometrico ovvero come l'insieme dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da un punto fisso F_1 detto fuoco e da una retta d detta direttrice.

3.EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO

ALL'ASSE y

Si determinerà a questo punto l'equazione di una parabola avente fuoco in un punto qualsiasi del piano e asse parallelo all'asse y . Indicando con $d: y = k$ l'equazione della direttrice, con $(p; q)$ le coordinate del fuoco F . (poiché il fuoco non può appartenere alla direttrice $q \neq k$), e con $P(x; y)$ un punto qualsiasi appartenente alla parabola, per definizione si avrà:

$$\overline{PF} = \overline{PH}, \text{ cioè } \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |y-k|;$$

sviluppando si ottiene $y = \frac{1}{2(q-k)}x^2 - \frac{p}{q-k}x + \frac{p^2 + q^2 - k^2}{2(q-k)}$.

Ponendo $a = \frac{1}{2(q-k)}$, $b = -\frac{p}{q-k}$, $c = \frac{p^2 + q^2 - k^2}{2(q-k)}$ si otterrà **l'equazione della parabola**

$$y = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

che rappresenta una parabola con direttrice parallela all'asse delle x e asse di simmetria parallelo all'asse delle y .

Si potrà porre agli allievi la seguente domanda: è possibile risolvere il problema inverso, ossia data l'equazione della parabola, determinare il fuoco, la direttrice, il vertice e l'asse di simmetria?

Dati a , b e c i coefficienti della parabola, con $a \neq 0$, ricaviamo p , e k dal sistema:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(q-k)} \\ b = -\frac{p}{q-k} \\ c = \frac{p^2 + q^2 - k^2}{2(q-k)}. \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si otterranno le coordinate del fuoco, del vertice, della direttrice e dell'asse di simmetria:

Equazione della parabola	Asse di simmetria	Vertice	Fuoco	Direttrice
$y = ax^2 + bx + c$	$x = -\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

4. LA CONCAVITA' E "L'APERTURA" DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y.

Essendo $a = \frac{1}{2(q-k)}$ si possono verificare i due casi seguenti:

- ✓ $a > 0 \Leftrightarrow q > k$ In questo caso tutti i punti della parabola si trovano al di sopra della direttrice; **la parabola ha la concavità verso l'alto, ossia volge nella direzione positiva dell'asse y .**
- ✓ $a < 0 \Leftrightarrow q < k$ In questo caso tutti i punti della parabola si trovano al di sotto della direttrice; **la parabola ha la concavità verso il basso, ossia nella direzione negativa dell'asse y .**

Si farà osservare agli allievi che all'aumentare del valore assoluto di a diminuisce "l'apertura" della parabola, ossia la parabola si "stringe" intorno al proprio asse; e che

- **Se il coefficiente b è nullo l'equazione diventa: $y = ax^2 + c$
La parabola ha vertice in $V(0,c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y .**
- **Se il termine noto c è nullo l'equazione diventa $y = ax^2 + bx$, la parabola ha vertice in $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$**
- **Se i coefficienti b e c sono entrambi nulli l'equazione diventa $y = ax^2$ parabola con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse y .**

Osservazione didattica:

Si potrà proporre agli allievi un'attività di laboratorio (seguendo le indicazioni dell'UMI in *Matematica 2003*) nella quale si metterà in crisi la concezione intuitiva di "apertura". Utilizzando il software di geometria Cabri si arriverà a dimostrare che due generiche parabole sono tra loro simili.

5. EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE x

Sia la direttrice d è parallela all'asse y anziché all'asse x , di equazione $x = k$ e sia $F(p,q)$ il fuoco con $p \neq k$.

Con lo stesso procedimento eseguito nel caso precedente, oppure, considerando la curva simmetrica alla parabola $y = ax^2 + bx + c$, rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, cioè scambiando x con y , si farà verifica facilmente agli allievi che l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x è la seguente:

$$x = ay^2 + by + c.$$

Con calcoli come i precedenti si otterrà quanto segue:

Equazione della parabola	Asse di simmetria	Vertice	Fuoco	Direttrice
$x = ay^2 + by + c$	$y = -\frac{b}{2a}$	$\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$	$\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$	$x = -\frac{1+\Delta}{4a}$

OSSERVAZIONE:

Si farà osservare agli allievi che nel caso della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y , per trovare l'ascissa del vertice, si può andare a sostituire il valore dell'ordinata nell'equazione.

6. CONCAVITA' DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE x .

Anche in questo caso si possono verificare due casi

o $a > 0$ La parabola ha la concavità nella direzione positiva dell'asse x .

o $a < 0$ La parabola ha la concavità nella direzione negativa dell'asse x .

Osservazione: Si farà osservare agli allievi che *l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y* rappresenta una funzione polinomiale di secondo grado, ed è **il grafico di una funzione**, mentre *l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle x* **non può rappresentare una funzione**, ed il suo grafico, non è il grafico di una funzione in quanto ad ogni x corrispondono due valori di y , proprio come accade per la circonferenza.

SCHEDA DI LABORATORIO con Derive

Si farà comprendere agli allievi il significato dei tre parametri a, b, c

Si considererà l'equazione normale di una parabola con asse parallelo all'asse y e si farà prima **variare il parametro a , dopo aver fissato gli altri due b, c** , utilizzando il comando vector analizzando il grafico gli alunni trarranno le opportune considerazioni :

$a < 0$ parabola volta verso il basso

$a > 0$ parabola volta verso l'alto

Oltre alla conferma del significato del segno di a , noteranno che all'aumentare in valore assoluto di a la parabola 'si stringe', che al contrario la curvatura diminuisce al diminuire del valore assoluto di a e infine che le parabole tagliano tutte l'asse delle y con ordinata uguale al termine noto c (nel nostro caso 1)

Si farà poi variare b (si ricorderà agli allievi che l'asse di simmetria ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$), dal grafico si potrà osservare uno spostamento nella direzione dell'asse x , ma anche nella direzione dell'asse y , visto che anche la ordinata (del vertice) dipende da b .

Infine variando il valore del parametro c , si avrà solamente una 'traslazione' nella direzione dell'asse y .

Condizioni per determinare l'equazione di una parabola

Poiché nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ sono presenti tre coefficienti, a , b e c occorrono tre condizioni indipendenti per determinarli. (Alcune condizioni possibili sono la conoscenza del vertice e del fuoco o di un punto o della direttrice; la conoscenza di tre suoi punti; la conoscenza del fuoco e di un punto o della direttrice).

7.INTERSEZIONE DI UNA PARABOLA CON UNA RETTA

Si richiamerà ciò che è stato fatto precedentemente con la circonferenza e l'ellisse: una retta rispetto ad una parabola è:

-secante se le due curve hanno due punti in comune **-tangente** se hanno un solo punto d'intersezione **-esterna** se non hanno punti in comune

Quindi si ricorderà che il problema geometrico di trovare "punti in comune" tra due enti si traduce nel problema algebrico di risolvere un sistema (costituito dalle equazioni delle due curve). A seconda del numero di soluzioni algebriche ottenute, si avranno nessuno, uno o due punti di intersezione.

8. ESISTENZA DI RETTA O RETTE TANGENTI AD UNA PARABOLA

Come fatto per la circonferenza e per l'ellisse dato un punto $P(x_0, y_0)$ si considera il fascio proprio di rette per quel punto: tra queste rette si cercano quelle tangenti. Si mette ad intersezione la generica retta del fascio con l'equazione dell'ellisse ottenendo una equazione risolvente di II grado il cui Δ si pone, per la condizione di tangenza, uguale a 0 ricavando i valori di m da sostituire nel fascio.

9. PARABOLA TRASLATA

E'opportuno trattare anche parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y e con il vertice non coincidente con l'origine degli assi al fine di comprendere che l'equazione canonica ottenuta è un caso particolare che deriva da una precisa scelta del sistema di riferimento. Cambiando quest'ultimo cambia anche l'equazione della parabola. Si farà vedere agli studenti che sotto traslazione

l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y diventa $y = ax^2 + bx + c$. Analizzando l'equazione si determineranno fuoco, vertice, asse di simmetria e direttrice e si faranno le opportune considerazioni di cosa accade al variare dei coefficienti.

Inoltre della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ si può considerare la sua simmetrica rispetto la bisettrice del I e III quadrante ottenendo una parabola avente equazione $x = ay^2 + by + c$, cioè con asse di simmetria parallelo all'asse x .

10. COLLEGAMENTI INTERDISCIPLINARI

Si possono citare alcuni fenomeni come quello degli specchi ustori facendo un riferimento storico alla leggenda di Archimede secondo la quale egli utilizzando degli specchi parabolici enormi incendiò le navi nemiche. Oppure far riferimento alle antenne paraboliche spiegando che questi fenomeni hanno luogo in quanto vale la proprietà che i raggi provenienti dall'infinito e paralleli all'asse di simmetria si concentrano nel fuoco e viceversa i raggi che escono dal fuoco si riflettono

Moto parabolico

Poiché nello stesso anno in corso gli allievi intraprendono lo studio dei moti parabolici sarà opportuno cogliere il collegamento tra fisica e matematica: fu Galileo a stabilire che la traiettoria di un proiettile è una parabola, o meglio un arco di parabola.

Verifica sommativa

1. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ determinarne le caratteristiche.
2. Calcola l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco della parabola avente la seguente equazione:
 - a) $y = 2x^2$
 - b) $Y = -3x^2$
3. Scrivere l'equazione della parabola avente per asse di simmetria l'asse y e vertice nell'origine sapendo che passa per il punto P assegnato:
 - a) P(-1;-3)
 - b) P(-5;1)
4. Individua la trasformazione che muta la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$ nella parabola con vertice nell'origine degli assi e asse coincidente con l'asse y
5. Stabilire se la retta di equazione $y = 6x - 7$ è secante tangente o esterna alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x - 3$.

This document was created with Win2PDF available at <http://www.win2pdf.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.
This page will not be added after purchasing Win2PDF.