UNITÀ DIDATTICA: LA PARABOLA

DESTINATARI:

Questo percorso didattico è rivolto ad una classe terza di un liceo scientifico sperimentale PNI dove le ore settimanali di matematica previste sono 5 e comprendono anche il laboratorio di informatica. Nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento delle coniche è inserito al terzo anno nel tema intitolato "Geometria" al punto 1.a:
"Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole nel piano cartesiano".
Si propone di introdurre le coniche prima **come luoghi geometrici** e successivamente di **scrivere le equazioni con riferimento a sistemi di assi cartesiani**, svolti in modo opportuno. Le abilità richieste, in questo ambito, riguardano la risoluzione analitica di problemi sulle coniche, la loro rappresentazione analitica e le proprietà geometrica del luogo.
Infine si richiede di acquisire la capacità di realizzare costruzioni di luoghi geometrici mediante strumenti diversi.

TEMPI DI SVOLGIMENTO:

12 ore (4 di spiegazione, 3 di laboratorio, 2 di esercizi in classe e 3 di verifica)

PREREQUISITI:

Lo studente deve possedere le seguenti nozioni:

- Geometria sintetica;
- Elementi fondamentali del piano cartesiano, retta e fasci di rette
- Simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione e rototraslazione;
- Concetto di funzione e di grafico di funzione;
- Equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado; equazioni parametriche;
- Risoluzione di sistemi di primo e di secondo grado;
- Conoscenze minime dei software didattici Cabrì-géomètre e Derive sufficiente per le applicazioni in laboratorio di informatica.

ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI: Sarà opportuno per mezzo di lezioni dialogiche richiamare i concetti e i metodi risolutivi acquisiti nel biennio precedente nel momento in cui questi serviranno per introdurre e spiegare i nuovi argomenti.
Si provvederà a svolgere in classe esercizi di ripasso, pertanto gli studenti verranno chiamati alla lavagna per dimostrare le conoscenze su tali prerequisiti. Inoltre verranno assegnati esercizi per casa.

OBIETTIVI GENERALI:

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI :

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.

- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI :

Conoscenze:
- Iperbole come luogo di punti
- Rappresentazione analitica dell'iperbole in un ben preciso sistema di riferimento cartesiano (equazione canonica, significato dei coefficienti)
- Elementi caratterizzanti dell'iperbole (simmetria rispetto agli assi cartesiani, intersezione dell'iperbole con gli assi cartesiani, l'iperbole come curva illimitata, asintoti, eccentricità)
- Posizione di una retta rispetto a un'iperbole
- Rette tangenti ad un'iperbole
- iperbole traslata

Competenze:
- Saper utilizzare strumenti informatici per la costruzione della parabola come luoghi geometrici
- Saper rappresentare analiticamente la parabola riconoscere dagli aspetti formali dell'equazione le proprietà geometriche del luogo e viceversa
- Saper risolvere analiticamente problemi riguardanti la parabola

Capacità:
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi
- saper risolvere problemi di geometria dando un'interpretazione analitica
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite in contesti diversi.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.

Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).

Verranno discussi e confrontati in classe gli esercizi e i problemi che hanno creato più difficoltà negli allievi e problemi. Infine si svolgeranno attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Cabri-géomètre e Derive.

CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite semplici verifiche orali, esercitazioni in classe,
correzione degli esercizi assegnati per casa e valutazione delle relazioni di laboratorio.

Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l'acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva. La verifica sommativa, nella quale vengono proposti esercizi simili a quelli esaminati in classe, ma non solo, permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l'autonomia nella risoluzione degli esercizi.

STRUMENTI UTILIZZATI:

- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gessi
- ✓ Calcolatrice scientifica
- ✓ Fotocopie
- ✓ Software didattici come Cabri-géomètre e Derive

SVILUPPO DEI CONTENUTI:

1. LE CONICHE COME SEZIONI DI UN CONO

E’ importante prima di trattare separatamente le coniche come luoghi geometrici introdurle in modo unitario. Trattare direttamente e in modo separato circonferenza, ellisse, parabola ed iperbole potrebbe dare l’idea ai ragazzi che queste quattro figure non abbiano una origine comune. Invece possono tutte essere considerate come intersezione di un cono con un piano.

a) Si può raccontare o fare direttamente l’esperienza di illuminare un muro con una torcia elettrica tenuta perpendicolarmente alla parete: la parte illuminata è all'incirca circolare. Se si inclina sempre di più la torcia verso l'alto il cerchio si deforma e assume una forma allungata: è un'ellisse. Continuando a inclinare la torcia, l'ellisse si allunga sempre di più. La figura così ottenuta è una parabola. Se poi si usa una lampada con paralume di forma conica, aperto da entrambe le parti, l’ombra che proietta sulla parete vicina è una iperbole completa.

b) Si può chiedere agli allievi quali conclusione si possono trarre: cioè che le figure sono state ottenute come intersezione di un cono (il cono di luce della torcia) e un piano (piano del muro).

c) a questo punto si possono fare i riferimenti storici necessari: una adeguata introduzione storica ed epistemologica infatti potrebbe rappresentare proprio un anello di congiunzione tra i diversi modi di affrontare l’argomento: dalle sezioni coniche di Apollonio ottenute come intersezioni nello spazio di un cono con un piano alla geometria analitica nel piano di Cartesio. Quindi nel corso dei secoli le coniche sono state studiate in modi differenti e il primo approccio a tale argomento è stato di natura puramente sintetica. Si può accennare che sono state scoperte da ***Menecmo*** e che il loro studio fu approfondito e consolidato da ***Apollonio*** conosciuto come il Grande Geometra, nell'opera “Le Coniche” formata da otto libri, nella quale espose la maggior parte delle proprietà tuttora note delle coniche e introdusse i nomi di ellipsis (mancanza), hyperbola (lanciare al di là), parabola (porre accanto o confrontare). Apollonio fu il primo a considerare una superficie conica a due falde e a dimostrare che era possibile ottenere tutte le coniche intersecando una unica superficie conica con un piano e al variare dell’inclinazione di quest’ultimo: per tale motivo vengono dette **sezioni coniche** (o coniche). In particolare se β è l'angolo acuto che il piano forma con l'asse del cono e α è la semiapertura del cono a seconda di come varia l’angolo β otteniamo delle curve diverse.

2. L’IPERBOLE COME LUOGO GEOMETRICO

Si riprenderà il concetto di luogo geometrico a cui si è giunti dopo aver fatto l’introduzione alle coniche. Ciò che si cerca è una proprietà caratterizzante. Si procederà facendo realizzare agli studenti la costruzione dell’iperbole con il software Cabri traendo le dovute considerazioni geometriche. (Si formalizzerà la definizione di luogo geometrico come l’insieme dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 detti fuochi, vale a dire $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \cos\tan te$). E’ importante per la parte “costruttiva” iniziale un adeguato utilizzo di software didattici che facciano cogliere la giusta dinamicità del concetto di luogo geometrico, che diano una precisa idea della forma geometrica ottenuta e delle proprietà elementari delle coniche. Solo partendo da questo punto si potrà passare ad una nuova interpretazione che consentirà di cogliere nuove informazioni e proprietà: quella analitica.

3.EQUAZIONE CANONICA DELL’IPERBOLE CON I FUOCHI APPARTENENTI ALL’ASSE *x*

Si considererà un’iperbole si indicherà con:

$2c$ con $c \in \Re$, $c > 0$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale** e si sceglierà un opportuno sistema di assi cartesiani xOy in modo tale che l’asse delle ascisse coincida con la retta passante per i punti F_1 ed F_2, quello delle ordinate con l’asse del segmento $F_1 F_2$ e l’origine O nel punto medio del segmento $F_1 F_2$.

Si indicherà con:

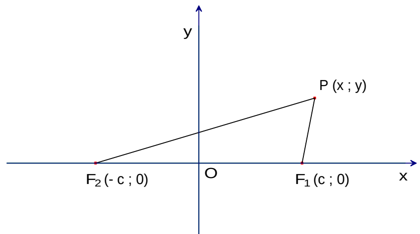
$2a$ con $a \in \Re$, $a > 0$ la differenza costante fra le distanze di ciascun punto dell’iperbole da ognuno dei due fuochi.

Poiché la distanza focale è stata indicata con *2c*, le coordinate dei fuochi saranno:

$$F_1(c,0) \text{ e } F_2(-c,0) \text{ con } c \in \Re,\ c > 0$$

Indicato con $P(x,y)$ un generico punto del piano, si possono calcolare le distanze del punto dai fuochi:

$$\overline{PF}_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \overline{PF}_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



La condizione affinché un punto $P(x,y)$ appartenga all'iperbole è che sia:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a \text{ con } a \in \Re,\ a > 0\,,$$

dopo una serie di passaggi si avrà

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

che prende il nome di ***equazione canonica dell'iperbole avente i fuochi sull'asse x***.

4. PROPRIETÀ DELL'IPERBOLE

- **SIMMETRIA RISPETTO AGLI ASSI CARTESIANI**

Poiché nell'equazione canonica dell'iperbole le variabili *x* e *y* compaiono solo elevate al quadrato, se $P_1(x_1, y_1)$ è un punto dell'iperbole lo sono anche i punti $P_2(-x_1, y_1)$; $P_3(x_1, -y_1)$; $P_4(-x_1, -y_1)$.

L'iperbole è quindi una *curva* ***simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.***

<u>Osservazione didattica</u>. Si fara osservare agli allievi che l'equazione canonica dell'iperbole rappresenta un'iperbole riferita ***al centro e ai suoi assi di simmetria*** perché gli assi coordinati sono assi di simmetria e l'origine è il centro dell'iperbole.

- **INTERSEZIONE DELL'IPERBOLE CON GLI ASSI CARTESIANI**

Per determinare le intersezioni di un'iperbole con l'asse *x* e con l'asse *y*, si metterà a sistema l'equazione dell'iperbole con l'equazione degli assi. Si otterranno i punti $A_1(+a;0)$ e $A_2(-a;0)$ **(vertici reali dell'iperbole)** dall'intersezione con l'asse x**,** mentre risolvendo il secondo sistema gli allievi osserveranno che l'iperbole ***non ha intersezioni con l'asse y.***

Osservazione: il segmento A_1A_2 prende il nome di ***asse trasverso*** (o ***principale*** o ***focale***) che interseca quindi l'iperbole in due punti di ascisse – *a* e *a*; questi due punti si dicono i **vertici** dell'iperbole; *a* si dice **lunghezza del semiasse trasverso**.

Poiché l'iperbole non ha intersezioni con l'asse *y* è detto ***asse non traverso*** (o ***secondario***) ed è la retta perpendicolare all'asse trasverso nel punto medio del segmento di estremi i due fuochi.

- **L'IPERBOLE E' UNA CURVA ILLIMITATA**

Gli alunni osserveranno, senza dover ricorrere alla figura ma semplicemente analizzando l'equazione, che ***tutti i punti dell'iperbole si trovano fuori dalla striscia limitata dalle rette x = a e x = - a, quindi l'iperbole è costituita da due rami distinti*****.**

- **ASINTOTI**

Dall'intersezione di un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con una retta *r* di equazione $y = mx$, si avranno i seguenti casi:

1. CASO $b^2 - a^2m^2 > 0$

cioè

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

In questo caso i valori ottenuti sono reali, ossia la retta $y = mx$ interseca l'iperbole in due punti reali e distinti.

2. CASO $b^2 - a^2m^2 = 0$

cioè

$$m = \pm\frac{b}{a}$$

Le rette aventi tali coefficienti angolari:

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x$$

si dicono asintoti dell'iperbole. Tali rette non intersecano mai l'iperbole, ma ad essa si avvicinano indefinitamente a mano a mano che ci si allontana dall'origine.

Nota didattica. Si farà osservare agli allievi che:

- gli asintoti sono le diagonali del rettangolo di vertici A_1 (*a*,0), A_2 (-*a*,0), B_1(0,*b*) e B_4 (0,-*b*) e *b* si dice ***lunghezza del semiasse non trasverso***
- assegnando a *m* valori molto vicini a $\pm\frac{b}{a}$, si ha che il radicando $b^2 - a^2m^2$ diventa un numero molto piccolo, vicino allo zero, e poiché i numeratori sono costanti i valori assoluti di *x* e *y* crescono indefinitamente
- la relazione $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$ ci dice che l'iperbole è contenuta nella coppia di angoli opposti al vertice determinati dagli asintoti e non contenenti l'asse *y*. ***E' per questo motivo che si dice che la curva è costituita da due rami.***

3. CASO $b^2 - a^2m^2 < 0$

cioè

$$m < -\frac{b}{a} \vee m > \frac{b}{a}.$$

In questo caso, il sistema non ha soluzioni reali, cioè la retta non interseca l'iperbole.

- **ECCENTRICITA'**

Il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso di un'iperbole è detto ***eccentricità*** ed è solitamente indicato con la lettera *e*:

$$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza dell'asse trasverso}}$$

Nell'iperbole con i fuochi sull'asse *x*, la distanza focale è 2*c* mentre la lunghezza dell'asse trasverso è 2*a*, quindi l'eccentricità è data dal rapporto $\frac{2c}{2a}$, ossia:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Essendo $c^2 - a^2 = b^2$, cioè $c^2 = a^2 + b^2$ da cui $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Quindi le coordinate dei fuochi di un'iperbole di equazione nota sono

$$F_1(\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \quad , \quad F_2(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

si avrà

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Poiché $c > a > 0$ si ha:

$$e > 1.$$

Osservazione: A eccentricità maggiore corrisponde maggiore apertura dei rami dell'iperbole e lo si fa notare agli allievi esaminando i grafici di tre iperboli con lo stesso valore di a e diversi valori di b.

5. IPERBOLE CON I FUOCHI SULL'ASSE Y: Si farà cenno all'iperbole con i fuochi sull'asse y, si metterà in evidenza quale sia l'equazione canonica ottenuta e quale sia la relazione che in questo caso sussiste tra i coefficienti a, b, c. Gli assi trasverso e non trasverso sono invertiti.

6. L'IPERBOLE EQUILATERA

- **IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASSI DI SIMMETRIA.**

Se nell'equazione canonica riferita al centro e agli assi di simmetria, si ha **a = b**, l'iperbole si dice **equilatera. L'equazione in questo caso diventa** $x^2 - y^2 = a^2$. Nel caso in cui i fuochi siano sull'asse y diventa invece $x^2 - y^2 = -a^2$ Essendo **2a = 2b**, il rettangolo che ha per lati l'asse traverso e quello non traverso diventa un quadrato. Le equazioni degli asintoti sono :

y = x e y =-x

gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti e la semidistanza focale diventa $c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ e l'eccentricità è $\sqrt{2}$.

- **IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASINTOTI.**

Se si considerano gli asintoti come gli assi di un nuovo sistema di riferimento per l'iperbole (possiamo immaginare di far ruotare l'iperbole e gli assi vecchi di 45° affinché coincidano con gli asintoti) l'equazione dell'iperbole in questo nuovo sistema di riferimento è **xy = k**.
Gli assi di simmetria sono le bisettrici dei quadranti e quindi i fuochi e i vertici appartengono a tali rette.

OSSERVAZIONE DIDATTICA: per determinare l'equazione di un'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, cioè del tipo:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

sono necessarie *due condizioni*, comparendo in essa due coefficienti *a* e *b*. Indichiamo alcuni dei casi che si possono presentare:

1. Passaggio per due punti (non simmetrici rispetto agli assi o rispetto all'origine);
2. conoscenza delle coordinate di un fuoco e dell'equazione di un asintoto;
3. conoscenza delle coordinate di un vertice e di un fuoco.

Per determinare l'equazione di un'iperbole equilatera, sia essa del tipo: xy = k, $x^2 - y^2 = a^2$ è sufficiente *una sola condizione*, che non sia la conoscenza degli asintoti o l'eccentricità, costanti per ogni iperbole equilatera, ma che può essere per esempio data dal passaggio per un dato punto o dalla tangenza ad una data retta.

<u>Osservazione</u>: si proporrà agli studenti il quesito: **l'iperbole è il grafico di una funzione?** al fine di non settorializzare gli argomenti disciplinari svolti, ma al contrario di cogliere collegamenti con concetti e proprietà studiati e visti in contesti e in temi diversi; in questo caso con il concetto di funzione. ***In generale l'equazione dell'iperbole non è una funzione (ad un valore di x corrispondono due valori di y) e solo l'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti è il grafico di una funzione.***

7. IPERBOLE EQUILATERA TRASLATA

Sia data la curva di equazione:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

dove i coefficienti *a*, *b*, *c*, *d* sono costanti assegnati, con *c* e *d* non contemporaneamente nulli. Questa è una funzione y = f(x) **.** Si dimostra che a seconda dei valori assunti dai coefficienti, essa rappresenta o una retta o un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani (iperbole equilatera traslata)

8. COLLEGAMENTI INTERDISCIPLINARI

Si può porre la seguente domanda: **Quale relazione c'è fra le variabili x e y nell'equazione xy=k?** Le coordinate x e y di un generico punto sono tali che il loro prodotto è sempre costante: si tratta di proporzionalità inversa. Si potrà allora richiamare la legge di Boyle (secondo la quale a temperatura costante, per una massa di gas ideale, il prodotto del volume V per la pressione P a cui è sottoposto è costante) PV=k che rappresenta un'iperbole equilatera.

Si può far osservare che anche l'iperbole gode di una proprietà ottica. Se ponessimo una sorgente luminosa in uno dei suoi due fuochi e considerassimo il ramo dell'iperbole come una parete riflettente internamente, la luce si rifletterebbe andando all'infinito, ma sulla stessa retta su cui si trova l'altro fuoco.

A conclusione della trattazione delle coniche si può far osservare agli allievi che:

comunque sia fissato il sistema di riferimento cartesiano, una conica è una curva avente sempre equazione cartesiana della forma $a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0$ dove almeno uno dei coefficienti a, b, c è diverso da zero e viceversa ogni equazione di secondo grado in due incognite rappresenta una conica. In particolare si verifica che se:

- $b^2 - 4ac < 0$, la conica è una ellisse
- $b^2 - 4ac = 0$, la conica è una parabola
- $b^2 - 4ac > 0$, la conica è una iperbole

dove l'espressione $b^2 - 4ac$ viene detta discriminante della conica.

Verifica sommativa *si possono proporre esercizi del tipo:*

1. Scrivi, se è possibile, l'equazione dell'iperbole con centro nell'origine, che soddisfa alle seguenti condizioni:
   a) ha un vertice nel punto V(-2;0) e passa per A(-3;2)
   b) ha i fuochi sull'asse delle ordinate e passa per i punti A(3;3) e B(-2;1)
   c) ha una vertice in V(0;7) e passa per P(2;9)
   d) ha un vertice in V(3/2;0) ed eccentricità e=4/3
2. Data l'equazione dell'iperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, determinare la misura del semiasse trasverso , le coordinate dei vertici, dei fuochi, l'eccentricità e l'equazione degli asintoti poi rappresentare la curva graficamente.

3. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria tangente alla retta *y=2x+2*