UNITÀ DIDATTICA: L'ELLISSE
DESTINATARI:
Questo percorso didattico è rivolto ad una classe terza di un liceo scientifico sperimentale PNI dove le ore settimanali di matematica previste sono 5 e comprendono anche il laboratorio di informatica.
Nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento delle coniche è inserito al terzo anno nel tema intitolato "Geometria" al punto 1.a:
"Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole nel piano cartesiano".
Si propone di introdurre le coniche prima **come luoghi geometrici** e successivamente di **scrivere le equazioni con riferimento a sistemi di assi cartesiani**, svolti in modo opportuno. Le abilità richieste, in questo ambito, riguardano la risoluzione analitica di problemi sulle coniche, la loro rappresentazione analitica e le proprietà geometrica del luogo.
Infine si richiede di acquisire la capacità di realizzare costruzioni di luoghi geometrici mediante strumenti diversi.
TEMPI DI SVOLGIMENTO:
11 ore (4 di spiegazione, 2 di laboratorio, 2 di esercizi in classe e 3 di verifica)
PREREQUISITI:
Lo studente deve possedere le seguenti nozioni:
- Geometria sintetica;
- Elementi fondamentali del piano cartesiano, retta e fasci di rette
- Simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione e rototraslazione;
- Concetto di funzione e di grafico di funzione;
- Equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado; equazioni parametriche;
- Risoluzione di sistemi di primo e di secondo grado;
- Conoscenze minime dei software didattici Cabrì-géomètre e Derive sufficiente per le applicazioni in laboratorio di informatica.

ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI: Sarà opportuno per mezzo di lezioni dialogiche richiamare i concetti e i metodi risolutivi acquisiti nel biennio precedente nel momento in cui questi serviranno per introdurre e spiegare i nuovi argomenti.
Si provvederà a svolgere in classe esercizi di ripasso, pertanto gli studenti verranno chiamati alla lavagna per dimostrare le conoscenze su tali prerequisiti. Inoltre verranno assegnati esercizi per casa.
OBIETTIVI GENERALI:
- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI :
- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.

- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI :

Conoscenze:
- Ellisse come luogo di punti
- rappresentazione analitica dell'ellisse in un ben preciso sistema di riferimento cartesiano (equazione canonica, significato dei coefficienti)
- elementi caratterizzanti e proprietà (eccentricità, assi di simmetria, intersezioni con gli assi cartesiani)
- Posizione di una retta rispetto all'ellisse
- Rette tangenti ad un'ellisse

Competenze:
- Saper utilizzare strumenti informatici per la costruzione dell'ellisse come luoghi geometrici
- Saper rappresentare analiticamente l'ellisse: riconoscere dagli aspetti formali dell'equazione le proprietà geometriche del luogo e viceversa
- Saper risolvere analiticamente problemi riguardanti l'ellisse

Capacità:
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi
- saper risolvere problemi di geometria dando un'interpretazione analitica
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite in contesti diversi.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.

Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).

Verranno discussi e confrontati in classe gli esercizi e i problemi che hanno creato più difficoltà negli allievi e problemi. Infine si svolgeranno attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Cabri-géomètre e Derive.

CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite semplici verifiche orali, esercitazioni in classe,
correzione degli esercizi assegnati per casa e valutazione delle relazioni di laboratorio.

Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l'acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva. La verifica sommativa, nella quale vengono proposti esercizi simili a quelli esaminati in classe, ma non solo, permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l'autonomia nella risoluzione degli esercizi.

STRUMENTI UTILIZZATI:
- ✓ Libro di testo
- ✓ Lavagna e gessi
- ✓ Calcolatrice scientifica
- ✓ Fotocopie
- ✓ Software didattici come Cabri-géomètre e Derive

SVILUPPO DEI CONTENUTI:

1. LE CONICHE COME SEZIONI DI UN CONO

E’ importante prima di trattare separatamente le coniche come luoghi geometrici introdurle in modo unitario. Trattare direttamente e in modo separato circonferenza, ellisse, parabola ed iperbole potrebbe dare l’idea ai ragazzi che queste quattro figure non abbiano una origine comune. Invece possono tutte essere considerate come intersezione di un cono con un piano.

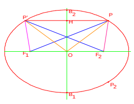
a) Si può raccontare o fare direttamente l’esperienza di illuminare un muro con una torcia elettrica tenuta perpendicolarmente alla parete: la parte illuminata è all'incirca circolare. Se si inclina sempre di più la torcia verso l'alto il cerchio si deforma e assume una forma allungata: è un'ellisse. Continuando a inclinare la torcia, l'ellisse si allunga sempre di più. La figura così ottenuta è una parabola. Se poi si usa una lampada con paralume di forma conica, aperto da entrambe le parti, l’ombra che proietta sulla parete vicina è una iperbole completa.

b) Si può chiedere agli allievi quali conclusione si possono trarre: cioè che le figure sono state ottenute come intersezione di un cono (il cono di luce della torcia) e un piano (piano del muro).

c) a questo punto si possono fare i riferimenti storici necessari: una adeguata introduzione storica ed epistemologica infatti potrebbe rappresentare proprio un anello di congiunzione tra i diversi modi di affrontare l’argomento: dalle sezioni coniche di Apollonio ottenute come intersezioni nello spazio di un cono con un piano alla geometria analitica nel piano di Cartesio. Quindi nel corso dei secoli le coniche sono state studiate in modi differenti e il primo approccio a tale argomento è stato di natura puramente sintetica. Si può accennare che sono state scoperte da ***Menecmo*** e che il loro studio fu approfondito e consolidato da ***Apollonio*** conosciuto come il Grande Geometra, nell'opera “Le Coniche” formata da otto libri, nella quale espose la maggior parte delle proprietà tuttora note delle coniche e introdusse i nomi di ellipsis (mancanza), hyperbola (lanciare al di là), parabola (porre accanto o confrontare). Apollonio fu il primo a considerare una superficie conica a due falde e a dimostrare che era possibile ottenere tutte le coniche intersecando una unica superficie conica con un piano e al variare dell’inclinazione di quest’ultimo: per tale motivo vengono dette **sezioni coniche** (o coniche). In particolare se β è l'angolo acuto che il piano forma con l'asse del cono e α è la semiapertura del cono a seconda di come varia l’angolo β otteniamo delle curve diverse.

2. ELLISSE COME LUOGO GEOMETRICO :

Si riprenderà il concetto di luogo geometrico a cui si è giunti dopo aver fatto l’introduzione alle coniche. Ciò che si cerca è una proprietà caratterizzante. Si procederà spiegando l’antico metodo del giardiniere che può essere realizzato o con materiali poveri (tavoletta di legno, chiodini, cordicella) oppure per mezzo di una scheda opportunamente preparata attraverso il software Cabri – géomètre: in questo modo gli allievi verranno condotti a ricavare la proprietà che ***l’ellisse è il luogo geometrico dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi*** F_1 e F_2 ***detti fuochi; ossia*** $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\text{costante}$ ***per ogni punto P dell’ellisse.*** E’ importante per la parte “costruttiva” iniziale un adeguato utilizzo di software didattici che facciano cogliere la giusta dinamicità del concetto di luogo geometrico, che diano una precisa idea della forma geometrica ottenuta e delle proprietà elementari delle coniche. Solo partendo da questo punto si potrà passare ad una nuova interpretazione che consentirà di cogliere nuove informazioni e proprietà: quella analitica.



Considerazioni sintetiche L’argomento delle coniche, se trattato in modo opportuno, può essere occasione di studio di una delle parti più stimolanti della matematica, che offre numerose occasioni di collegamento: in modo particolare dà l’opportunità di mettere a confronto due aspetti diversi della stessa disciplina, vale a dire la geometria sintetica ed analitica. Si darà agli studenti una scheda che dovranno compilare e che li condurrà a trarre le opportune considerazioni geometriche da un punto di vista sintetico: la retta r passante per i fuochi e la retta s passante per il centro dell’ellisse e perpendicolare ad r sono assi di simmetria per l’ellisse. Il centro dell’ellisse è centro di simmetria.

3. RAPPRESENTAZIONE ANALITICA RISPETTO AD UN PRECISO SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO (EQUAZIONE CANONICA)

E' opportuno richiamare lo sviluppo storico dell'argomento, ricordando che per i Greci lo studio delle coniche aveva scarsi interessi pratici e per questo motivo venne abbandonato per un lunghissimo periodo. Lo studio delle coniche iniziato storicamente per via geometrica è stato poi sviluppato e approfondito nel piano cartesiano. Cartesio, nel 1637 nella sua *Geometria*, dà la prima trattazione coi metodi della geometria analitica sintesi tra il metodo analitico e quello della geometria sintetica, che costituisce la particolarità della geometria analitica. Cartesio cercò di operare una *"sistematica applicazione dell'algebra alla geometria e viceversa della geometria all'algebra"*.)A questo punto si può passare ad effettuare questo passaggio da geometria ad algebra; è necessario introdurre dunque un sistema di riferimento. QUALE? Si farà riflettere gli alunni sulle considerazioni elementari fatte: le rette e gli assi di simmetria e li si condurrà a comprendere che il sistema di riferimento più comodo è proprio quello con l'asse x passante per i fuochi, l'asse y perpendicolare a questo e l'origine coincidente con il centro di simmetria dell'ellisse. A questo punto si determinerà l'equazione dell'ellisse rispetto a tale riferimento.
Indichiamo con:

$2a$ con $a \in \Re,\ a > 0$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi e la distanza focale con $2c$, le coordinate dei fuochi saranno:

$$F_1(c,0) \text{ e } F_2(-c,0) \text{ con } c \in \Re,\ c > 0$$

Indicato con $P(x, y)$ un generico punto del piano, calcoliamo le distanze del punto dai fuochi:

$$\overline{PF}_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \overline{PF}_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Poiché $P(x, y)$ appartiene all'ellisse se solo se :

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ con $a \in \Re,\ a > 0$ sostituendo in quest'ultima uguaglianza le espressioni di $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ e manipolando l'equazione ottenuta, dopo opportune considerazioni si avrà l'equazione: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ ***detta equazione canonica o normale dell'ellisse***

Osservazione didattica: si può chiedere agli allievi *data l'equazione canonica di un'ellisse è possibile determinare le coordinate dei fuochi?* **(**Sapendo che 2c è la distanza focale, che le coordinate dei fuochi sono (c, 0) e (-c, 0) e che $\boxed{a^2 - b^2 = c^2}$ otteniamo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$)

Osservazione: si proporrà agli studenti il quesito: **l'ellisse è il grafico di una funzione?** al fine di non settorializzare gli argomenti disciplinari svolti, ma al contrario di cogliere collegamenti con concetti e proprietà studiati e visti in contesti e in temi diversi; in questo caso con il concetto di funzione. L'equazione dell'ellisse ***non è una funzione*** (ad un valore di x corrispondono due valori di y).

4. PROPRIETÀ DELL'ELLISSE

- ✓ ***SIMMETRIA RISPETTO AGLI ASSI CARTESIANI***

Nell'equazione dell'ellisse $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ compaiono solo termini di 2° grado nelle variabili *x* e *y*. Ne segue che se un punto $P_1(x_1, y_1)$ appartiene all'ellisse, allora appartengono all'ellisse anche i punti $P_2(-x_1, y_1)$, $P_3(x_1, -y_1)$, $P_4(-x_1, -y_1)$). ***L'ellisse ha come assi di simmetria l'asse y e l'asse x e come centro di simmetria l'origine degli assi.*** L'origine o si dice il ***centro*** dell'ellisse e i due assi coordinati *x* e *y* si dicono ***assi*** dell'ellisse.

- ✓ ***INTERSEZIONE DELL'ELLISSE CON GLI ASSI CARTESIANI***

Per determinare le intersezioni di un'ellisse con l'asse x e con l'asse y, si mette a sistema l'equazione dell'ellisse con l'equazione dell'asse x e con l'asse y , punti $A_1(a,0)$ e $A_2(-a,0)$ ottenuti dall'intersezione dell'ellisse con l'asse x e i punti $B_1(0,b)$ e $B_2(0,-b)$ ottenuti dall'intersezione dell'ellisse con l'asse y si dicono ***vertici*** dell'ellisse. Il segmento $\overline{A_1A_2}=2a$ contenente i fuochi prende il nome di ***asse maggiore*** poiché $a > b$, mentre il segmento $\overline{B_1B_2}=2b$ è detto ***asse minore***; a e b rappresentano allora la metà delle misure dei due assi e si dicono brevemente i ***semiassi*** dell'ellisse.

- ✓ ***LIMITAZIONI DELL'ELLISSE***

Disegnando il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani, ognuno passante per uno dei quattro vertici A_1, A_2, B_1 e B_2: tutti i punti dell'ellisse sono all'interno di questo rettangolo. Inoltre facendo delle opportune considerazioni si può far osservare agli allievi che l'ellisse è inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni $x=\pm a$, e $y=\pm b$

- ✓ ***ECCENTRICITÀ***

Si potrà introdurre l'argomento proponendo un esercizio opportunamente scelto, ovvero tre equazioni di ellissi tali da rappresentare sullo stesso sistema di riferimento tre ellissi aventi lo stesso asse maggiore, ma asse minore che diminuisce e distanza focale che aumenta: si farà osservare che l'ellisse è sempre più schiacciata. Si introdurrà il rapporto tra distanza focale e l'asse maggiore, detta eccentricità, che esprime numericamente lo schiacciamento dell'ellisse: $e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ con $0\le e<1$

Osservazione didattica: Si farà un collegamento con l'argomento della circonferenza svolto precedentemente: ***Cosa accade se c = 0*?** L'asse maggiore e l'asse minore hanno la stessa lunghezza, i fuochi coincidono con il centro dell'ellisse e l'eccentricità è nulla: otteniamo una circonferenza. (***La circonferenza è una ellisse particolare, in cui i fuochi coincidono e l'eccentricità è nulla.)***

5. EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE CON I FUOCHI APPARTENENTI ALL'ASSE Y

Si farà osservare agli allievi che il procedimento è analogo a quello usato per l'ellisse con i fuochi sull'asse x e si metterà in evidenza quale sia l'equazione canonica ottenuta e quale sia la relazione che in questo caso sussiste tra i coefficienti a, b, c. Gli assi maggiore e minore sono invertiti.

6. CONDIZIONI PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA ELLISSE

-Poiché nell'equazione compaiono due coefficienti, a e b, per determinarla, sono necessarie due condizioni indipendenti che permettono di impostare un sistema di due equazioni nelle incognite a e b. (Alcune condizioni possibili sono le seguenti: lunghezze dei due semiassi; coordinate di un fuoco e di un vertice (o semiasse); l'ellisse passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice); l'ellisse passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità; l'ellisse passa per due punti noti; è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice).

7. POSIZIONE TRA UNA RETTA DEL PIANO E UNA ELLISSE

Data un'ellisse di equazione E $:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e una retta r di equazione $y=mx+q$, vi sono tre possibili posizioni di r rispetto a E:

- r è secante E, cioè la interseca in due punti distinti
- r è tangente E, cioè la interseca in un punto (con molteplicità due)
- r è esterna a E, cioè non la interseca in alcun punto.

Dal punto di vista analitico, le eventuali intersezioni tra l'ellisse E e la retta r si trovano risolvendo il sistema formato dalle due equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+q. \end{cases}$$

Indicando con Δ il discriminante dell'equazione risolvente, si possono verificare i seguenti tre casi:

- $\Delta > 0$ in tal caso il sistema ammette due soluzioni reali; questo significa che la retta *r* e l'ellisse E hanno due punti in comune, le cui coordinate sono le soluzioni del sistema, ossia che la retta *r* è **secante** E.
- $\Delta = 0$ in tal caso il sistema ammette due soluzioni reali e coincidenti, ossia la retta *r* è tangente all'ellisse E, avente un solo punto in comune con essa.
- $\Delta < 0$ in tal caso il sistema non ha soluzioni reali, cioè non esistono punti in comune tra la retta *r* e l'ellisse E; la retta è perciò esterna a E.

A questo punto si farà osservare agli allievi che considerando l'equazione della retta *r* in forma esplicita: $y = mx + q$, abbiamo escluso in caso in cui la retta *r* sia parallela all'asse *y*.

8. RETTE TANGENTI AD UN'ELLISSE

Si farà ancora un collegamento con il caso della circonferenza

- ✓ *P* è interno a E; ogni retta *P* è allora secante E, quindi non è possibile condurre alcuna tangente per *P*;
- ✓ *P* appartiene a E; esiste quindi una e una sola retta per *P* tangente a E;
- ✓ *P* è esterno a E; è perciò possibile condurre due rette per *P* tangenti a E; t_1 e t_2.

Per determinare le rette tangenti negli ultimi due casi, è sufficiente imporre la condizione che la retta generica per *P* di equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ abbia una sola intersezione con E. Perché ciò avvenga, l'equazione risolvente il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y-y_0=m(x-x_0) \end{cases}$$

deve avere radici reali e coincidenti. Pertanto la condizione da imporre è: $\Delta = 0$ (dove Δ è il discriminante dell'equazione risolvente).

<u>Nota didattica</u>. Si fa osservare che se si considera il fascio di rette rappresentato in forma esplicita cioè con un'equazione del tipo $y - x_0 = m(x - x_0)$ sarebbe opportuno immediatamente verificare se la retta di equazione $x = x_0$ è soluzione del problema, e in seguito trovare le eventuali altre rette che soddisfano le condizioni del problema. A tal proposito si può proporre un esercizio del tipo: determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte dal punto *P* (assegnato) all'ellisse di equazione E(assegnata); in cui svolgendo l'esercizio si trova l'equazione in *m* di primo grado che quindi fornisce un solo valore di *m*. ***Questo non significa che esiste una sola tangente a E condotta per P (P è esterno all'ellisse e per un punto esterno ad un'ellisse è possibile condurre due rette distinte tangenti ad essa), ma significa che la tangente t_1 è parallela all'asse y.***

9. ELLISSE E CAMBIAMENTO DEL SISTEMA DI COORDINATE E'opportuno trattare anche ellissi con gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani al fine di comprendere che le equazioni canoniche ottenute sono un caso particolare che derivano da una precisa scelta del sistema di riferimento. Cambiando quest'ultimo cambia anche l'equazione dell'ellisse. Si considererà allora una traslazione di un certo vettore e le relative equazioni ottenendo una nuova equazione dell'ellisse ($\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$) che questa volta dipende da un sistema di riferimento i cui assi sono paralleli agli assi di simmetria dell'ellisse. Si farà osservare che le lunghezze degli assi e la distanza focale di una ellisse traslata secondo un vettore v sono le stesse dell'ellisse di partenza; i fuochi e i vertici si ottengono traslando secondo il vettore v i fuochi e i vertici dell'ellisse di partenza.

10.COLLEGAMENTI INTERDISCIPLINARI
- Fenomeni volte ellittiche: ciò che viene bisbigliato, in un fuoco di una camera a volta ellittica verrà udito da una persona che occupa la posizione dell'altro fuoco. Le altre persone nella stanza non sentiranno nulla! Ciò è dovuto al fatto che tutti i raggi che partono da un fuoco si riflettono nell'altro fuoco.

- Notevole applicazione delle coniche e delle loro proprietà geometriche si riprenderanno quando si affronterà con gli alunni l'astronomia e in particolare le leggi di Keplero sul moto dei pianeti: ogni corpo dotato di massa determina intorno a sé una zona di spazio in cui le altre masse risentono della sua attrazione, un campo gravitazionale. Un corpo che si muove in un campo gravitazionale, può descrivere tre diversi tipi di traiettorie: ellittica, iperbolica o parabolica. Tali traiettorie dipendono dalla velocità iniziale e dalla direzione del corpo. Nel caso di orbite ellittiche si parla di traiettoria chiusa (per es. la terra intorno al sole, la luna intorno la terra). Nel caso di orbite iperboliche e paraboliche si parla di orbite aperte (per es. una cometa intorno al sole).

Verifica sommativa

1. Data l'equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13-k}=1$, determinare per quali valori di k
   - L'equazione rappresenta un ellisse o, come caso particolare una circonferenza
   - I fuochi sono sull'asse y
   - Un fuoco ha coordinate (-1,0).
2. Riconoscere fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano un'ellisse con i fuochi sull'asse x e quelle che rappresentano una ellisse con i fuochi sull'asse y.
   - $x^2+2y^2=18$
   - $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$
   - $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$
   - $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

3. Scrivi l'equazione dell'ellisse di semiassi 4 e $\sqrt{5}$ appartenenti rispettivamente alle rette di equazione x+6=0 e y+2=0
4. Determinare le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2+2y^2=9$ condotte dal punto P(-9,0).