UNITÀ DIDATTICA: LA CIRCONFERENZA

DESTINATARI:
Questo percorso didattico è rivolto ad una classe terza di un liceo scientifico sperimentale PNI dove le ore settimanali di matematica previste sono 5 e comprendono anche il laboratorio di informatica. Nei programmi ministeriali PNI di matematica e fisica per il liceo scientifico, l'argomento delle coniche è inserito al terzo anno nel tema intitolato "Geometria" al punto 1.a:
"Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole nel piano cartesiano".
Si propone di introdurre le coniche prima **come luoghi geometrici** e successivamente di **scrivere le equazioni con riferimento a sistemi di assi cartesiani**, svolti in modo opportuno. Le abilità richieste, in questo ambito, riguardano la risoluzione analitica di problemi sulle coniche, la loro rappresentazione analitica e le proprietà geometrica del luogo.
Infine si richiede di acquisire la capacità di realizzare costruzioni di luoghi geometrici mediante strumenti diversi.

TEMPI DI SVOLGIMENTO:
La circonferenza 10 ore (3 di spiegazione, 2 di laboratorio,2 di esercizi in classe e 3 di verifiche orali e scritte).

PREREQUISITI:
Lo studente deve possedere le seguenti nozioni:
- Geometria sintetica;
- Elementi fondamentali del piano cartesiano, retta e fasci di rette
- Simmetria assiale, simmetria centrale, traslazione, rotazione e rototraslazione;
- Concetto di funzione e di grafico di funzione;
- Equazioni e disequazioni di primo e di secondo grado; equazioni parametriche;
- Risoluzione di sistemi di primo e di secondo grado;
- Conoscenze minime dei software didattici Cabrì-géomètre e Derive sufficiente per le applicazioni in laboratorio di informatica.

ACCERTAMENTO DEI PREREQUISITI: Sarà opportuno per mezzo di lezioni dialogiche richiamare i concetti e i metodi risolutivi acquisiti nel biennio precedente nel momento in cui questi serviranno per introdurre e spiegare i nuovi argomenti.
Si provvederà a svolgere in classe esercizi di ripasso, pertanto gli studenti verranno chiamati alla lavagna per dimostrare le conoscenze su tali prerequisiti. Inoltre verranno assegnati esercizi per casa.

OBIETTIVI GENERALI:
- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dal percorso didattico.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI :
- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.

- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI :

Conoscenze:
- circonferenza come luogo di punti
- rappresentazione analitica delle circonferenza in un ben preciso sistema di riferimento cartesiano (equazione canonica, significato dei coefficienti)
- elementi caratterizzanti e proprietà (assi di simmetria, intersezioni con gli assi cartesiani)
- Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza
- Rette tangenti ad una circonferenza

Competenze:
- Saper rappresentare analiticamente la circonferenza: riconoscere dagli aspetti formali dell'equazione le proprietà geometriche del luogo e viceversa
- Saper risolvere analiticamente problemi riguardanti la circonferenza

Capacità:
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi
- saper risolvere problemi di geometria dando un'interpretazione analitica
- saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite in contesti diversi.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per l'apprendimento dei contenuti e per perseguire gli obiettivi esposti si farà uso di lezioni sia frontali che dialogate, con il sussidio del libro di testo e di fotocopie contenenti esercizi svolti e approfondimenti.
Verranno assegnati compiti per casa, cercando di dedicare sempre una parte della lezione alla correzione di questi alla lavagna sia da parte del docente, che da parte dei ragazzi. (I compiti verranno comunque controllati dal docente, per assicurarsi che i ragazzi li svolgano).
Verranno discussi e confrontati in classe gli esercizi e i problemi che hanno creato più difficoltà negli allievi e problemi. Infine si svolgeranno attività di laboratorio informatico utilizzando software didattici come Cabri-géomètre e Derive.

CONTROLLO DELL'APPRENDIMENTO:

La valutazione formativa si esegue tramite semplici verifiche orali, esercitazioni in classe, correzione degli esercizi assegnati per casa e valutazione delle relazioni di laboratorio.
Le verifiche orali e gli esercizi alla lavagna permettono inoltre di valutare l'acquisizione di proprietà di linguaggio degli alunni, e il loro criterio di scelta di una strategia risolutiva. La verifica sommativa, nella quale vengono proposti esercizi simili a quelli esaminati in classe, ma non solo, permette di verificare il livello di assimilazione degli argomenti trattati e l'autonomia nella risoluzione degli esercizi.

STRUMENTI UTILIZZATI:

Libro di testo, lavagna e gessi, calcolatrice scientifica, fotocopie, software didattici come Cabri-géomètre e Derive.

Sviluppo dei contenuti

1.<u>Passo 1</u>: Le coniche nella realtà

Si vuol far comprendere che la matematica, e in particolare la geometria, con le sue forme e regole fa parte della realtà che ci circonda e non è solo un ente astratto come potrebbe sembrare. Quindi gli studi e i nuovi risultati raggiunti in tale campo possono migliorare la nostra vita. Per introdurre l'argomento si potrebbe iniziare a chiedere agli alunni se hanno mai sentito parlare di circonferenza, ellisse, parabola e iperbole e se sono in grado di fornire degli esempi di oggetti che hanno una forma simile. Oppure si potrebbe mostrare loro delle figure come un segnale strale, la pianta di un monumento ellittico, il getto di acqua di una fontana o il profilo delle torri di raffreddamento dell'acqua degli stabilimenti industriali per mostrare loro tali figure geometriche.

Passo 2: Le coniche come sezioni di un cono

E' importante prima di trattare separatamente le coniche come luoghi geometrici introdurle in modo unitario. Trattare direttamente e in modo separato circonferenza, ellisse, parabola ed iperbole potrebbe dare l'idea ai ragazzi che queste quattro figure non abbiano una origine comune. Invece possono tutte essere considerate come intersezione di un cono con un piano.

a) Si può raccontare o fare direttamente l'esperienza di illuminare un muro con una torcia elettrica tenuta perpendicolarmente alla parete: la parte illuminata è all'incirca circolare. Se si inclina sempre di più la torcia verso l'alto il cerchio si deforma e assume una forma allungata: è un'ellisse. Continuando a inclinare la torcia, l'ellisse si allunga sempre di più. La figura così ottenuta è una parabola. Se poi si usa una lampada con paralume di forma conica, aperto da entrambe le parti, l'ombra che proietta sulla parete vicina è una iperbole completa.

b) Si può chiedere ai ragazzi quali conclusione si può trarre: cioè che le figure sono state ottenute come intersezione di un cono (il cono di luce della torcia) e un piano (piano del muro).

c) a questo punto si possono fare i riferimenti storici necessari: una adeguata introduzione storica ed epistemologica infatti potrebbe rappresentare proprio un anello di congiunzione tra i diversi modi di affrontare l'argomento: dalle sezioni coniche di Apollonio ottenute come intersezioni nello spazio di un cono con un piano alla geometria analitica nel piano di Cartesio. Quindi nel corso dei secoli le coniche sono state studiate in modi differenti e il primo approccio a tale argomento è stato di natura puramente sintetica. Si può accennare che sono state scoperte da ***Menecmo*** e che il loro studio fu approfondito e consolidato da ***Apollonio*** conosciuto come il Grande Geometra, nell'opera "Le Coniche" formata da otto libri, nella quale espose la maggior parte delle proprietà tuttora note delle coniche e introdusse i nomi di ellipsis (mancanza), hyperbola (lanciare al di là), parabola (porre accanto o confrontare). Apollonio fu il primo a considerare una superficie conica a due falde e a dimostrare che era possibile ottenere tutte le coniche intersecando una unica superficie conica con un piano e al variare dell'inclinazione di quest'ultimo: per tale motivo vengono dette **sezioni coniche** (o coniche). In particolare se β è l'angolo acuto che il piano forma con l'asse del cono e α è la semiapertura del cono a seconda di come varia l'angolo β otteniamo delle curve diverse

2. La circonferenza come luogo geometrico

Si riprenderà il concetto di luogo geometrico che i ragazzi hanno già incontrato nel biennio; infatti nei programmi PNI del biennio si legge nel tema 1 di geometria del piano e dello spazio al punto 1.1 "figure e loro proprietà". Questo concetto verrà ripreso utilizzando il software Cabri – géomètre che consentirà di ricavare la proprietà caratterizzante della circonferenza: luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso O detto **centro**. La distanza costante di un punto P della circonferenza dal centro è detta **raggio**. (PO = r)

Considerazioni sintetiche: Si faranno delle considerazioni sulla circonferenza da un punto di vista di vista sintetico; per es. che ogni retta passante per il centro della circonferenza è un suo asse di simmetria e il centro è centro di simmetria. Questo perché, nel momento in cui si ricaverà l'equazione canonica, si farà vedere che le stesse conclusioni si possono trarre analizzando tale equazione. Geometria analitica e geometria sintetica sono due vie diverse da utilizzare; ma entrambe portano agli stessi **risultati** e a seconda dei casi è più opportuno e semplice usare l'una o l'altra.

3. Rappresentazione analitica in un ben preciso sistema di riferimento cartesiano (equazione canonica, significato dei coefficienti)

Si inizierà considerando una circonferenza di raggio r e si farà procedere i ragazzi per tentativi nella scelta di un sistema di riferimento. Si giungerà alla scelta di un sistema di riferimento con origine nel centro della circonferenza: esplicitando la proprietà soddisfatta da un punto qualsiasi di coordinate (x,y) e tenendo conto della formula della distanza tra due punti si ottiene

$x^2+y^2=r^2$. Successivamente si considererà un sistema di riferimento rispetto al quale il centro della circonferenza ha coordinate (α,β): in questo caso l'equazione della circonferenza è $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Da questa si ottiene la forma canonica o normale $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Si farà osservare che manca il termine misto e che affinché una equazione di quel tipo sia una circonferenza deve essere $r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}>0$.

4.CONDIZIONE PERCHÉ UN'EQUAZIONE DEL TIPO $x^2+y^2+ax+by+c=0$ RAPPRESENTI UNA CIRCONFERENZA.

Si può far comprendere agli allievi proponendo alcuni esercizi che l'equazione in forma canonica di una circonferenza $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{by}+\boldsymbol{c}=0$:

- ✓ è di secondo grado in x e y
- ✓ contiene sempre i termini x^2 e y^2 con coefficienti uguali a 1
- ✓ manca il termine misto
- ✓ i coefficienti a e b dei termini di primo grado individuano la posizione del centro e possono essere nulli.

5. DALL'EQUAZIONE AL GRAFICO

Per via geometrica (rette parallele all'asse y e secanti la circonferenza) o per via algebrica (assegnare un valore alla x e trovare due valori alla y) ci mostrerà che <u>la circonferenza non è una funzione.</u> Si potrà vedere, invece, che l'equazione $y=\sqrt{1-x^2}$ rappresenta una funzione.

6. Elementi caratterizzanti e proprietà (significato dei coefficienti, assi di simmetria, intersezioni con gli assi cartesiani)

Si propongono agli studenti una serie di domande che sono finalizzate ad acquisire la capacità di analizzare l'equazione data e di riuscire a trarre delle considerazioni opportune. Non solo è importante comprendere che ogni luogo considerato è rappresentato da una equazione, ma anche che quest'ultima ci da informazioni precise ed uniche sul luogo stesso a prescindere dalla figura geometrica.

Gli studenti poco alla volta dovrebbero acquisire, con esercizi mirati, la capacità di "interpretare" una equazione senza cadere nel puro meccanicismo.

Si può far vedere **cosa accade variando i parametri a,b,c** dell'equazione della circonferenza.

Tenendo conto che $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{by}+\boldsymbol{c}=0$ e che $\boldsymbol{C}\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2};-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$ si ottiene:

1. Se a = 0, l'ascissa del centro vale zero e dunque il **centro** della circonferenza **appartiene all'asse y**
2. Se b = 0, l'ordinata del centro vale zero e dunque il **centro** della circonferenza **appartiene all'asse delle x.**

3.Se c = 0, l'origine degli assi soddisfa l'equazione, quindi la **circonferenza passa per questo punto**

4.Se a = 0 $\wedge$ c = 0 **la circonferenza ha il centro sull'asse y e passa per l'origine degli assi**

5.Se b = 0 $\wedge$ c = 0 **la circonferenza ha il centro sull'asse x e passa per l'origine degli assi**

6. Se a = 0 $\wedge$ b = 0 si ritrova la circonferenza che ha il **centro nell'origine degli assi Se anche c = 0 si ritrova la circonferenza degenere nel suo centro.**

Si può inoltre far osservare agli allievi in quale regione del piano è contenuta la circonferenza: mettendo ad intersezione l'equazione $x^2+y^2=r^2$ con gli assi si ottengono quattro punti di intersezione ; inoltre analizzando sempre $x^2 + y^2 = r^2$ segue che $x^2 = r^2 - y^2$, poiché il primo membro è positivo dovrà essere $r^2 - y^2 \geq 0$ cioè $-r \leq y \leq r$. Analogamente per la x. Quindi la circonferenza di raggio r è contenuta in un quadrato di lato 2r.

Simmetrie ha una circonferenza: si farà comprendere che analizzando ancora l'equazione, che contiene i termini in x e y al quadrato le simmetrie saranno quelle rispetto agli assi e rispetto al centro degli assi in accordo con quanto si era stabilito con la geometria elementare.

7. CONDIZIONI NECESSARIE PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

Si vuol mettere in evidenza che sono sempre necessarie tre condizioni per determinare l'equazione corrispondente ad una circonferenza univocamente individuata. Si daranno degli esercizi opportuni per mettere ancora meglio a fuoco il ruolo dei parametri nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e comprendere quali implicazioni possiede il fatto che tali parametri siano esattamente tre.

Dal biennio precedente gli alunni sanno che dati due punti di un piano per essi passano infinite circonferenze, quelle che hanno il centro sull'asse del segmento congiungente i due punti. Mentre per 3 punti non allineati passa una ed una sola circonferenza .

8.POSIZIONI RECIPROCHE RETTA CIRCONFERENZA

Si porrà una domanda agli studenti al fine di riprendere un concetto a loro noto: **Quale posizione può assumere una retta rispetto ad una circonferenza nel piano?** Dalla geometria elementare del primo biennio si sa che una retta rispetto ad una circonferenza è:

-secante se le due curve hanno due punti in comune; **-tangente** se hanno un solo punto d'intersezione; **-esterna** se non hanno punti in comune

Si farà costruire la retta tangente ad una circonferenza con Cabri.

Per risolvere con metodo algebrico il problema si metterà in evidenza che per la circonferenza si può sfruttare la proprietà che tutti i punti hanno la stessa distanza dal centro e la formula della distanza tra un punto ed una retta, oppure mettere a sistema l'equazione della retta con l'equazione della circonferenza. e trovare gli eventuali punti di intersezione.

9.LE RETTE TANGENTI AD UNA CIRCONFERENZA E DETERMINARE LE LORO EQUAZIONI

A questo punto si può considerare il problema di trovare le tangenti condotte da un punto ad una circonferenza. Sia g una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e sia $P(x_0, y_0)$ un punto del piano. Consideriamo gli eventuali punti di intersezione tra le rette del fascio di centro P e la circonferenza data. Si possono presentare tre casi: *P è interno a g :ogni retta condotta per P è secante g, P appartiene a g: esiste una e una sola retta per P e tangente a g; P è esterno a g: è possibile condurre per P due rette tangenti a g;P è esterno a g: è possibile condurre per P due rette tangenti a g.*

A seguire si spiegherà che dato un punto P si considera il fascio proprio di rette per quel punto: tra queste rette si cercano quelle tangenti.

Si possono allora utilizzare due metodi:

1. valido solo per la circonferenza: (ricordando che l'equazione del fascio proprio di rette passanti per il punto $P(x_0, y_0)$ è : $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \Rightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0$ e che la formula della distanza di un punto $P(x_0;y_0)$ da una retta di equazione a'x+b'y+c'=0: $d = \frac{|a'x_0 + b'y_0 + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$) si impone che la distanza tra il centro della circonferenza e la generica retta del fascio sia proprio uguale al raggio.

-II: si mette ad intersezione la generica retta del fascio con l'equazione della circonferenza ottenendo una equazione risolvente di II grado il cui Δ si pone, per la condizione di tangenza, uguale a 0 ricavando i valori di m da sostituire nel fascio ($\begin{cases} y = y_0 + m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$).

10. **POSIZIONE RECIPROCA DI DUE CIRCONFERENZE**

Sarebbe opportuno prima di affrontare l'argomento da un punto di vista analitico riprendere ciò che si è studiato nel biennio e quindi studiare la posizione reciproca di due circonferenze in funzione della distanza d dei loro centri. (si prenderanno in considerazione cinque casi possibili: se $d(C,C')<r+r'$, allora le circonferenze sono secanti; se $d(C,C')=r+r'$, allora le circonferenze sono tangenti esternamente; se $d(C,C')>r+r'$, allora le circonferenze sono esterne (non hanno nessun punto di contatto); se $d(C,C')=r-r'$, allora le circonferenze sono tangenti internamente; se $d(C,C')<r-r'$, allora le due circonferenze sono interne l'una all'altra). Successivamente si farà vedere come tradurre questo problema geometrico in problema analitico: basterà calcolare la distanza fra i due centri e stabilire quale relazione esiste con i raggi. **E' importante sottolineare che abbiamo tradotto in un certo senso un problema geometrico in uno analitico. Ricordiamo che l'argomento viene svolto dopo aver trattato la circonferenza, quindi i ragazzi si trovano nella fase di apprendere il concetto di geometria analitica.**

ASSE RADICALE E SUE PROPRIETÀ

a) Si sceglierà di proporre ai ragazzi un esercizio in cui bisogna determinare la posizione di due circonferenze che hanno un punto o due punti in comune: **come determinare le coordinate di questi due punti?** Si riprenderanno dunque i sistemi: risolvere il sistema costituito dalle equazioni delle due circonferenze significa determinare gli eventuali punti di intersezione.

(Si passerà da un sistema di quarto grado ad uno di secondo per mezzo del metodo di riduzione; si ottiene in particolare una equazione in x e y che rappresenta una retta chiamata **asse radicale** delle due circonferenze. Si possono verificare tre casi: le circonferenze sono secanti e l'asse radicale passa per questi due punti; le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti; le circonferenze sono tangenti e l'asse radicale passa per quel punto (anzi è tangente alle due circonferenze in quel punto); i l sistema non ha soluzioni e le circonferenze non hanno nessun punto di contatto).

Osservazione: si può far notare analizzando il sistema studiato che la ricerca dei punti di intersezione dei due circonferenze, può essere ricondotta a quella dell'intersezione tra una circonferenza e una retta.

b) Utilizzando il software *Cabri* mediante lo strumento Retta perpendicolare si potrà far vedere che **l'asse radicale è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze.** Si potranno poi fare a tal proposito sia delle considerazioni sia di tipo geometrico, che di tipo analitico calcolando il coefficiente angolare di tale retta.

FASCI DI CIRCONFERENZE

Sarà opportuno riprendere il concetto di fascio di rette dato come combinazione lineare di due rette. Analogamente date le equazioni di due circonferenze se ne definirà il fascio come combinazione lineare delle due. Si metterà in evidenza che anche il fascio di circonferenze generato da due generatrici è costituito da un numero infinito di circonferenze. (si faranno vedere i due modi di esprimere un fascio di circonferenze: $p(x^2+y^2-6x-2y-10)+q(x^2+y^2-8y-10)=0$ da cui si possono ottenere entrambe le circonferenze generatrici oppure, poiché p e q non sono entrambi nulli, supposto per esempio $p \neq 0$, si divide per p, ottenendo un'equazione con un solo parametro, $k=\frac{q}{p}$:

$(x^2+y^2-6x-2y-10)+k(x^2+y^2-8y-10)=0$ da cui però non si ottiene la circonferenza che si otterrebbe con $q=0$)

<u>Passo 4</u>: Asse radicale e asse centrale del fascio

Si farà osservare che considerate due circonferenze C e C', dato il fascio di equazione $(x^2+y^2+ax+by+c)+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ con $k \in \Re$ per $k=-1$ otteniamo l'equazione

$$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

Si può proporre agli allievi un'attività di laboratorio con Derive rappresentare il fascio di circonferenze di equazione $x^2+y^2+hx-(h+1)y-1=0$, facendo variare *h* per esempio da –3 a 3 (utilizzando il comando *vector*). Si farà notare agli allievi che tutte le circonferenze reali del fascio passano per due punti, che si chiamano *punti base* del fascio e che i centri delle circonferenze sono allineati.

COLLEGAMENTI INTERDISCIPLINARI

E' importante sottolineare tutti i collegamenti interdisciplinari che possono essere fatti e non darli per scontato perché non è detto che gli allievi siano in grado di farlo da soli.

Il moto circolare uniforme, moto di un corpo che avviene su una traiettoria circolare (una circonferenza) con velocità (in modulo, intensità) costante, precisando appunto che ad essere costante, in questo moto, è l'**intensità** della velocità mentre la direzione cambia continuamente. Ed è proprio questo il motivo per cui il moto circolare uniforme è un moto accelerato.

Il modello atomico di Rutherford, la cui struttura è paragonata ad un sistema di pianeti (modello planetario), prevedeva che gli elettroni orbitassero intorno al nucleo come i pianeti intorno al sole. Successivamente Bohr sostenne che il modello atomico planetario si scontrasse con alcune delle leggi della fisica scoperte fino a quel momento, infatti secondo queste gli elettroni sarebbero dovuti cadere sul nucleo in un tempo molto breve.
Nel 1913 propose il suo modello atomico secondo il quale gli elettroni possono orbitare soltanto su orbite circolari ben definite attorno al nucleo e che quando un elettrone si trova su queste orbite possiede una certa energia e il fatto che vi rimanga indica che questo sia stabile.

Verifica sommativa

Si potrebbero proporre esercizi del tipo:

1. Scrivi la forma generale dell'equazione di una circonferenza che ha le caratteristiche indicate di seguito:
   a) passa per l'origine del sistema di riferimento
   b) ha centro nell'origine
   c) ha centro sull'asse delle ascisse
   d) ha centro sull'asse y e passa per l'origine

2. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro C e raggio assegnati:
   a) C(0;0) r=3
   b) C(-1;-1) r=4

3. Data la circonferenza $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=16$ determinare le rette tangenti passanti per i punto $A(0,5)$

4. Determinare i punti di intersezione della retta $x + 2y - 4 = 0$ con la circonferenza di centro C(2,1) e raggio $\sqrt{5}$.

5. Dopo aver scritto l'equazione della circonferenza Γ passante per il punto P(1;3) e tangente alla retta y=2 nel suo punto di ascissa 4 e aver indicato con H il suo centro, determina:

a) le sue intersezioni A e B con l'asse y ($y_A<y_B$)
b) la retta tangente a Γ in A
c) la circonferenza Γ' avente centro nel punto D(8;-5/2) e tangente a t in un punto Q