I NUMERI COMPLESSI

DESTINATARI

Allievi della classe IV di un liceo scientifico ad indirizzo PNI come consigliato nella **Circolare Ministeriale n. 615 del 27 settembre 1996** dove l'argomento trattato in questa unità didattica è il **punto 2.f** – *I numeri complessi e loro rappresentazione grafica; radici ennesime dell'unità* - del **Tema n. 2** –*Insiemi numerici e strutture*; lo svolgimento dell'attività, inizierà nel secondo quadrimestre. Le ore settimanali di matematica previste per tale indirizzo sono 5.

PREREQUISITI

- Conoscenza della struttura dell'insieme dei numeri reali **R**.
- Saper scomporre in fattori un polinomio.
- Conoscenza delle operazioni con i radicali semplici e saperli utilizzare.
- Conoscenza delle funzioni goniometriche, esponenziali e logaritmiche e le loro proprietà.
- Conoscenza dei vettori (modulo, somma, prodotto per uno scalare).
- Saper risolvere equazioni in **R**.
- Uso del software *Derive.*

OBIETTIVI GENERALI

- Acquisire le conoscenze, le competenze e le capacità previste dall'unità didattica.
- Acquisire consapevolezza dell'utilità logica delle proprietà degli argomenti trattati.
- Condurre all'uso del lessico e del formalismo grafico appropriato.
- Imparare ad operare con la simbologia opportuna.
- Sviluppare la capacità di utilizzare metodi, strumenti e modelli matematici in situazioni diverse.
- Contribuire a rendere gli studenti in grado di affrontare situazioni problematiche di varia natura avvalendosi dei modelli matematici più adatti alla loro rappresentazione.
- Sviluppare l'interesse per gli aspetti storico-epistemologici della matematica.
- L'uso di software, servirà ad abituare l'allievo ad operare consapevolmente all'interno di diversi sistemi, dotati di loro regole formali e limiti operativi.

OBIETTIVI TRASVERSALI:

- Sviluppare attitudine alla comunicazione ed ai rapporti interpersonali, favorendo lo scambio di opinione tra il docente e allievo e tra gli allievi stessi.
- Proseguire ed ampliare il processo di preparazione scientifica e culturale degli studenti.
- Contribuire a sviluppare lo spirito critico e l'attitudine a riesaminare criticamente ed a sistemare logicamente le conoscenze acquisite.
- Contribuire a sviluppare capacità logiche e argomentative.
- Imparare a rispettare i tempi di consegna dei lavori da svolgere.

OBIETTIVI SPECIFICI

<u>Conoscenze</u>

- ♦ Conoscere il lato storico dell'argomento trattato.
- ♦ Conoscere il piano complesso.
- ♦ Conoscere e saper rappresentare le operazioni fra numeri complessi.
- ♦ Conoscere i numeri immaginari.
- ♦ Conoscere la rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
- ♦ Conoscere la formula di De Moivre.

- ♦ Conoscere le radici *n*-esime di un numero complesso.
- ♦ Conoscere l’esponenziale del complesso.
- ♦ Svolgere esperienze interessanti con il software *Derive* a sostegno, chiarimento, dei concetti relativi e degli esercizi proposti nel testo.

Competenze

- ♦ Saper rappresentare un numero complesso.
- ♦ Saper svolgere operazioni con i numeri complessi.
- ♦ Saper rappresentare un numero complesso in forma trigonometrica.
- ♦ Saper applicare le operazioni di addizione, prodotto e quoziente ai numeri complessi in forma trigonometrica.
- ♦ Saper calcolare la potenza e la radice ennesima di un numero complesso.

Capacità

- ♦ Saper utilizzare le conoscenze e le competenze acquisite per risolvere problemi.
- ♦ Applicare le conoscenze e le competenze acquisite in un contesto interdisciplinare.

CONTENUTI

- Breve storia dei numeri complessi.
- Forma algebrica dei numeri complessi.
- Operazioni con i numeri complessi.
- Rappresentazione geometrica dei numeri complessi.
- Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
- Forma esponenziale di un numero complesso.
- Risoluzione di equazioni algebriche nel campo complesso. Teorema fondamentale dell’algebra.

TEMPI DELL’INTERVENTO DIDATTICO

8 ore di lezioni frontali e svolgimento di esercizi, 2 ore di attività di laboratorio, 2 ore per la verifica sommativa per un totale di 12 ore di lezione che, tenuto conto delle 5 ore settimanali di matematica, equivalgono a circa tre settimane di lavoro.

METODOLOGIE DIDATTICHE

Per svolgere gli argomenti di questa unità didattica si farà uso di lezioni frontali per introdurre i concetti nuovi e svolgere gli esercizi più significativi e di lezioni dialogiche per il consolidamento delle nozioni apprese e lo svolgimento di ulteriori esercizi. Questo tipo di lezione permette da una parte un maggior coinvolgimento degli alunni, che così partecipano attivamente alla lezione e dall’altra permette all’insegnante di valutare in itinere il grado di apprendimento della classe. Inoltre per favorire l’intervento attivo dell’allievo nel proprio processo di apprendimento, si svolgerà un’ora di laboratorio di informatica. Ogni nuovo concetto sarà introdotto in modo euristico: si partirà da esempi e da problemi concreti e si introdurrà un nuovo modo di risolvere problemi. Si assegneranno inoltre agli studenti esercizi per casa, che serviranno ad acquisire familiarità con i nuovi concetti e le nuove metodologie e a verificare l’effettiva comprensione. Saranno poi discussi in classe gli eventuali esercizi che avranno creato maggiori difficoltà agli allievi.

SVILUPPO DEI CONTENUTI

1 PASSO: INTRODUZIONE AI NUMERI COMPLESSI

I primi che trattarono la questione dei numeri complessi furono i matematici greci. La domanda che si posero era :

"esiste un numero che moltiplicato per se stesso dà -1 ?"

Non fu difficile per essi decidere che un numero del genere non esisteva, dato che il quadrato di una qualsiasi quantità deve essere sempre positiva. D'altro canto li sconcertava il fatto di avere equazioni che avevano soluzioni soltanto se si ammetteva la possibilità di estrarre la radice quadrata di -1. Diofanto, matematico greco del II sec., fu uno dei primi matematici a riconoscere che l'insieme dei numeri reali è, in un certo senso, incompleto. Egli tentò di risolvere il problema, ragionevole in apparenza, di determinare i lati di un triangolo rettangolo avente perimetro 12 e area 7. Il problema porta all'equazione (scritta in termini moderni):

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

in cui x rappresenta la lunghezza di un lato del triangolo. Le soluzioni di questa equazione contengono la radice quadrata di -1. Diofanto chiuse il problema dichiarandolo impossibile.
Nel XVI secolo la questione riprese vigore. Alcuni algebristi italiani (Bombelli, Tartaglia, Cardano), notando che gli algoritmi risolutivi delle equazioni di 3° e 4° grado comportavano, a volte, la radice quadrata di quantità negative, risolsero la questione inventando un nuovo numero, il numero **i** , l'*unità immaginaria*.

Perché i complessi?

Si parte da un problema, insolubile in **R** quello della risoluzione di certe equazioni di grado superiore al primo. Un esempio è l'equazione $x^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni, pur essendo molto simile all'equazione $x^2 - 1 = 0$, che invece ha due soluzioni. E' abbastanza "fastidioso" che certe equazioni abbiano un numero di soluzioni distinte pari al loro grado, mentre altre, anche non molto diverse, non abbiano alcuna soluzione, o abbiano meno soluzioni di quanto sia il loro grado. La cosa non è limitata alle equazioni di secondo grado. Dobbiamo quindi ampliare l'insieme dei reali introducendo un nuovo insieme di numeri, l'insieme dei "numeri complessi".
Due sono i modi possibili per introdurre questo nuovo insieme agli studenti:

MODO PIÙ INFORMALE: Si parte dalla cosiddetta forma algebrica del numero complesso introducendo un nuovo simbolo, che indichiamo con *i*, t. c.

$$i^2 = -1 \qquad [1\text{-}1]$$

per poi introdurre solo in un secondo momento il numero complesso come coppia di reali.
Nota didattica. La [1-1] è il risultato che più incuriosisce gli allievi: si è definito un numero il cui quadrato è negativo, contro la loro quasi innata convinzione che non possano esistere (né in **R,** né in nessun altro insieme numerico) numeri il cui quadrato sia negativo.

IN MODO PIÙ FORMALE, un numero complesso dovrebbe essere definito come una coppia ordinata di numeri reali (*a,b*). Con tale scrittura, più astratta, occorre dare la definizione di uguaglianza tra due numeri complessi e introdurre l'unità immaginaria *i*, identificandola con la coppia (0,1).
E' utile definire a questo punto anche il numero complesso ***coniugato*** di un numero: $z = a + ib$ come quel numero complesso che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta: $\bar{z} = a - ib$. Dato $z = a + ib$ il modulo (o norma) di z è il numero reale $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si definiscono poi le operazioni di addizione e moltiplicazione. Si riportano sinteticamente queste definizioni e le loro proprietà.

Addizione (legge di composizione interna a C):

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.

- Esiste l'elemento neutro $(0+i0)$ che si può indicare con il simbolo 0.
- Ogni elemento $z=a+ib$ ammette in **C** un "simmetrico" rispetto all'addizione $(-z=-a-ib)$ che si chiama *opposto* di a + ib.

Moltiplicazione (legge di composizione interna a C):

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

Questa operazione ha le seguenti proprietà:
- Associativa e commutativa.
- Esiste l'elemento neutro $(1+i0)$ che si può indicare con il simbolo 1.
- Ogni elemento $z=a+ib$, con a e b non contemporaneamente nulli, ammette in **C** un "simmetrico" rispetto alla moltiplicazione, che si chiama reciproco di $a+ib$, data da:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Tra addizione e moltiplicazione esiste "una regola di convivenza", ovvero la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*:

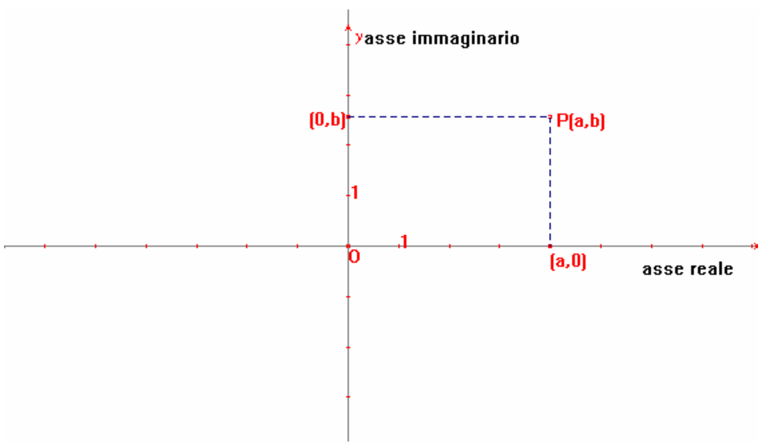
$$(u+v)\cdot z=u\cdot z+v\cdot z.$$

Con queste operazioni e proprietà l'insieme **C** si dice essere un *campo*.
La sottrazione in **C** è introdotta grazie alla presenza dell'opposto di un numero complesso, ma si tratterà di un'operazione poco interessante; la vera operazione è l'addizione. Analogo discorso per la divisione in **C**. La divisione in **C** è introdotta grazie alla presenza del reciproco di un numero complesso (non nullo). La scrittura $\frac{a+ib}{c+id}$ (con c e d non entrambi nulli) indicherà il seguente prodotto: $(a+ib)\cdot\frac{1}{c+id}$.

2 PASSO: RAPPRESENTAZIONI DI UN NUMERO COMPLESSO
I numeri complessi possono essere rappresentati geometricamente o mediante punti di un piano o mediante vettori. Il docente in questa fase illustra questi due tipi di rappresentazione.

- **Rappresentazione geometrica dei numeri complessi nel piano complesso**

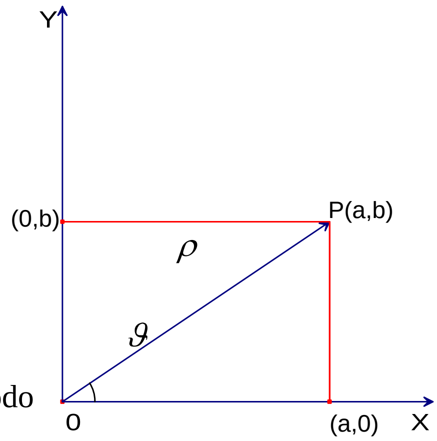
Fissati un sistema di riferimento xOy e un numero complesso $z=a+ib$, i numeri reali a,b si possono interpretare come coordinate cartesiane di un punto P del piano. Viene così stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi. Il piano ottenuto si chiama di **Argand-Gauss** o semplicemente piano di **Gauss.**



- **Rappresentazione di un numero complesso in forma trigonometrica**

Sia $z = a + ib$ un numero complesso e $P(a,b)$ il punto corrispondente nel piano cartesiano *x0y*. La posizione del punto *P* può essere individuata anche mediante le sue coordinate polari (ρ, ϑ), riferite al polo e all'asse polare *x*, dove,

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



z può essere scritto nel modo seguente:

$$z = a + ib = \rho\cos\vartheta + \rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

detta **rappresentazione trigonometrica** di *z*, con ρ = |z| e α uguale all'angolo individuato dal vettore (a, b).

<u>Osservazione didattica</u>. Successivamente il docente fa osservare che la forma trigonometrica presenta un notevole vantaggio quando sui numeri complessi si devono eseguire le operazioni di moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice *n*-esima.

Prodotto

Siano

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i sen\vartheta_1), \qquad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i sen\vartheta_1),$$

due numeri complessi rappresentati in forma trigonometrica. Si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)].$$

Si vede dunque che **il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti**.

Quoziente

Siano

$$z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) \qquad z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) \qquad z_2 \neq 0$$

si ha:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i sen(\vartheta_1 - \vartheta_2)].$$

Perciò il **quoziente di due numeri complessi** z_1 **e** z_2**, se** $z \neq 0$, **è un numero complesso che ha come modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.**

Potenza n-esima di un numero complesso

Sia $z = \rho(\cos \vartheta + isen\, \vartheta)$ un numero complesso. Si dimostra per induzione che la sua potenza ennesima è data da :

$$z^n = \rho^n (\cos n\vartheta + isen\, \vartheta)$$

relazione che prende il nome di **formula di Moivre**.

Radici n-esime di un numero complesso (in particolare si mostreranno le radici ennesime dell'unità):

Sia $z = \rho(\cos\vartheta + isen\vartheta)$, allora le radici ennesime di *k* sono date dalla formula seguente, al variare di *k* da 0 a *n* - 1:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + isen\, \frac{\vartheta + 2k\pi}{n})\ \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

poiché tutti i valori dati dalla suddetta formula hanno lo stesso modulo, graficamente essi sono situati sulla circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e inoltre si dispongono secondo i vertici di un poligono regolare di n lati.

Osservazione didattica. La forma esponenziale dei numeri complessi è una delle rappresentazioni più interessanti dal punto di vista applicativo, ma non semplice da introdurre nella scuola secondaria superiore.
La rappresentazione è basata sulla seguente definizione (ricavata dallo sviluppo in serie delle funzioni seno e coseno) valida per un numero complesso di modulo unitario:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Generalizzando si definisce:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Queste idee e notazioni sono state introdotte da Eulero (1707 – 1783).

3 PASSO: EQUAZIONI NEL CAMPO COMPLESSO
EQUAZIONI ALGEBRICHE

In **R** esistono equazioni algebriche di secondo grado che non ammettono nessuna soluzione reale e un'equazione algebrica di grado *n* ha *al più n* radici (distinte o meno), mentre in **C** *tutte* le equazioni algebriche di grado *n* ammettono n radici.
In generale vale il seguente teorema:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio di grado *n* in **C** ha n radici (ognuna contata con la propria molteplicità).
Equivalentemente si dice che **C** è un campo algebricamente chiuso.

(Ho riportato anche la fase 4 ma non la scriverei all'esame)

4 PASSO: APPLICAZIONI

I numeri complessi con *Derive*: Il software che maggiormente si presta, nella scuola secondaria superiore, per lo studio dei numeri complessi, è *Derive*. Questo software, possiede già tutte le funzioni predefinite sui numeri complessi e permette facilmente al docente di presentare in classe questo argomento e agli studenti di esercitarsi, con indubbi vantaggi sul piano dell'apprendimento.
Le funzioni riguardanti i numeri complessi presenti in *Derive* sono le seguenti:
RE(z): è la funzione *parte reale* di un numero complesso. Se *x* e *y* sono reali, RE(*x* + *iy*) ritorna *x*.

IM(z): è la funzione *parte immaginaria* di un numero complesso. Se *x* e *y* sono reali, IM(*x* + *iy*) ritorna *y*.

ABS(z): indica il modulo di un numero complesso z. Ritorna il valore assoluto (detto anche ampiezza o modulo). Il valore assoluto di *z* è la distanza tra z e l'origine del piano complesso. Un valore assoluto può essere inserito mediante due barre verticali che delimitano l'argomento. Se *x* e *y* sono reali $|x + i \cdot y|$ si semplifica $\sqrt{x^2 + y^2}$.

PHASE(Z): restituisce l'argomento, misurato dal semiasse positivo delle *x* in verso antiorario e con la limitazione all'intervallo $]-\pi, \pi[$, di un numero complesso *z*.

CONJ(z): restituisce il coniugato di un numero complesso *z*. Se *x* e *y* sono reali, CONJ(x+iy) ritorna *x* - *iy*.