Titolo: Limite di una successione.

Specializzanda: Serena Bezzan

Classe destinataria:

L'unità didattica è rivolta ad una classe quarta di un Liceo Scientifico ad indirizzo PNI .
In realtà, i limiti vengono sempre affrontati in classe quinta.

Inquadramento nei programmi ministeriali:

I ***programmi PNI*** prevedono:

- TEMA 7: "Analisi infinitesimale"
  7a. **Limite di una successione numerica.** Questa unità didattica è prevista in **classe quarta**.

Prerequisiti

- Operazioni, ordinamento e loro proprietà nell'insieme dei numeri naturali e interi
- Funzioni reali
- Funzioni monotone
- Equazioni di primo e di secondo grado
- Funzione esponenziale
- Successioni
- Progressioni aritmetiche
- Progressioni geometriche

Obiettivi specifici

Obiettivi specifici

Conoscenze

- ♦ Conoscere la definizione di successione convergente, divergente e indeterminata
- ♦ Conoscere il teorema dell'unicità del limite e il teorema del confronto
- ♦ Conoscere le definizioni delle successioni somma, differenza, prodotto e quoziente
- ♦ Conoscere la definizione di successione monotona
- ♦ Conoscere il principio delle successioni monotone
- ♦ Conoscere la definizione di *e* (numero di Nepero) e di π (pi greco).

Abilità

- ♦ Saper distinguere una successione convergente, divergente o indeterminata
- ♦ Saper dimostrare i teoremi dell'unicità del limite e del confronto
- ♦ Saper calcolare il limite delle successioni somma, differenza, prodotto, quoziente
- ♦ Saper calcolare i limiti delle successioni aritmetiche e geometriche
- ♦ Saper calcolare il limite di una successione monotona
- ♦ Saper verificare il limite di una successione
- ♦ Saper calcolare il limite, se esiste, delle progressioni aritmetiche e geometriche
- ♦ Saper applicare il principio delle successioni monotone per definire nuovi numeri

Tempi previsti per l'intervento didattico

• Accertamento dei prerequisiti	1h
• Limite finito	3h
• Limite infinito	2h e 30 min
• Limiti delle progressioni aritmetiche e geometriche	1h

• Successioni monotone	1h e 30min
• Numero di Nepero	1h
• Verifica sommativi	1h
• Correzione e consegna della verifica sommativi	1h

Per un totale di 12h .
La previsione è da ritenersi elastica, in quanto si deve tenere conto delle necessità degli studenti.

Metodologia didattica e strumenti

- Le lezioni sono condotte seguendo una metodologia mista di tipo frontale e di tipo interattivo, cioè caratterizzata da un'impostazione in chiave problematica o in forma dialogica con il gruppo classe intorno a quesiti o problemi proposti dal docente.
- Oltre al momento verbale, per gli allievi sono previste, in classe, attività e/o esercitazioni guidate sia di gruppo sia individuali.
- Durante il corso delle lezioni vengono programmate interrogazioni orali aventi carattere formativo, alle quali gli allievi prendono parte o stando al posto o venendo alla lavagna.
- L'unità didattica prevede una verifica sommativa scritta sugli argomenti affrontati, che impegna la classe per la durata di due ore**.**

Strumenti utilizzati:

- Libro di testo
- Lavagna e gessi
- Calcolatrice scientifica
- Riga
- Fotocopie
- Software didattici come Derive ed Excel.

Controllo dell'apprendimento:
Il controllo dell'apprendimento sarà effettuato mediante *verifiche formative* e *verifica sommativa*.
Le *verifiche formative* consistono nel controllo degli esercizi assegnati per casa, la correzione alla lavagna degli stessi, effettuato dagli allievi, la discussione in classe dei problemi incontrati nello svolgimento degli esercizi e nello studio della teoria, qualche domanda durante le lezioni, lo svolgimento di qualche esercizio alla lavagna.
Le *verifiche sommative* consistono in prove orali e prove scritte.
Le *prove orali* serviranno al docente per valutare non solo la teoria appresa dai ragazzi, ma verrà chiesto anche lo svolgimento di qualche esercizio e verranno fatte domande riguardanti le attività di laboratorio.
La *prova scritta*, della durata di due ore, sarà svolta al termine dell'unità didattica e ha soprattutto il compito di valutare le abilità e permetterà di verificare l'autonomia dello studente nell'utilizzo degli strumenti forniti.

Contenuti

1. **Successioni convergenti, divergenti ed indeterminate**
   - **Limite finito delle successioni**
   - **Limite infinito**
   - **Successioni indeterminate**
2. **Limiti delle progressioni**
   - **Progressioni aritmetiche**
   - **Progressioni geometriche**
3. **Limiti delle successioni monotone**
   - **Successioni monotone**
4. **Il numero di Nepero**

Considerazioni Didattiche (sui contenuti, approfondimenti e attività eventuali di laboratorio)

1) SUCCESSIONI CONVERGENTI, DIVERGENTI E INDETERMINATE

Limite finito delle successioni

Per introdurre l'argomento si parte da un esempio semplice, impostando una lezione dialogica. Chiediamo agli studenti di provare a descrivere l' "andamento" della successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$; tali valori mostrano un comportamento disordinato oppure si avvicinano sempre di più ad un particolare valore?

Consideriamo un altro esempio: il numero decimale periodico $8,\overline{3}$ ha come frazione generatrice $\frac{25}{3}$. I valori di tale numero, troncati all'ennesima cifra decimale, costituiscono una successione i cui elementi sono $8 \quad 8,3 \quad 8,33 \quad 8,333 \quad \ldots\ldots$, cioè $a_n = 8,33...3$, con *n* cifre decimali.

Sappiamo che gli elementi di tale successione sono approssimazioni per difetto di $\frac{25}{3}$, e che tali approssimazioni si avvicinano sempre più al crescere di *n* al valore esatto.

Ciò si esprime dicendo che, **al tendere di *n* a $+\infty$, a_n tende a $\frac{25}{3}$** oppure dicendo che **la successione ha per limite $\frac{25}{3}$**.

Man mano che procediamo nella successione, nessuno dei termini assume effettivamente il valore $\frac{25}{3}$, ma se si va *abbastanza lontano*, si può essere sicuri che ciascuno dei termini differirà da $\frac{25}{3}$ *tanto poco quanto si vuole*. In termini matematici ciò significa che le distanze dei termini a_n da $\frac{25}{3}$ possono essere rese più piccole di qualunque numero positivo prefissato, a condizione di considerare valori di n abbastanza grandi.

Si arriva quindi alla definizione formale di limite di una successione:

Si dice che una successione $\{a_n\}$ ammette il limite *l* e si scrive:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

se, fissato comunque un numero positivo ε, esiste in corrispondenza di esso un $n_\varepsilon \in N$ tale che, per tutti i termini a_n con $n > n_\varepsilon$, sia verificata la disuguaglianza:

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Se tale limite esiste ed è finito, la successione si dice **convergente.**

Tale definizione può essere <u>interpretata geometricamente</u>, sia su una retta che nel piano cartesiano: per quanto piccolo sia il numero ε, i termini della successione con indice maggiore di n_ε cadono tutti nell'intervallo $(l-\varepsilon\ ;\ l+\varepsilon)$.

Limite infinito

Consideriamo la successione $a_n = n^2$, i cui primi termini sono 0, 1, 4, 9, 16, 25, ….. Osserviamo che essi diventano sempre più grandi, tali che, comunque si scelga un numero grande *k,* i termini della successione diventano, a partire da un certo indice, *tutti* maggiori di *k*.

In generale si dirà che una successione tende all'infinito quando i suoi termini diventano *definitivamente* maggiori di qualunque numero *k*>0, per quanto grande esso possa essere.

Si dice che una successione $\{a_n\}$ **diverge positivamente** e si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

se, fissato comunque un numero positivo *k*, esiste in corrispondenza di esso un $n_k \in N$ tale che, per tutti i termini a_n con $n > n_k$, sia verificata la disuguaglianza:

$$a_n > k$$

Anche in questo caso la definizione si può interpretatare geometricamente. Sul piano cartesiano, i termini con indice maggiore di n_k saranno tutti più in alto della retta $y = k$.

- Si lascia per esercizio agli studenti la definizione di successione che diverge negativamente.
- Le successioni convergenti e divergenti sono dette anche **successioni regolari.**

Osservazione:
Una successione diverge positivamente se e solo se la successione formata da tutti termini opposti diverge negativamente.

Successioni indeterminate
Per quanto riguarda il comportamento delle successioni, esiste infine una terza possibilità; ad esempio, la successione oscillante $1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$, non ha limite all'infinito. Le successioni che non sono né convergenti né divergenti si dicono **indeterminate**.

A questo punto dell'unità si decide di non presentare i teoremi sui limiti delle successioni, che verranno affrontati nella forma più generale nella parte dei limiti delle funzioni.
Ciò su cui invece vogliamo focalizzare la nostra attenzione riguarda lo studio dei limiti delle progressioni trattate nella prima unità del percorso didattico, e dei limiti delle successioni monotone.

2) LIMITI DELLE PROGRESSIONI

Progressioni aritmetiche
Sia $\{a_n\}$ una progressione aritmetica di ragione *d*. Ricordiamo che $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Consideriamo i tre seguenti casi:

- Se *d=0*, risulta per ogni *n:* $a_n = a_1$, e dunque $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_1$.
  In questo caso la successione è quindi convergente
- Se *d>0*, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 + (n-1)d\right] = +\infty$ e dunque la successione è divergente positivamente
- Se *d<0*, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 + (n-1)d\right] = -\infty$ e dunque la successione è divergente negativamente

Progressioni geometriche
Sia $\{a_n\}$ una progressione geometrica di ragione *q*. Vale allora $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$. Ricordiamo che, in base alla definizione data, né la ragione, né i termini della progressione possono essere nulli.
Possiamo distinguere diverse situazioni:

- Se $q>1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 \cdot q^{(n-1)}\right] = \infty$ poiché la base della funzione esponenziale è maggiore di 1 e dunque la successione è divergente
- Se $q=1$, la successione è costante e dunque converge ad a_1
- Se $q<1$, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 \cdot |q|^{(n-1)}\right] = 0$ poiché la base della funzione esponenziale è minore di 1 e dunque la successione è convergente a 0
- Se $q \le -1$, la successione è indeterminata, poiché a segni alterni e tale che ognuna delle due sottosuccessioni formata dai termini dello stesso segno cresce in valore assoluto. Sarà utile in questo caso un esempio concreto.

3) LIMITI DELLE SUCCESSIONI MONOTONE

Successioni monotone

Nella definizione generale di limite di una successione non si richiede che una successione convergente $a_1,\ a_2,\ a_3,\ .....$ tenda al suo limite *l* in un modo particolare.
Il più semplice tipo di successione convergente è rappresentato dalle successioni monotone, in cui ogni termine è $\le$ oppure $\ge$ del precedente.
Per definire le successioni monotone (crescenti, non decrescenti, decrescenti, non crescenti) si estende la terminologia delle funzioni monotone.

In contrapposizione alle successioni monotone vi sono le successioni convergenti che oscillano; ad esempio, la successione $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ ....$ converge al suo limite 0 da entrambi i lati.
Il comportamento di una successione monotona è particolarmente facile da determinare. Infatti una successione di questo tipo può non avere un limite e aumentare o diminuire indefinitamente, come la successione dei numeri naturali; in questo caso la successione tende all'infinito.
Se però i termini di una successione monotona crescente rimangono limitati, cioè se esiste una costante nota *M* tale che ogni termine della successione è minore di *M*, allora è intuitivamente chiaro che essa deve tendere ad un certo limite che sarà minore o al massimo uguale a *M*.
Vale dunque il principio delle successioni monotone:
una successione monotona crescente e limitata superiormente deve convergere ad un limite.

Una formulazione analoga vale per le successioni decrescenti e limitate inferiormente.

Osservazione 1:
Questo teorema non fornisce un metodo per determinare il limite della successione, ma permette di affermare l'*esistenza* del limite, senza doverne conoscere il valore esatto.

Osservazione 2:
Il teorema dipende dall'introduzione dei numeri irrazionali e quindi dalla continuità dei reali; nei numeri razionali è infatti possibile costruire una successione crescente e limitata, convergente a $\sqrt{2}$. Poiché quest'ultimo non è un numero razionale, la successione precedente non converge ad alcun limite in *Q*.

Osservazione 3:
Questo teorema è di notevole importanza poiché alcuni numeri sono definiti soltanto come limiti di successioni monotone limitate. Rientra in questa classe il numero *e* di Nepero.

4) IL NUMERO e DI NEPERO

Il numero *e*, insieme con il numero π di Archimede, ha un posto ben definito nella matematica, fin dalla pubblicazione nel 1748 dell'Introductio in analysin infinitorum da parte di Eulero. Il numero *e* è irrazionale, il suo valore approssimato alla sesta cifra decimale è 2,718281… ed è la base dei logaritmi naturali.
In alcuni testi la successione dalla quale si definisce il numero di Nepero è:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \in N_0$$

Il numero di Nepero è anche definito come limite della successione:

$$a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+........+\frac{1}{n!}$$

cioè $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+........+\frac{1}{n!}\right)$

usando la notazione $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot .....\cdot n$.

Verifica sommativa

1. Delle seguenti successioni, stabilire quali sono superiormente limitate e quali sono inferiormente limitate:

   $$a_n = \frac{n}{n+2}$$

   $$a_n = \sqrt{1+n^2}$$

   [4]

2. Delle seguenti successioni, stabilire quali sono crescenti e quali decrescenti:

   $$a_n = \frac{n^2+1}{n}$$

   $$a_n = e^{\frac{1}{n}}$$

   [4]

3. Applicando la definizione, verificare i seguenti limiti:

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n}{n} = -2$$

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-n\right) = -\infty$$

   [6]

4. Calcolare il più piccolo intero *n* che verifica la disuguaglianza $\sqrt{n^2+1}+n>10$.

   [3]

5. Stabilire se le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche o geometriche, ed in ogni caso calcolarne il limite:

   □ $\{4+n\}$ □ $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ □ $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ □ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}$ [8]

6. Sia $\{u_n\}$ la successione così definita in □ $_0$:

$$u_1 = -3; \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6; \qquad n \geq 1.$$

Calcolare u_2, u_3, u_4.

Sia poi $\{v_n\}$ la successione così definita in $\mathbb{N}_0$: $v_n = u_n + 18$

Dimostrare che $\{v_n\}$ è una successione geometrica, esprimere v_n in funzione di *n*, poi u_n in funzione di *n*. [6]

Griglia di misurazione

Griglia di Misurazione

Punteggio Grezzo (Totale 31)	Voto in Decimi (ottenuto con la proporzione)	Voto in decimi (una proposta)
0	0-1	3
1		
2		
3		
4	1-2	
5		
6		
7	2-3	
8		
9		
10	3-4	4
11		
12		
13	4-5	
14		5
15		
16	5-6	
17		6
18		
19	6-7	
20		
21		7
22	7-8	
23		
24		8
25	8-9	
26		
27		9
28	9-10	
29		
30		10
31	10	